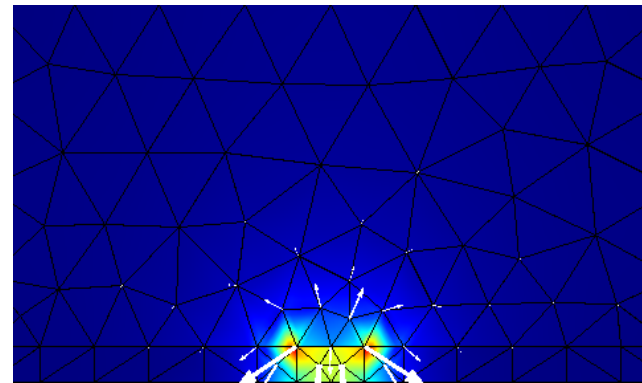
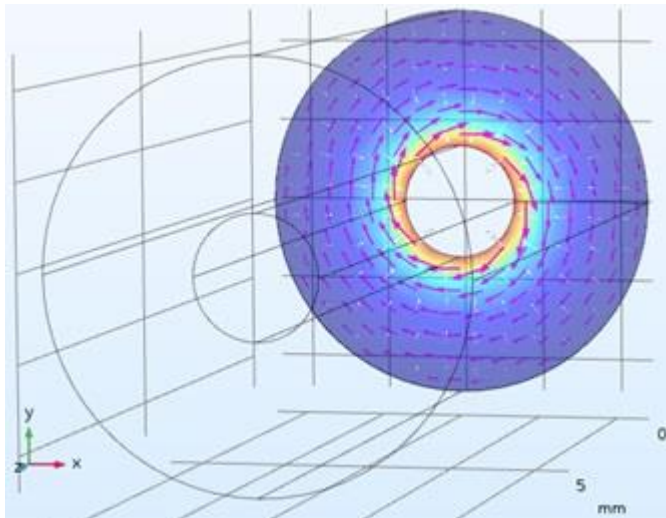


電磁両立性(EMC)セミナー (1)



東京都市大学 知識工学部
平野 拓一

E-mail: thirano@tcu.ac.jp

本日の内容

1. EMCについて
2. 伝送線路の基礎
3. コモンモードと
ディファレンシャル(ノーマル)モード

今後の予定:

6月4日(火) COMSOLを使った実例

9月3日(火) EMC対策例

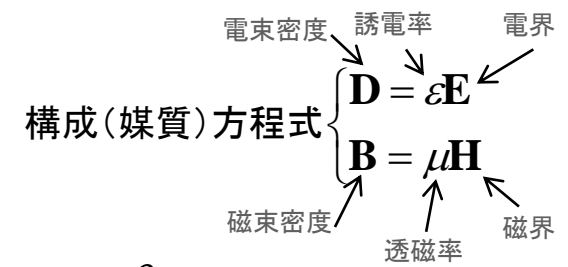
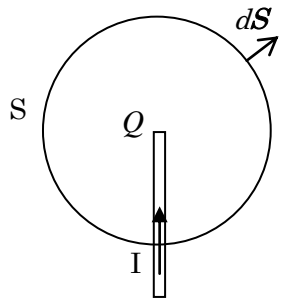
電磁波の物理的性質

マクスウェルの方程式

James Clerk Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.

電流連続の式:

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$



微分形

積分形

ファラデーの法則
アンペアの法則

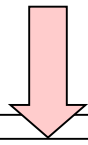
$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_V \rho dV \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{cases}$$

変位電流

変位電流

解いてみると



① 波動になる

$$\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \dots$$

まだわからないけど、電磁波と呼ぼう

② 波動の速度は光速

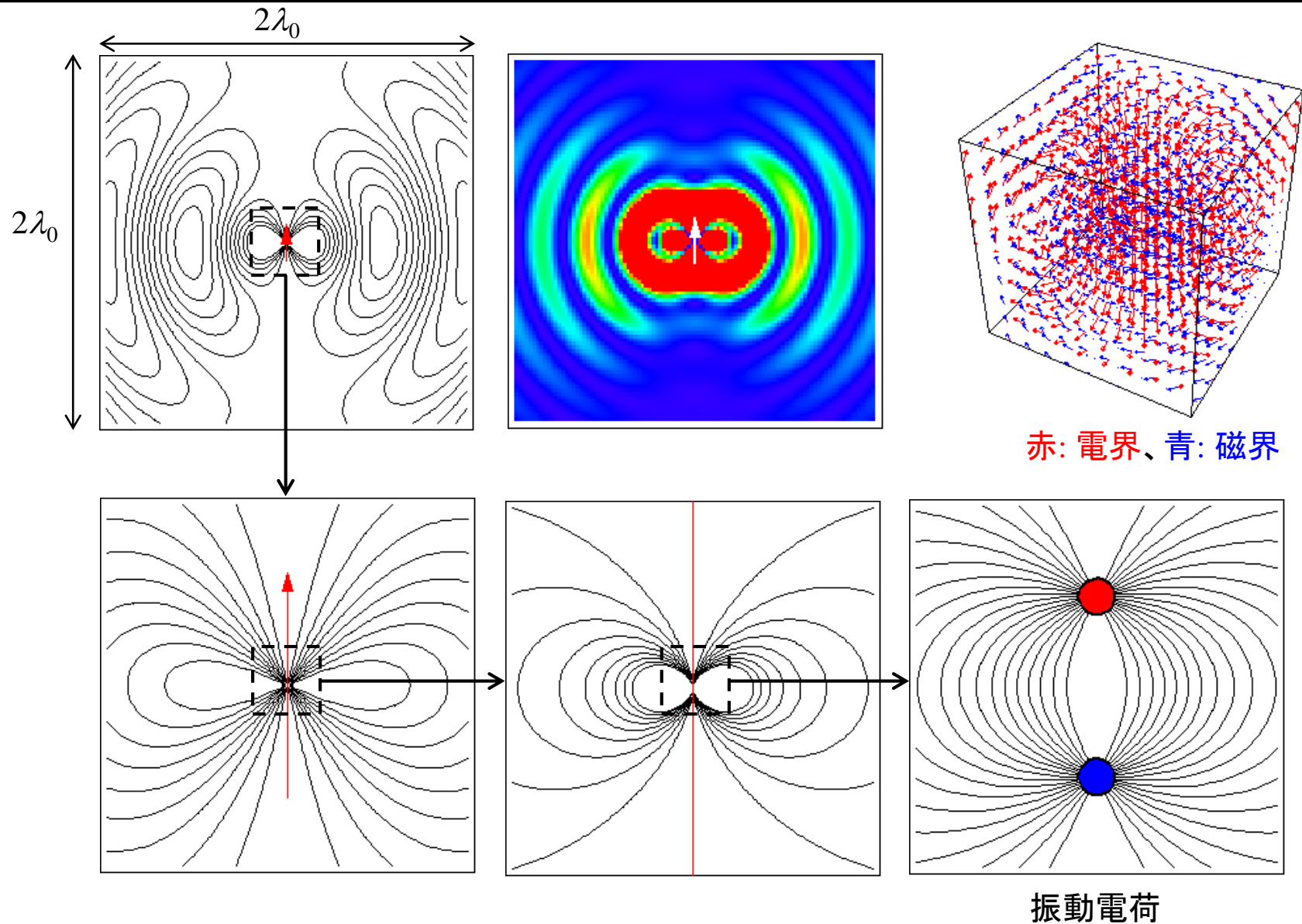
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 2.998 \times 10^8 \text{ [m/sec]}$$

光は電磁波だろう

i(電流)があれば、電波は必然的に発生する

だけでなく... $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ や $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ も同等

微小ダイポールからの放射



EMCについて

- EMC (Electromagnetic Compatibility; 電磁両立性)・・・(他の危機に電磁妨害を与えず、妨害を受けたとしても正常動作をする)
- EMC: EMI (Electromagnetic Interference; 電磁妨害)とEMS (Electromagnetic Susceptibility; 電磁感受性)の両特性を考慮したもの。
- イミュニティ (immunity): 電磁妨害に耐える能力。EMSを意味する。

- IEEE EMC Society (EMCS)・・・1957年～?
EMC Founders War Stories:
https://ethw.org/Archives:EMC_Founders_War_Stories
- 電子情報通信学会環境電磁工学(EMCJ)研究会・・・1996年～?

【EMC問題・対策の例】

- ・モーターのノイズが通信・放送に与える影響
- ・車のエンジン(点火プラグ)が発するノイズによる通信・放送への影響
- ・PCのデジタル回路の電流が放射する電波による通信・放送への影響
(アマチュア無線の例、液晶ディスプレイのスペアナの例)
- ・通信・放送波やデジタル機器が医療機器に与える影響
- ・雷で家電が壊れる
- ・静電気で測定器が壊れる
- ・MIDIケーブル等でのフォトカプラの使用(基準電位違いの対策)
- ・チップのパッドのESD対策用ダイオード
など

- 国際: (1830s モールス符号の発明)
1865- 万国電信連合
(1894 グリエルモ・マルコーニの無線通信)
1906- 国際無線電信連合
1927- 国際無線通信諮問委員会(CCIR) 統合
1932- 国際電気通信連合(ITU)
1947- ITUは国連の下部組織の専門機関となる
1992- CCIRはITUの無線通信部門(ITU-R)となる
- 国内: 総務省管轄 電波法
総務省 電波利用ホームページ: <https://www.tele.soumu.go.jp/>

電波法

https://www.tele.soumu.go.jp/horei/reiki_honbun/72001000001.html

第一章 総則

(目的)

第一条 この法律は、電波の公平且つ能率的な利用を確保することによつて、公共の福祉を増進することを目的とする。

(定義)

第二条 この法律及びこの法律に基づく命令の規定の解釈に関しては、次の定義に従うものとする。

- 一 「電波」とは、**三百万メガヘルツ以下の周波数の電磁波**をいう。
- 二 「無線電信」とは、電波を利用して、符号を送り、又は受けるための通信設備をいう。
- 三 「無線電話」とは、電波を利用して、音声その他の音響を送り、又は受けるための通信設備をいう。
- 四 「無線設備」とは、無線電信、無線電話その他電波を送り、又は受けるための電氣的設備をいう。
- 五 「無線局」[↑]とは、無線設備及び無線設備の操作を行う者の総体をいう。但し、受信のみを目的とするものを含まない。
- 六 「無線従事者」とは、無線設備の操作又はその監督を行う者であつて、総務大臣の免許を受けたものをいう。

(電波に関する条約)

第三条 **電波に関し条約に別段の定があるときは、その規定による。**



https://www.tele.soumu.go.jp/horei/reiki_honbun/72001000001.html

(無線局の開設)

第四条 無線局を開設しようとする者は、総務大臣の免許を受けなければならない。ただし、次の各号に掲げる無線局については、この限りでない。

一 発射する電波が著しく微弱な無線局で総務省令で定めるもの

二 二十六・九メガヘルツから二十七・ニメガヘルツまでの周波数の電波を使用し、かつ、空中線電力が〇・五ワット以下である無線局のうち総務省令で定めるものであつて、第三十八条の七第一項(第三十八条の三十一第四項において準用する場合を含む。)、第三十八条の二十六(第三十八条の三十一第六項において準用する場合を含む。)若しくは第三十八条の三十五又は第三十八条の四十四第三項の規定により表示が付されている無線設備(第三十八条の二十三第一項(第三十八条の二十九、第三十八条の三十一第四項及び第六項並びに第三十八条の三十八において準用する場合を含む。)の規定により表示が付されていないものとみなされたものを除く。以下「適合表示無線設備」という。)のみを使用するもの

三 空中線電力が一ワット以下である無線局のうち総務省令で定めるものであつて、次条の規定により指定された呼出符号又は呼出名称を自動的に送信し、又は受信する機能その他総務省令で定める機能を有することにより他の無線局にその運用を阻害するような混信その他の妨害を与えないように運用することができるもので、かつ、適合表示無線設備のみを使用するもの

四 第二十七条の十八第一項の登録を受けて開設する無線局(以下「登録局」という。)

2 本邦に入国する者が、自ら持ち込む無線設備(次章に定める技術基準に相当する技術基準として総務大臣が指定する技術基準に適合しているものに限る。)を使用して無線局(前項第三号の総務省令で定める無線局のうち、用途及び周波数を勘案して総務省令で定めるものに限る。)を開設しようとするときは、当該無線設備は、適合表示無線設備でない場合であつても、同号の規定の適用については、当該者の入国の日から同日以後九十日を超えない範囲内で総務省令で定める期間を経過する日までの間に限り、適合表示無線設備とみなす。この場合において、当該無線設備については、同章の規定は、適用しない。

3 前項の規定による技術基準の指定は、告示をもつて行わなければならない。

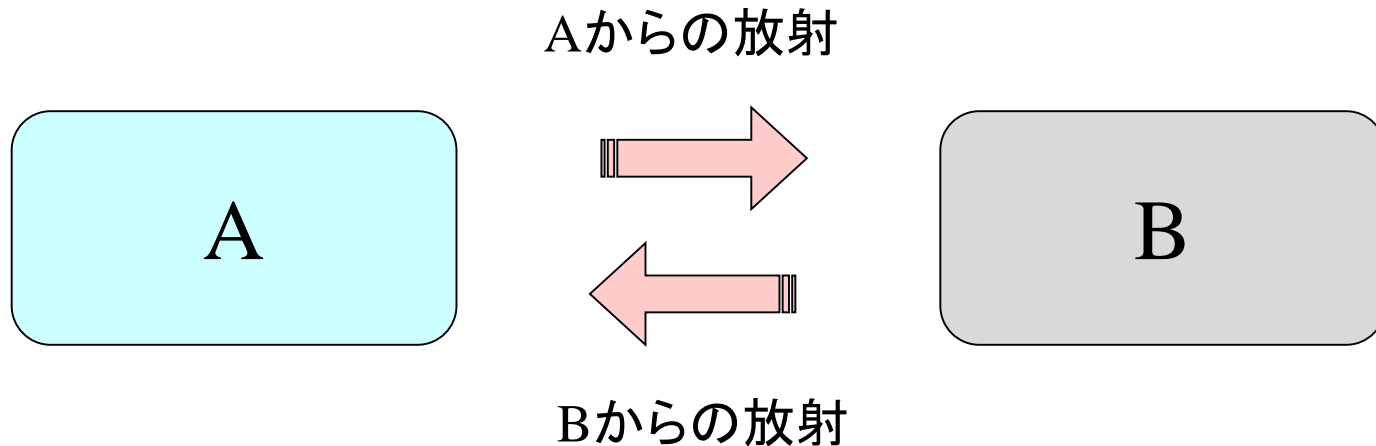
1908- IEC(International Electrotechnical Commission, 国際電気標準会議), CISPR (International Special Committee on Radio Interference; 国際無線障害特別委員会)

日本: [法律(経済産業省)] 電気用品安全法, [自主規制] VCCI(情報処理装置等電波障害自主規制協会)

http://elaws.e-gov.go.jp/search/elawsSearch/elaws_search/lsg0500/detail?lawId=336AC0000000234

アメリカ: FCC(Federal Communications Commission:米国連邦通信委員会) のCFR47(電波放射を目的とした機器だけでなく、規制対象スペクトルに影響を与える機器を含む規制)

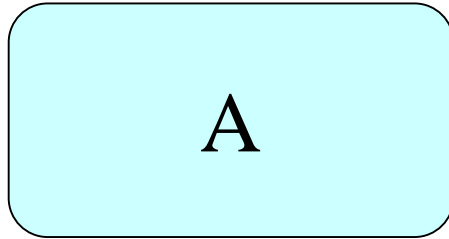
ヨーロッパ: 欧州整合規格(EN規格), EU内で流通させるためには強制



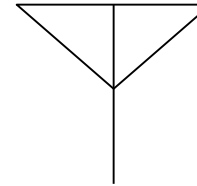
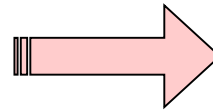
- ・AはBと一緒に使うことを想定していな場合を考える
- ・Aの放射は電波法に従わなければならない。
- ・Bからの放射はAにとって妨害となるが、Bの放射が電波法を守っている場合はAはその状況を受け入れてAが対処するしかない。

(例えば、無線機の受信機の初段にフィルタがあるのはその例。もし、フィルタがない場合、初段の増幅器LNAの出力が飽和してしまうかもしれない。)

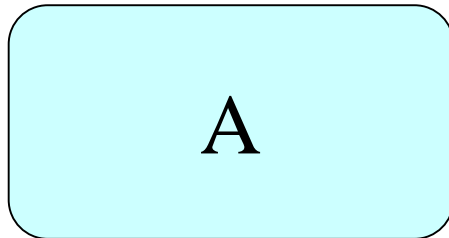
EMI試験



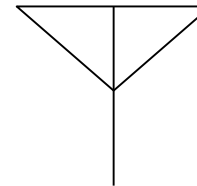
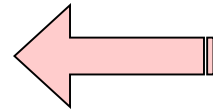
Aからの放射



EMS試験



Aへの暴露



ESD試験など

電波を発しうる機器

- 無線設備
- モーター(動力)
- 電圧変換器(インバータ)
...その他一般に電気を使う機器





DDR: バスクロック 100MHz-275MHz

DDR2: バスクロック 200MHz-600MHz

DDR3: バスクロック 400MHz-1333MHz

DDR4: バスクロック 800MHz-2133MHz

旧

新

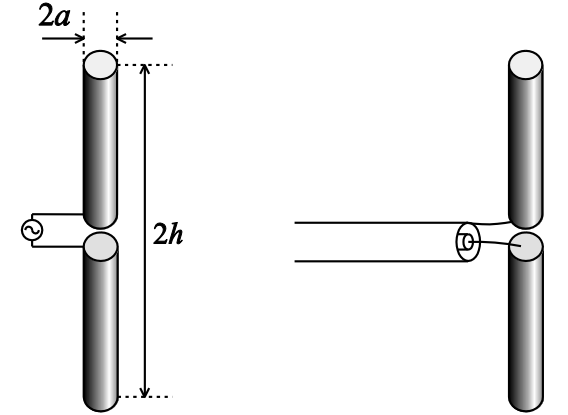
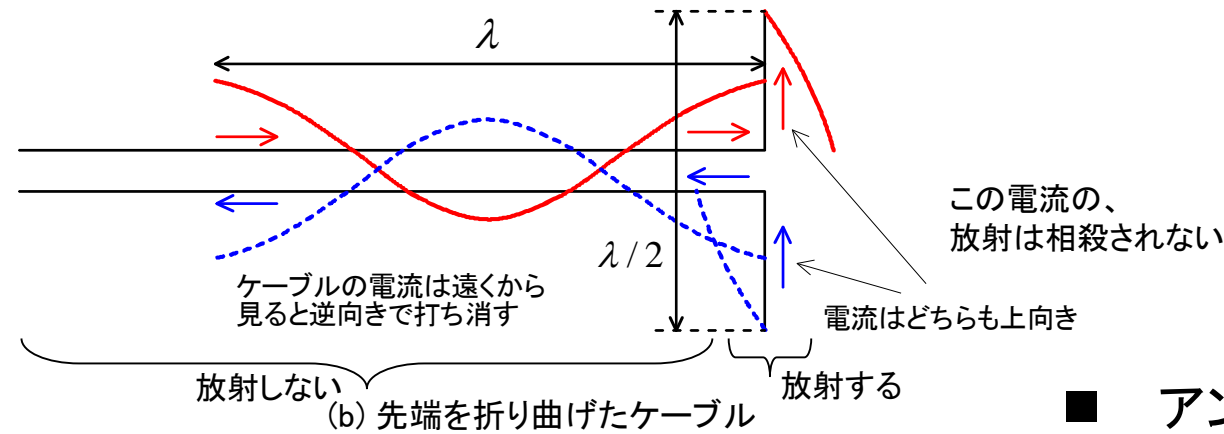
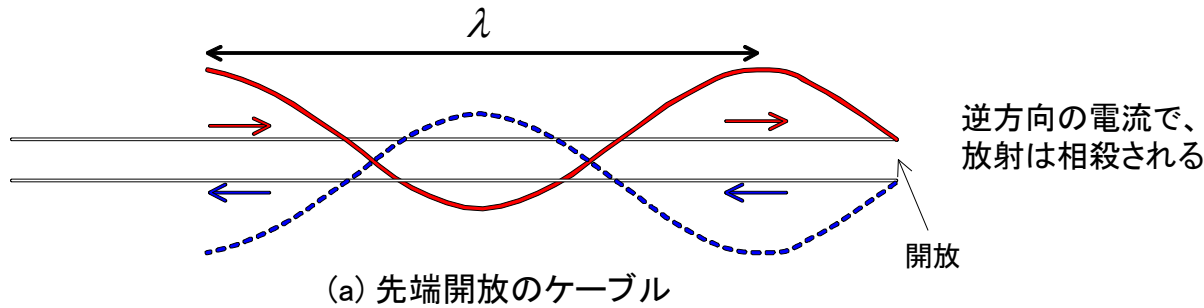


電子レンジの周波数は2.45GHz帯(ISM帯)である。波長は
 $\lambda=c/f=3 \times 10^8/(2.45 \times 10^9)=12\text{cm}$ である。すると、内部の定在波の山と山の間隔は
6cm、山と谷の間隔は3cmとなって、料理の温まり具合が不均一となる。皿を回転させ
たり、定在波の形を変えたりして料理を均一に温めるように工夫している。

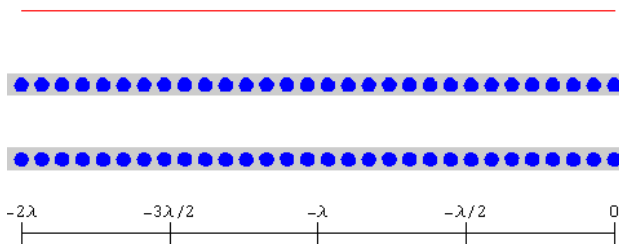
様々な高周波素子

- アンテナ:放射
- 線路:信号伝送
- 高周波回路:フィルタなど

線路とアンテナの違い



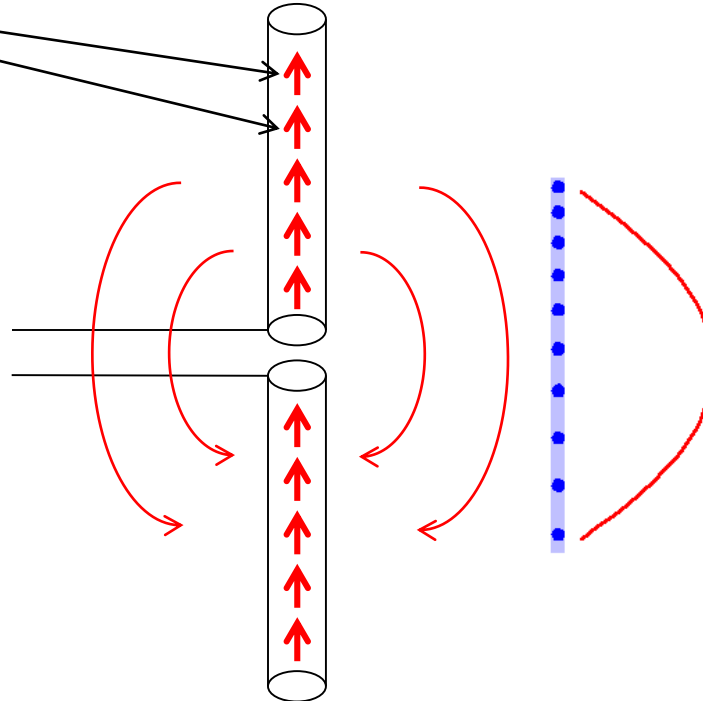
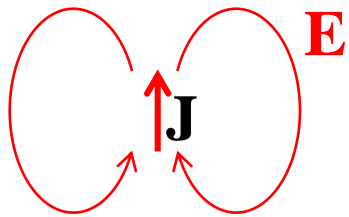
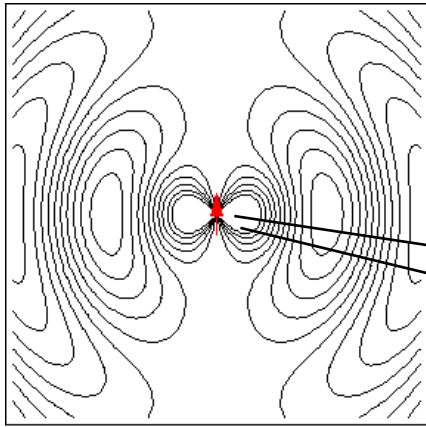
- アンテナ: 放射
- 線路: 信号伝送 (放射しない)



- ☀ 交流電流があれば、普通は放射する。(物理現象)
- ☀ 電線から電波が放射しにくいのは打ち消すから。
- ☀ 電流が波長に比して短いと放射効率は悪い。

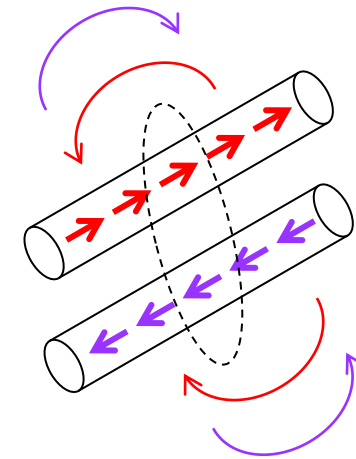
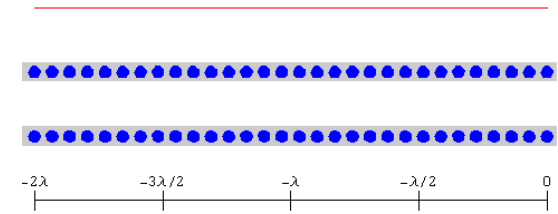
線路とアンテナの違い

任意の電流分布は微小電流素（微小ダイポール）の和と考えると理解しやすい。



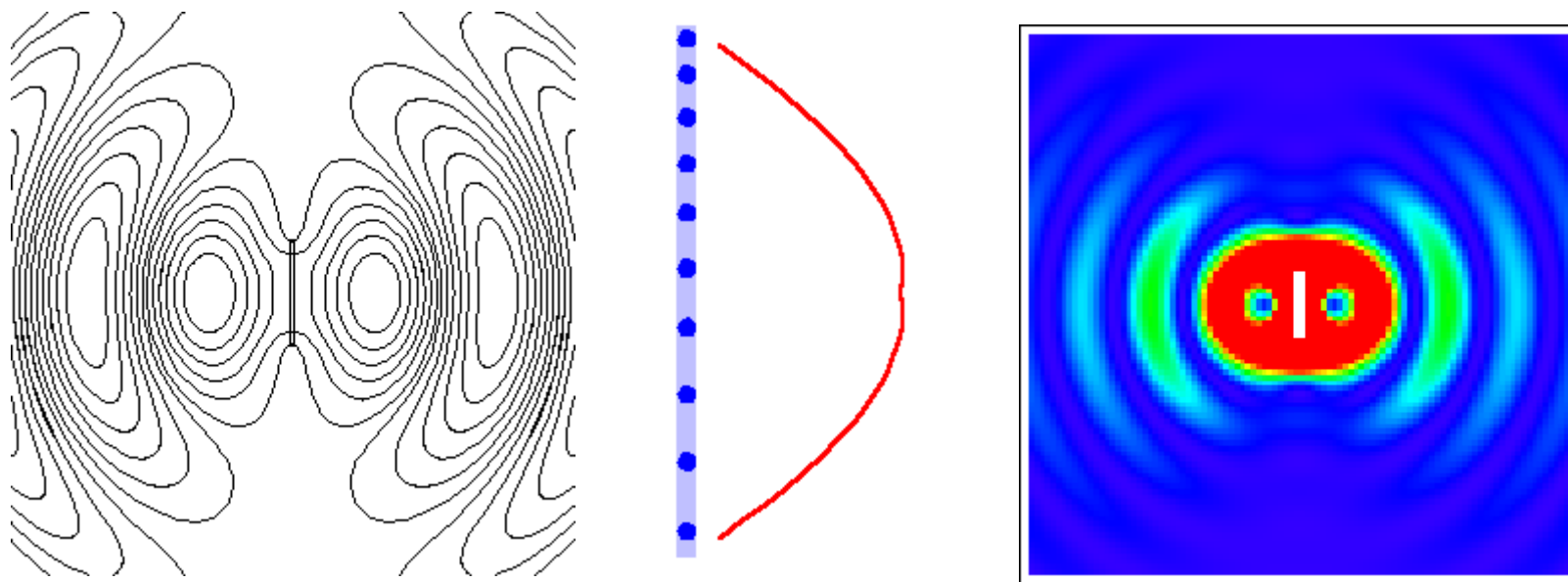
アンテナ

放射は打消し合わない



線路

放射は打消しあう



アンテナ・無線ハンドブック, オーム社, pp.17-41 (I編-3章、4章分担), 2006年10月.

マクスウェルの方程式より、時間的に変化する電流が流れれば
必然的に電磁波は放射される
(ケーブルから放射されにくいのは逆方向で打ち消すため)

→アンテナの設計は、効率よくアンテナに電流を流す

普通アンテナはだいたい1/2波長程度の大きさ

相反定理と物理的意味

- よく受信できるアンテナはよく放射できる
- 電磁波が漏れてしまう線路は外部からの電磁波も拾ってしまう。

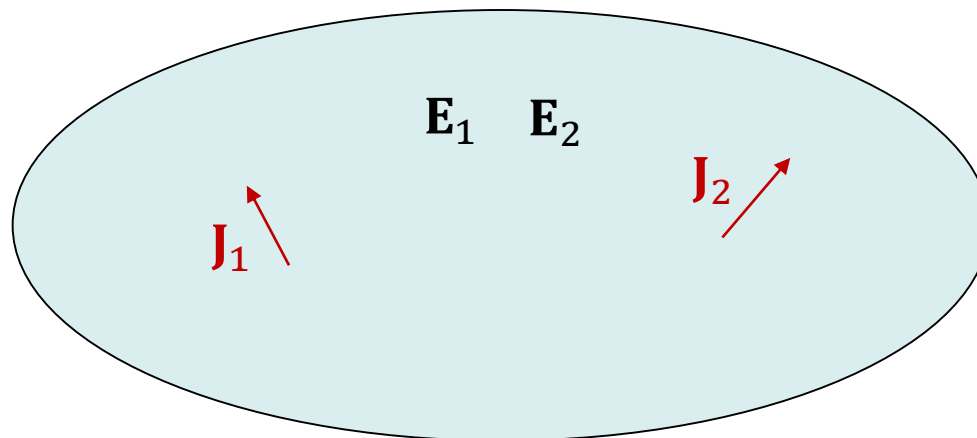
Port1での受信電力

Port2での受信電力

$$\iiint_V \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dV = \iiint_V \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dV$$

↑
Port2の \mathbf{J}_2 が作る電界

↑
Port1の \mathbf{J}_1 が作る電界



$$S_{ij} = S_{ji}$$

伝送線路の基礎

しっかりした線路設計は重要

- 導波路モードを確認
 - ・基本モードは設計通り？
 - ・高次モード(周波数)は大丈夫？

ヘルムホルツの方程式

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{i}$$

励振波源あり

既知ベクトル(励振)

行列方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

未知ベクトル



Type A: 励振問題

Type B: 励振波源なし

未知スカラー(固有値)

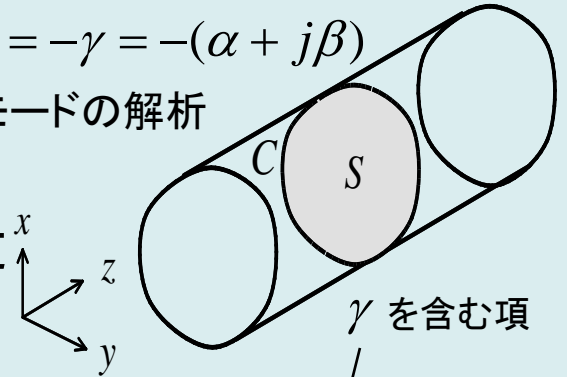
固有値問題 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

未知ベクトル(固有ベクトル)

伝搬定数: $\partial / \partial z = -\gamma = -(\alpha + j\beta)$

導波路, モードの解析

2-D構造



(b) 導波路モード解析

$$\nabla_t \times \left(\frac{\nabla_t \times \mathbf{E}_t}{\mu_r} \right) - (k_0^2 \epsilon_r + \Gamma) \mathbf{E}_t = 0$$

共振器

3-D構造

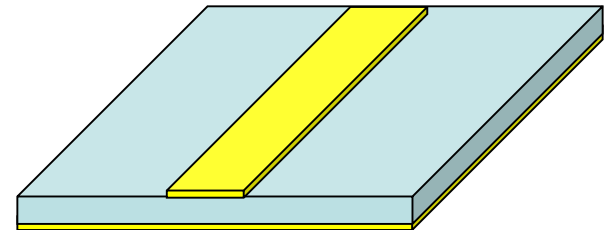
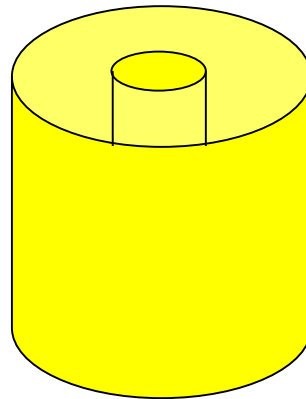
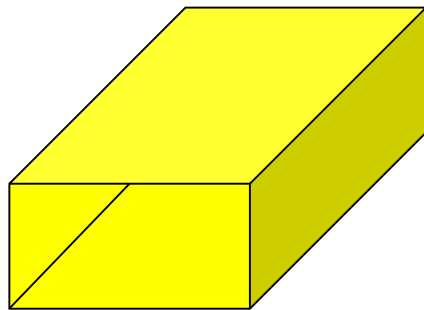
$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0$$

どの周波数でどのような形で共振するのか?

Type C: 共振モード解析

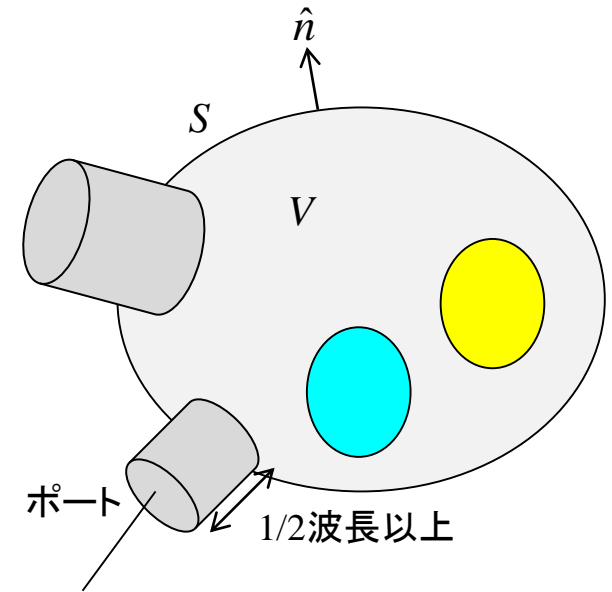
Type B: 励振波源なし

2-D導波路モード解析

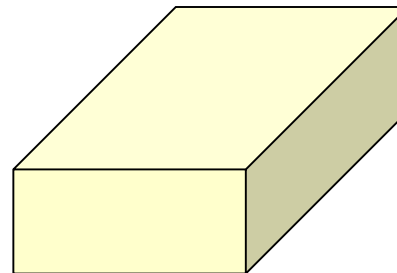
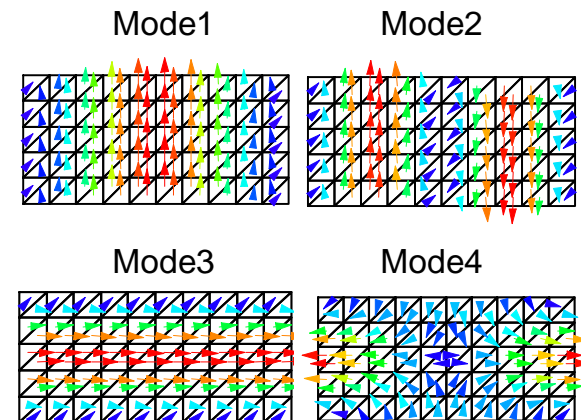


ポート(導波路モード励振)

- 導波路モード励振は境界にて行う。
- 導波路モード給電では、導波路部分は少なくとも1/2波長以上はモデル化する。(不連続部で発生した高次モードが十分減衰するように)
- 単一モード条件であるかどうかを確認する。多モードならば、それらも考慮して解析する。
- 開放型線路の場合には電磁界モードが端で十分減衰する程度に広い面積でポートを定義する。

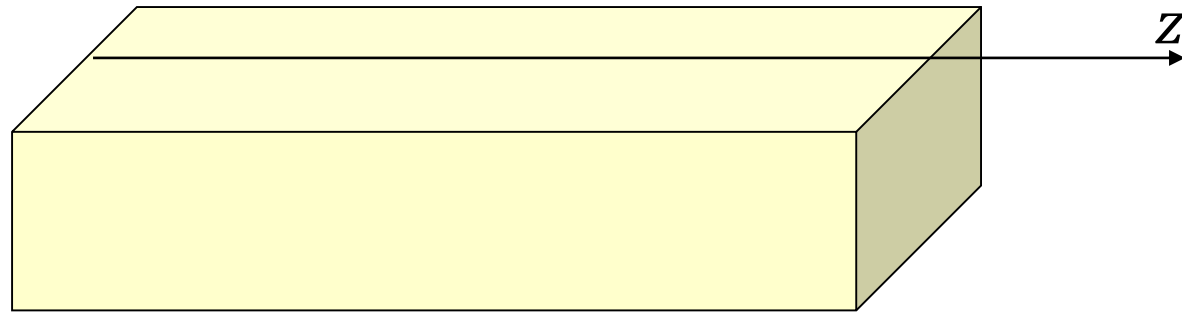


$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1^{(+)} + \sum_u B_u \mathbf{E}_u^{(-)}$$



モードの概念

導波路(線路)

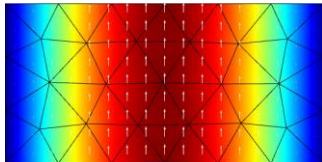


$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{-\gamma z} = \mathbf{E}(x, y)e^{-\alpha z - j\beta z}$$

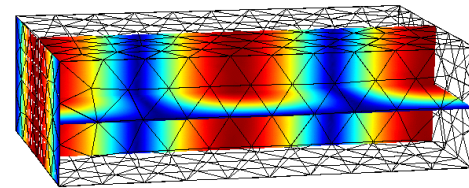
モード関数
 $\mathbf{E}(x, y)$

伝搬定数

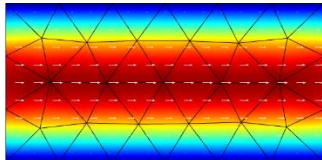
Mode 1



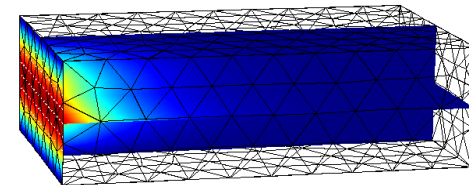
$$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$$



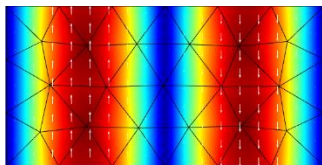
Mode 2



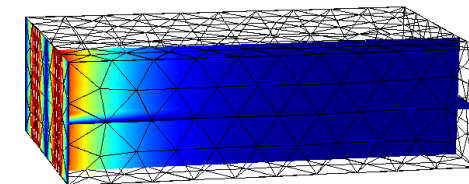
$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2$$



Mode 3

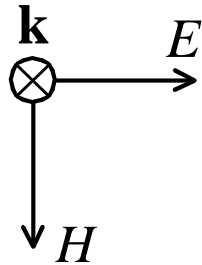


$$\gamma_3 = \alpha_3 + j\beta_3$$



様々な伝送線路

波数ベクトル

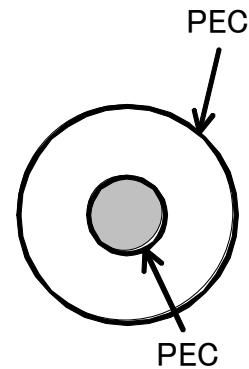


(a) 自由空間

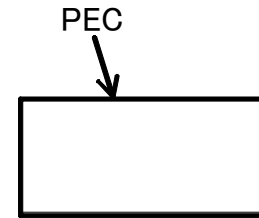
PEC(金属)



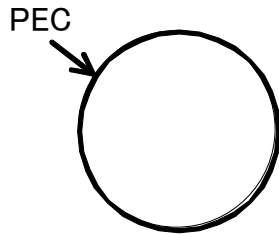
(b) 平行二本線路
(レツヘル線路)



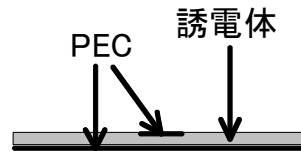
(c) 同軸線路



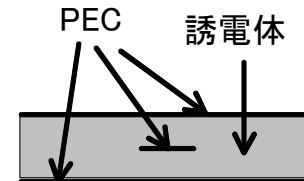
(d) 方形導波管



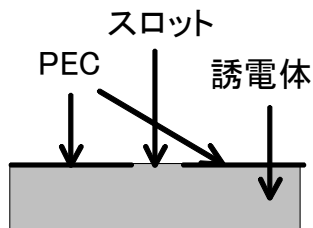
(e) 円形導波管



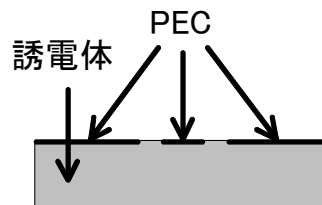
(f) マイクロストリップ線路



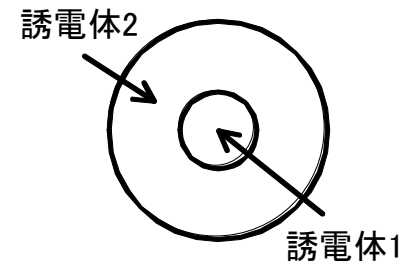
(g) ストリップ線路
(トリプレート線路)



(h) スロット線路



(i) コプレーナガイド



(j) 光ファイバ

Cの計算

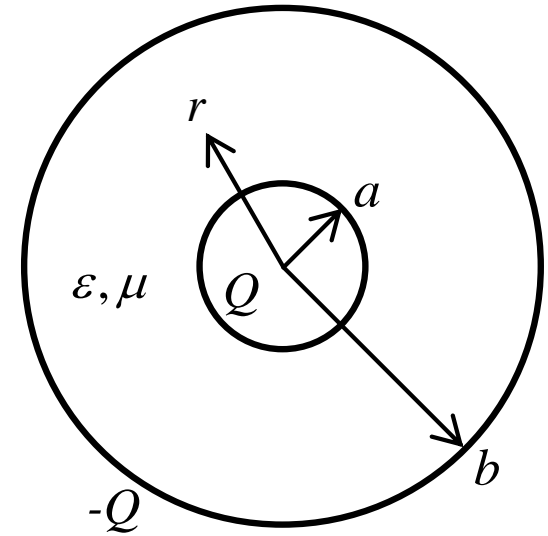
$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV \quad \text{ガウスの法則}$$

$$\varepsilon E_r \cdot 2\pi r = Q$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r}$$

$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} [\log r]_a^b = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} \log \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\log \frac{b}{a}}$$



Lの計算

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{アンペアの法則}$$

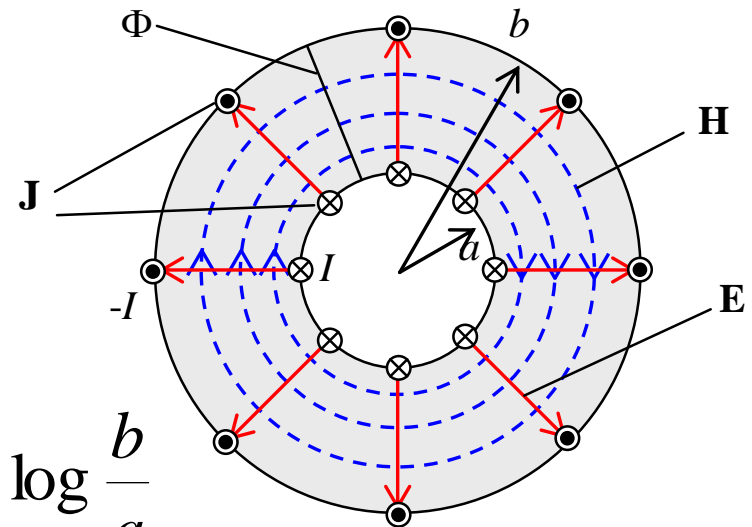
$$H_\phi \cdot 2\pi r = I \quad H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\frac{\Phi}{\mu} = \int_a^b H_\phi dr = \frac{I}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

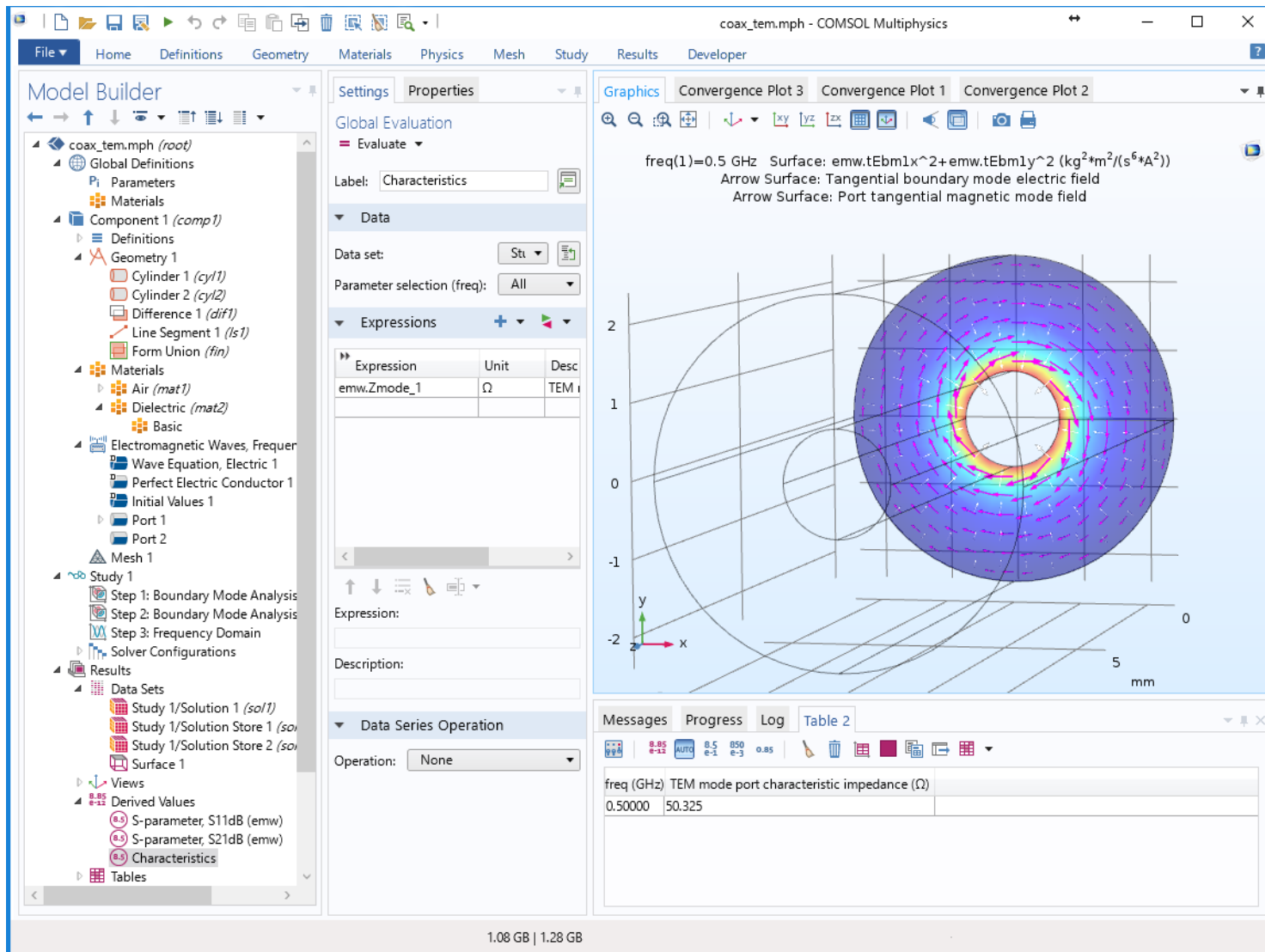
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

特性インピーダンス

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\log \frac{b}{a}}{2\pi}$$



COMSOL



$$\begin{aligned} \text{In}[1] := & a = (1.4 / 2) * 10^{-3}; \\ & b = a + 1.7 * 10^{-3}; \\ & \epsilon r = 2.2; \\ & \mu r = 1.; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[5] := & \epsilon \theta = 8.85418782 * 10^{-12}; \\ & \mu \theta = 1.25663706 * 10^{-6}; \\ & \epsilon = \epsilon r * \epsilon \theta; \\ & \mu = \mu r * \mu \theta; \end{aligned}$$

$$\text{cap} = \frac{2 * \pi * \epsilon}{\text{Log}\left[\frac{b}{a}\right]}$$

$$\text{ind} = \frac{\mu}{2 * \pi} \text{Log}\left[\frac{b}{a}\right]$$

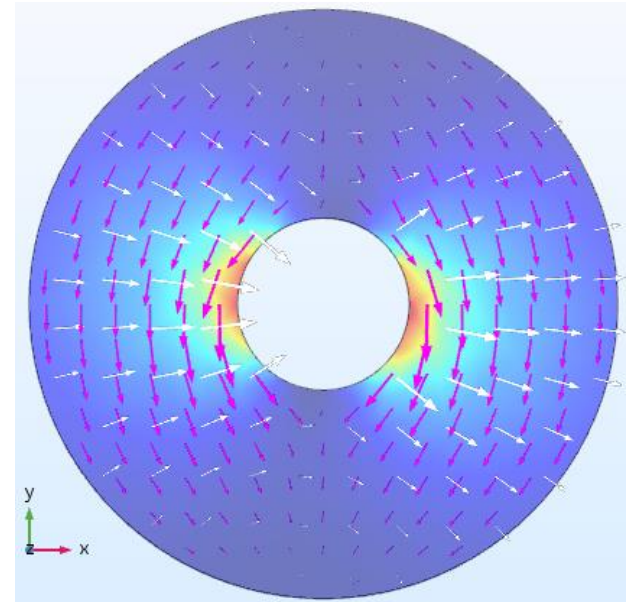
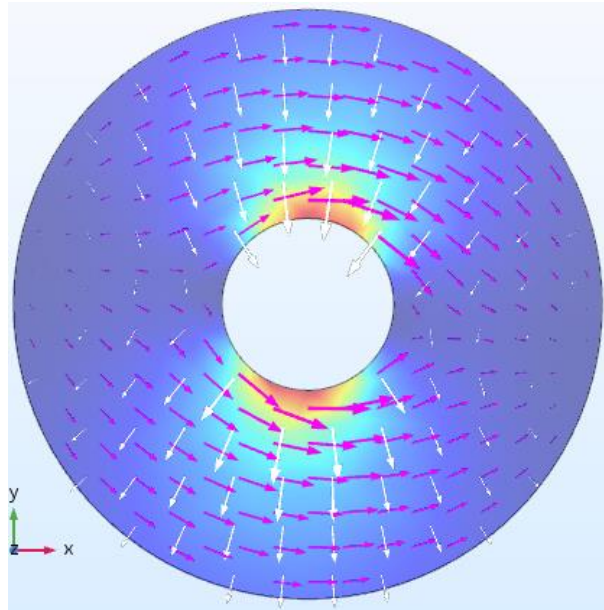
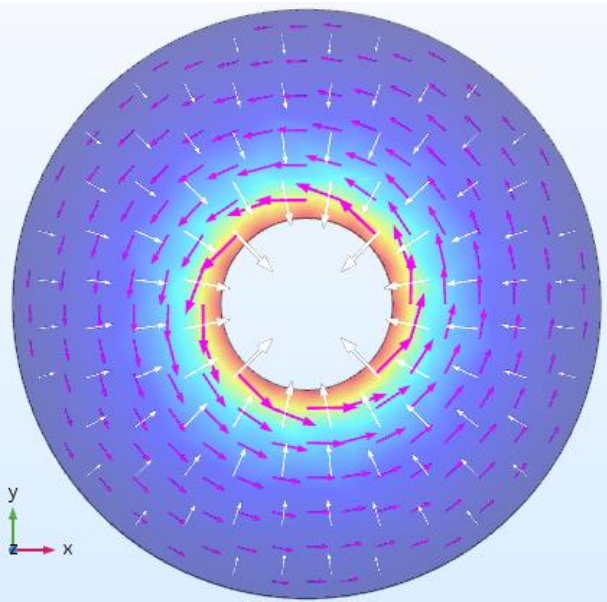
$$z_0 = \sqrt{\frac{\text{ind}}{\text{cap}}}$$

$$\text{Out}[9] = 9.93322 * 10^{-11}$$

$$\text{Out}[10] = 2.46429 * 10^{-7}$$

$$\text{Out}[11] = 49.8082$$

周波数 500 MHz



j 15.5413

663.16

663.18

$$k_c \cong \frac{2}{a+b}$$

```
In[12]:= kc =  $\frac{2}{a+b}$ ;
          fc =  $\frac{kc}{2 * \pi * \sqrt{\mu * \epsilon}}$ ;
          fcGHz = fc * 10-9
Out[14]= 20.7538
```

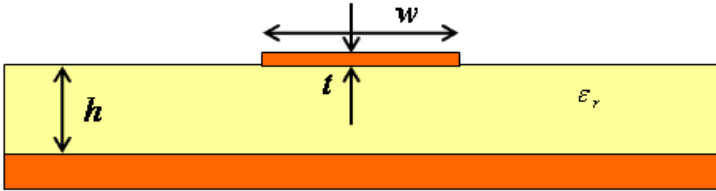
```
In[1]:= f = 500. * 106;
        \omega = 2 * \pi * f;
        \epsilon r = 2.2;
        \epsilon \theta = 8.85418782 * 10-12;
        \mu \theta = 1.25663706 * 10-6;
        \beta = \omega * \sqrt{\mu \theta * (\epsilon r * \epsilon \theta)}
Out[6]= 15.5432
```

つまり、「境界モード解析」のTransformで”None”とすると、伝搬定数 γ が出力されている。高次モードのカットオフ周波数を調べるには、解析周波数を変えて、伝搬定数が虚数になる周波数を探せばよい。

21-22 GHzの間に高次モードカットオフ周波数があることがわかる。

Microstrip Line

2010.10.30 Takuichi Hirano



Input

Dielectric constant	ϵ_r	<input type="text" value="4.3"/>	
Height of dielectric layer	h	<input type="text" value="1.57"/>	mm
Width of signal line	w	<input type="text" value="3"/>	mm
Thickness of signal line	t	<input type="text" value="0.035"/>	mm

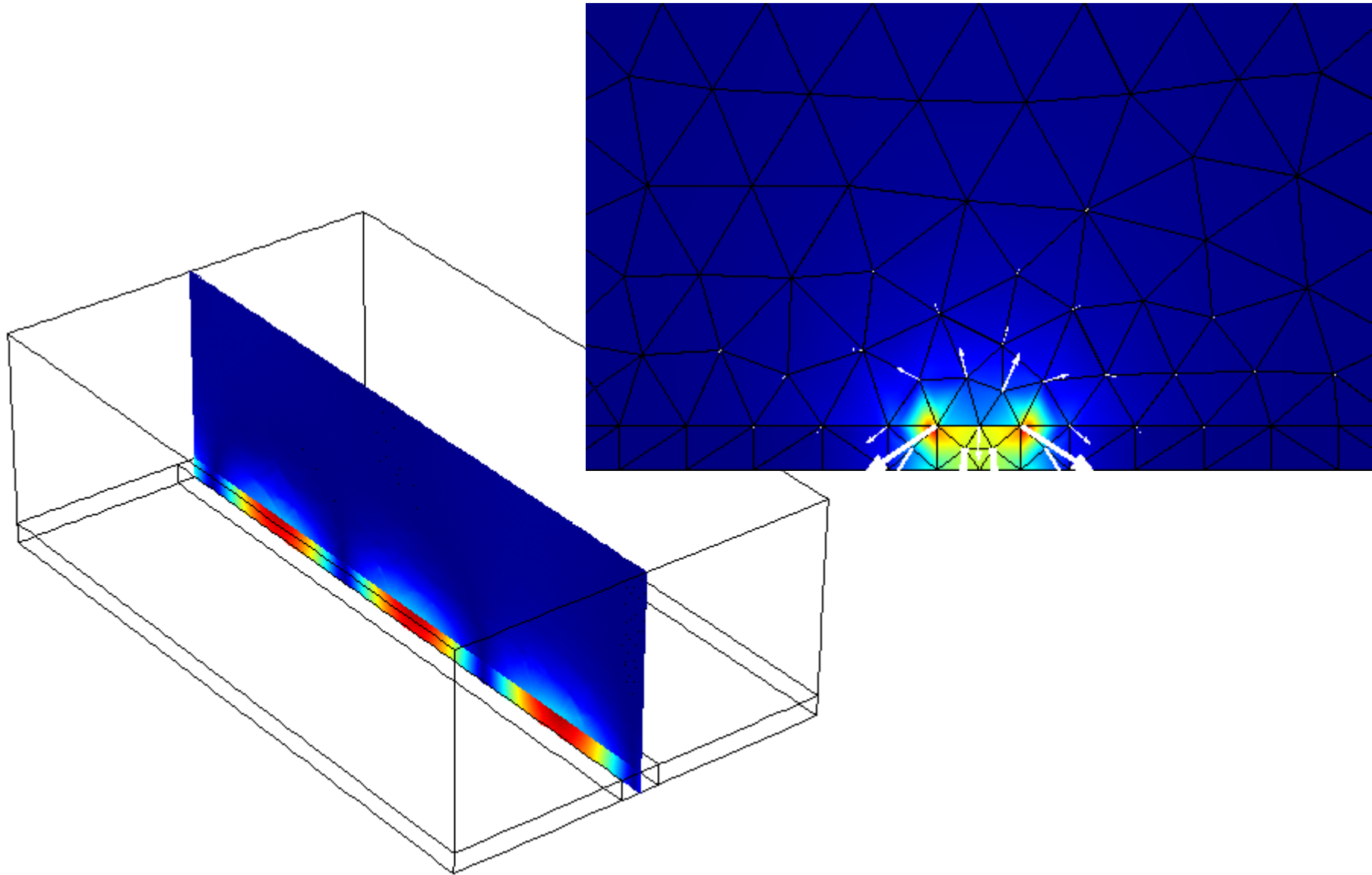
Output

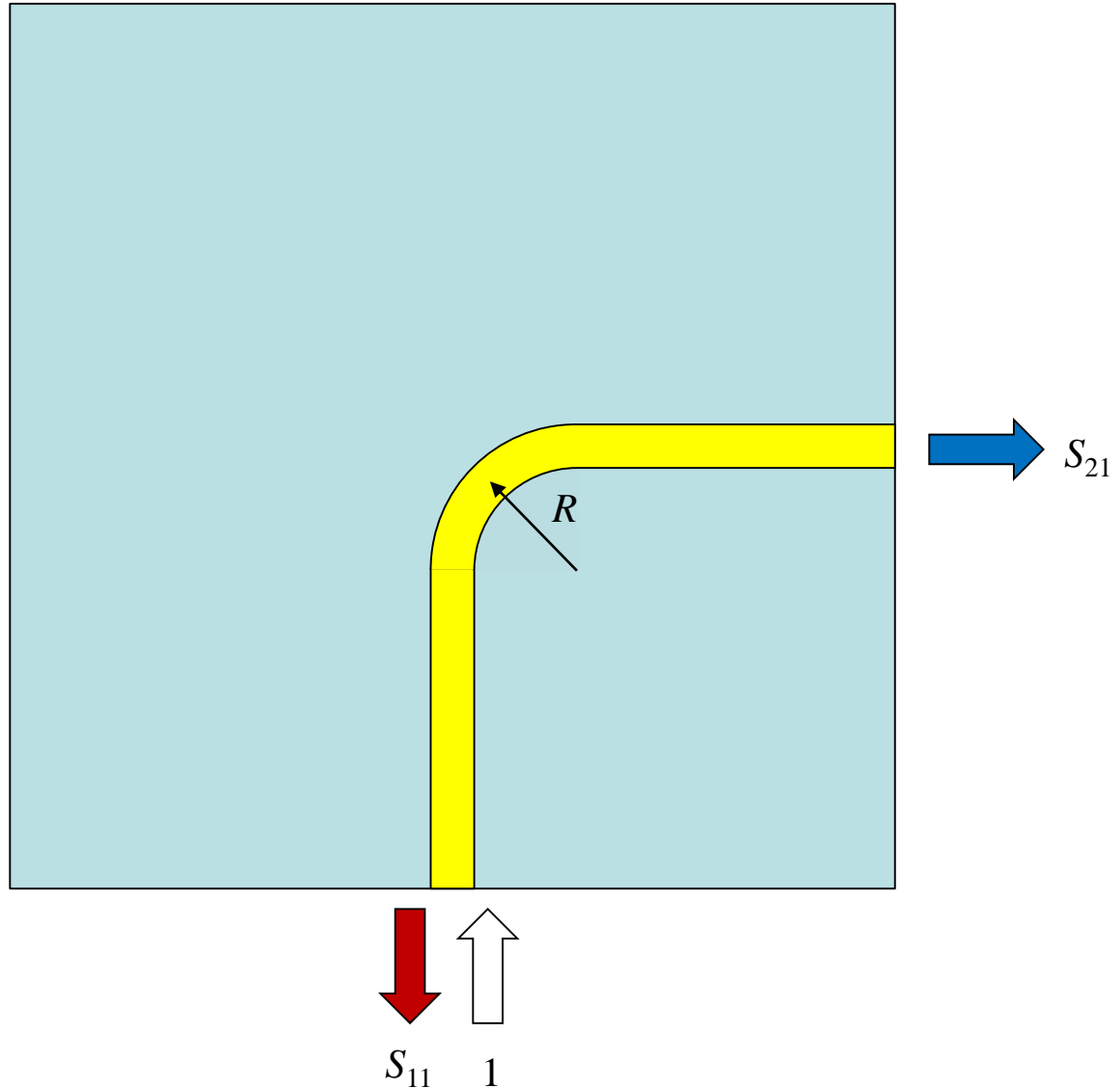
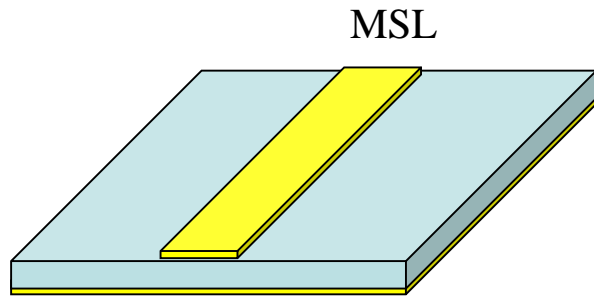
Characteristic impedance	Z_0	<input type="text" value="50.02461928316401"/>	Ohms
Effective relative permittivity	ϵ_{eff}	<input type="text" value="3.2615306862454085"/>	

$$\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{reff}}$$

$$\beta = 2\pi / \lambda_g$$

http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/mw_circuit/transmission_lines/



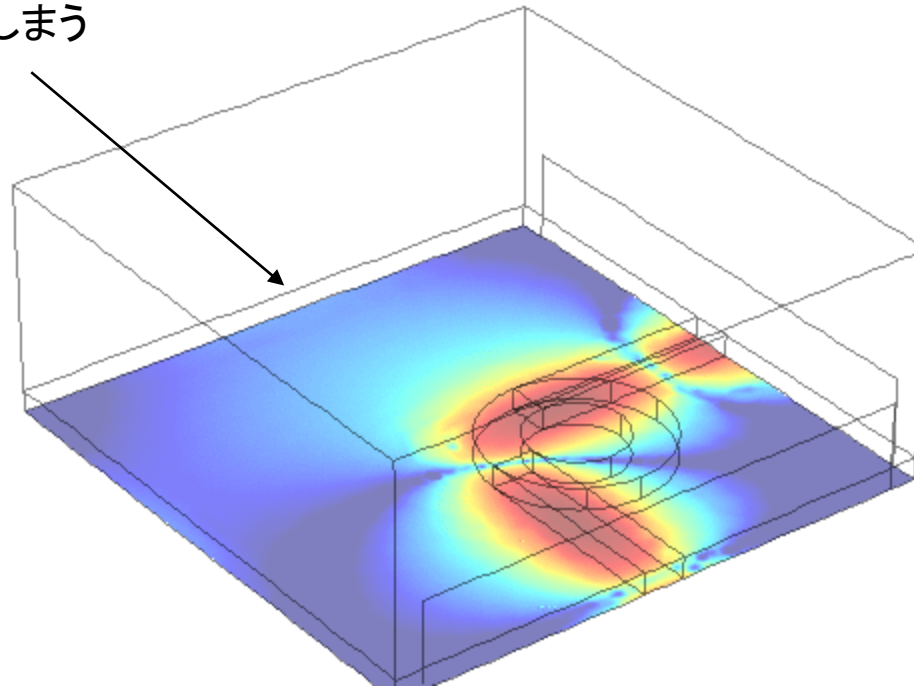


入力電力: 1

出力電力: $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2$

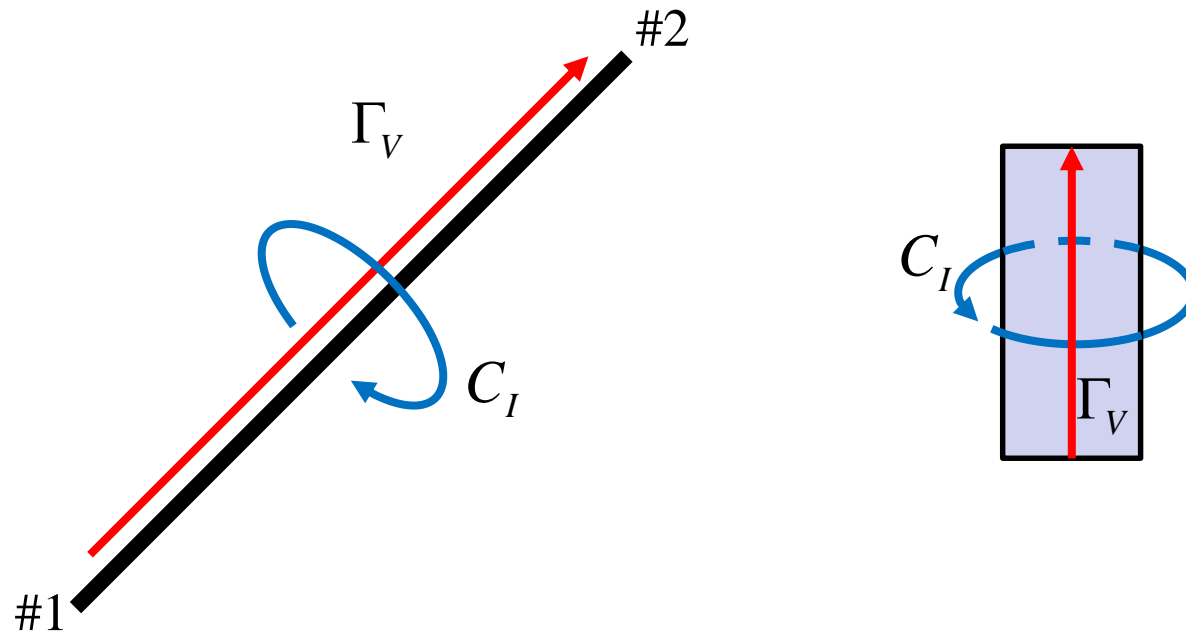
損失電力: $1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2$

漏れてしまう



コモンモードと ディファレンシャル(ノーマル)モード

- シングルエンド伝送と差動伝送
- 差動伝送のコモンモードノイズ抑圧効果

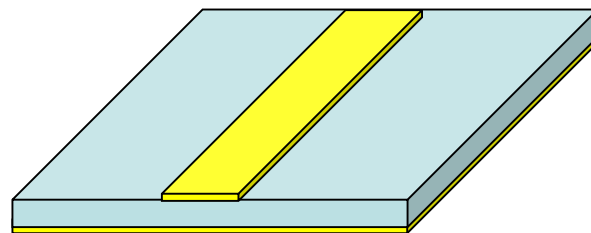
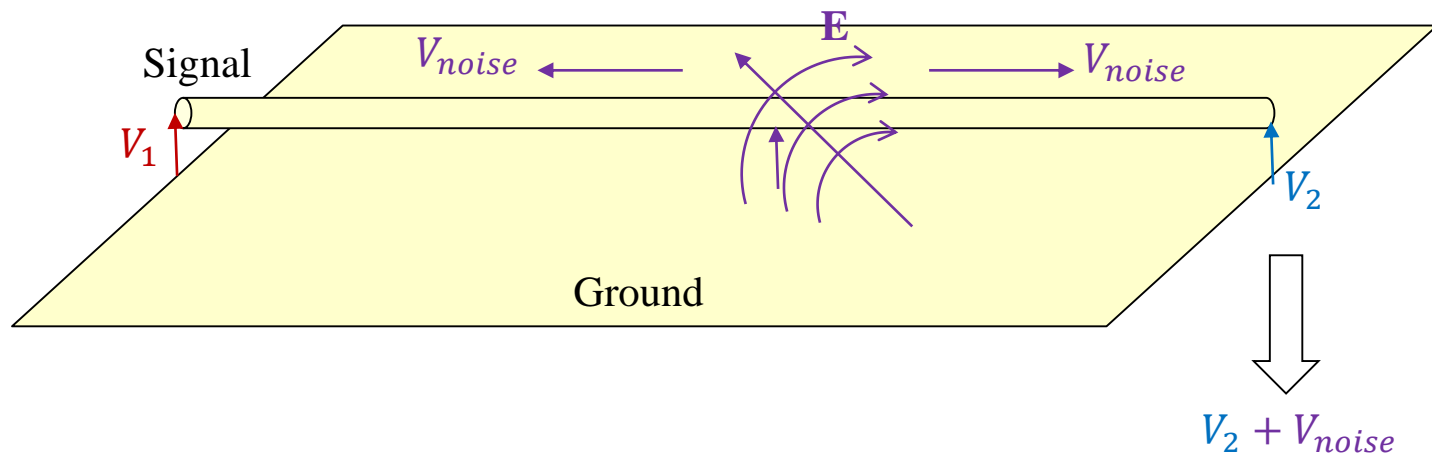


$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{電圧 } V_0 = -\int_{\Gamma_V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ \text{電流 } I_0 = \oint_{C_I} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \end{cases}$$

$$Z_0 = V_0 / I_0$$

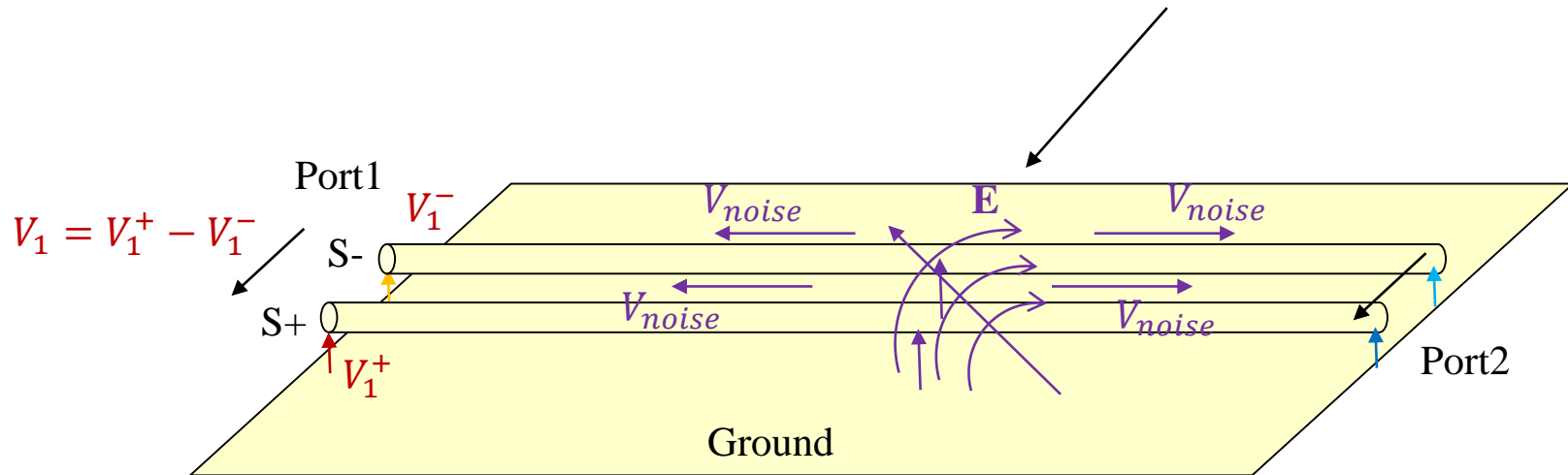
シングルエンド伝送



差動伝送

2本のマイクロストリップ線路など

線路間隔よりも大きな波長のノイズの場合

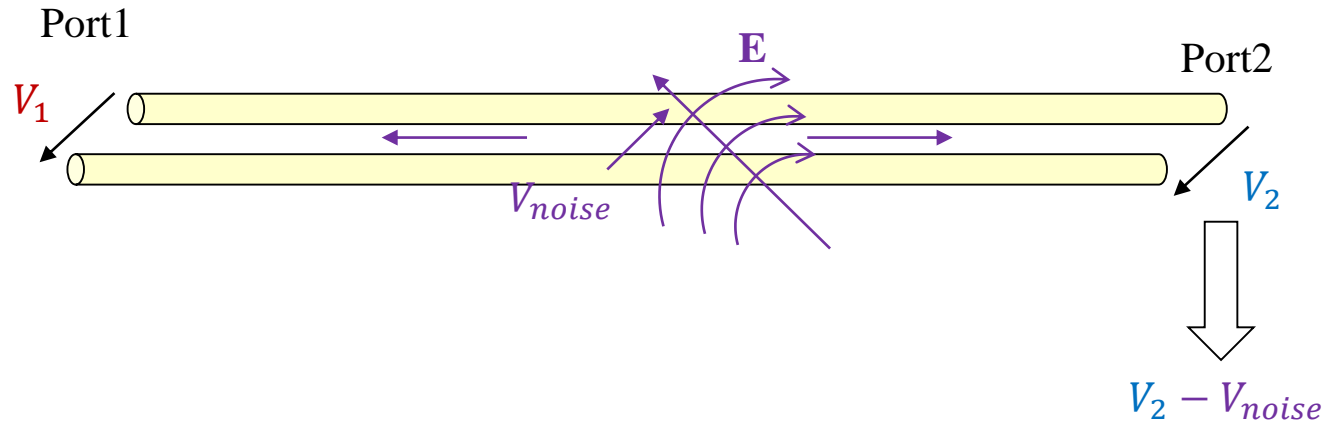


$$V_2 = V_2^+ - V_2^-$$

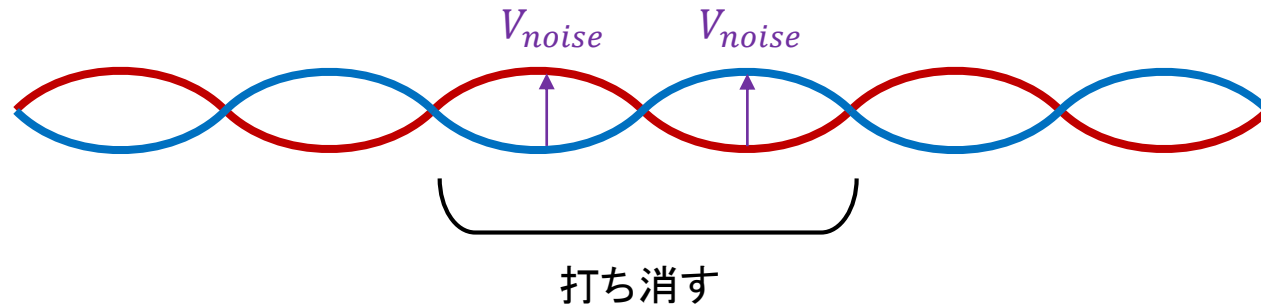


$$\begin{aligned} V_2 &= (V_2^+ + V_{noise}) - (V_2^- + V_{noise}) \\ &= V_2^+ - V_2^- \end{aligned}$$

平行2本線路の場合



ツイストペアケーブルにすると

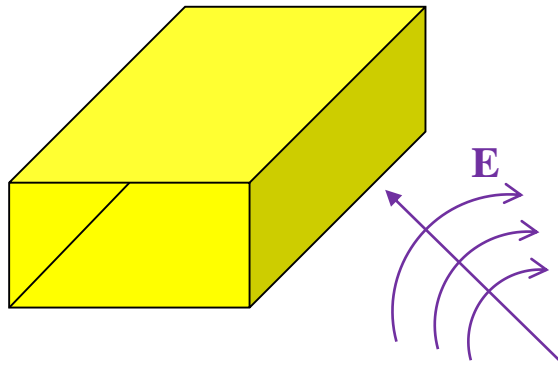


ただし、ツイストのピッチは波長より十分小さくしないと、局部、不連続構造となり、伝送特性自体が劣化。下記論文の手法で定量的に評価できるはず。

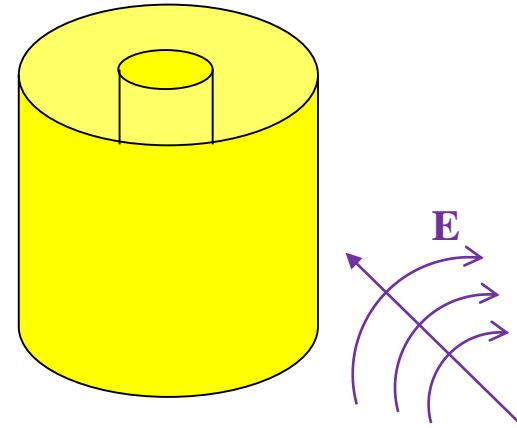
Y. Ono, T. Hirano, K. Okada, J. Hirokawa, and M. Ando, "Eigenmode Analysis of Propagation Constant for a Microstrip Line with Dummy Fills on a Si CMOS Substrate," IEICE Trans. Electron., Vol.E94-C No.6, pp.1008-1015, June 2011.

導体でシールドされた線路

導波管



同軸線路



外部導体でシールドされているので安心。不安な場合は、線路や回路を含めて全体を金属でシールドする対策方法もある。

交流磁界の影響

ファラデーの法則

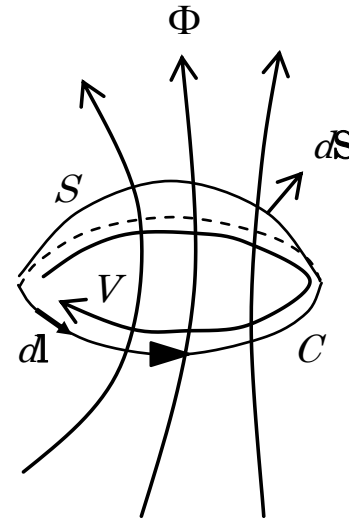
ファラデー：近接作用、界の概念を提唱

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理を使って

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



鎖交磁束の時間変化で電圧が発生

Bを発生させる周波数は低い、つまり波長が考えている回路よりかなり大きい状況を想定。

まとめ

- しっかりした線路設計はノイズ対策に重要
- どのようにノイズがのるのか、波長との関係などから考える。
- ノイズにより $V_0 = -\int_{\Gamma_V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ で発生する電流がどこにのるか考える。

参考文献

1. http://www.takuichi.net/em_analysis/fem/fem_j.html
2. 平野 拓一, “電磁界シミュレータ利用の勘所 —境界条件と励振モデル—,” 電子情報通信学会論文誌 C, Vol.J101-C, No.10, pp.381-388, Oct. 2018. (招待論文; OpenAccess)
3. 平野 拓一(分担), 4.3節: 有限要素法を用いた電磁界解析技術、「磁性材料・部品の最新開発事例と応用技術」、技術情報協会, pp.175-184, ISBN-13: 978-4861047053, 2018年3月.
4. 橋口 真宜, 藤井 知, 平野 拓一, 坂東 弘之, “COMSOL Multipysicsによる計算科学工学- 波動系(5),” 日本計算工学会誌, Vol.23, No.2, pp.20(1)-20(9), 2018.
5. 平野拓一, “電磁界シミュレータ利用の勘所,” 電子情報通信学会誌, 小特集 電磁界シミュレーション技術の進展, Vol.100, No.5, pp.342-348, 2017年5月.

マクスウェルの方程式

付録

ファラデーの法則

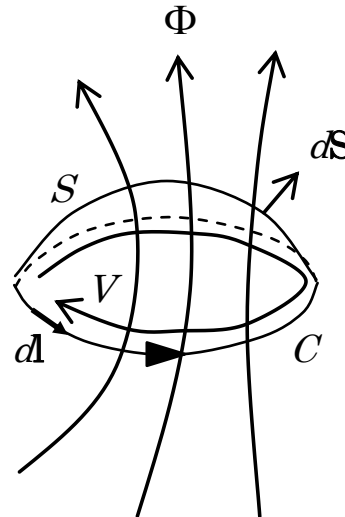
ファラデー: 近接作用、界の概念を提唱

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

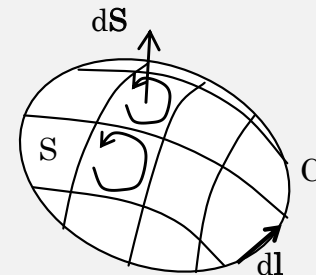
ストークスの定理を使って

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



ストークスの定理



$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

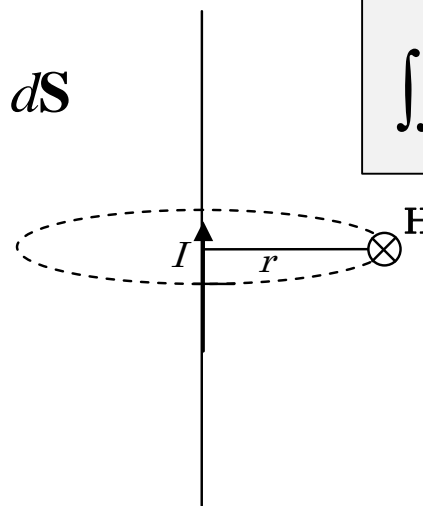
アンペアの法則

$$H = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow 2\pi r H = I \Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理を使って

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$$



電磁界は空間全体に分布する

マクスウェルの方程式

微分形

積分形

ファラデーの法則

アンペアの法則

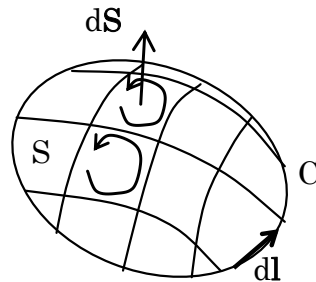
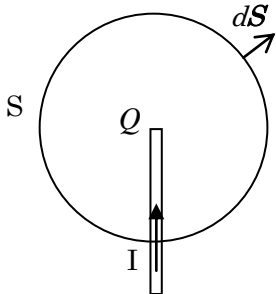
$$\left(\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{変位電流} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV \quad \text{変位電流} \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{cases}$$

電流連続の式:

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$



構成(媒質)方程式

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$$

電束密度 \rightarrow 誘電率 \rightarrow 電界
 磁束密度 \rightarrow 透磁率 \rightarrow 磁界

James Clerk Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field,"
 Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.

導波路モードの解析

付録

マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla_t = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\nabla = \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \hat{z}E_z$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \hat{z}H_z$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu\hat{z}H_z & \text{(A)} \\ \nabla_t \times (\hat{z}E_z) - \gamma(\hat{z} \times \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu\mathbf{H}_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon\hat{z}E_z & \text{(B)} \\ \nabla_t \times (\hat{z}H_z) - \gamma(\hat{z} \times \mathbf{H}_t) = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_t \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \implies (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \times (\mathbf{E}_t + \hat{z}E_z) = -j\omega\mu(\mathbf{H}_t + \hat{z}H_z)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \implies (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \times (\mathbf{H}_t + \hat{z}H_z) = j\omega\varepsilon(\mathbf{E}_t + \hat{z}E_z)$$

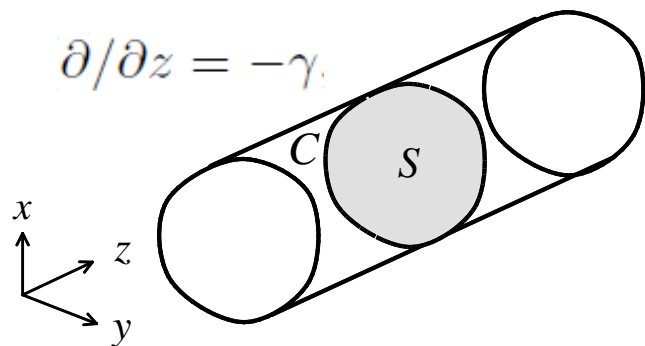
$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \cdot (\mathbf{E}_t + \hat{z}E_z) = 0 \\ (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \cdot (\mathbf{H}_t + \hat{z}H_z) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = \gamma E_z \\ \nabla_t \cdot \mathbf{H}_t = \gamma H_z \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \hat{z} \times & \hat{z} \times \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{E}_t, E_z, \mathbf{H}_t \text{ and } H_z & \end{matrix} \begin{cases} \nabla \times (\mathbf{V}\mathbf{A}) = \nabla\mathbf{V} \times \mathbf{A} + \mathbf{V}\nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \end{cases}$$

$$\text{(C)} \begin{cases} \nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t = -j\omega\mu(\hat{z} \times \mathbf{H}_t) & \text{(A)の下} \\ \nabla_t H_z + \gamma \mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon(\hat{z} \times \mathbf{E}_t) & \text{(B)の下} \end{cases}$$

$\nabla_t \cdot$ (一様媒質でしか下の変形は通用しない)

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + \gamma(\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu\nabla_t \cdot (\hat{z} \times \mathbf{H}_t) \\ \nabla_t^2 H_z + \gamma(\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t) = j\omega\varepsilon\nabla_t \cdot (\hat{z} \times \mathbf{E}_t) \end{cases}$$



$$\downarrow \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + \gamma^2 E_z = j\omega\mu \hat{z} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{H}_t) & \hat{z} \cdot (\mathbf{A}) \text{の下} \\ \nabla_t^2 H_z + \gamma^2 H_z = -j\omega\varepsilon \hat{z} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) & \hat{z} \cdot (\mathbf{B}) \text{の下} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + \gamma^2 E_z = -\omega^2 \mu \varepsilon E_z \\ \nabla_t^2 H_z + \gamma^2 H_z = -\omega^2 \mu \varepsilon H_z \end{cases}$$

カットオフ(遮断)波数

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

$$(k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon})$$



$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) E_z = 0 \\ \nabla_t^2 H_z + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) H_z = 0 \end{cases}$$

E_z, H_z は独立にヘルムホルツの方程式を満たす

$\hat{z} \times (\mathbf{C})$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\begin{cases} \hat{z} \times \nabla_t E_z + \gamma (\hat{z} \times \mathbf{E}_t) = j\omega\mu \mathbf{H}_t \\ \hat{z} \times \nabla_t H_z + \gamma (\hat{z} \times \mathbf{H}_t) = -j\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \end{cases}$$



(C)を使う

$$\begin{cases} \hat{z} \times \nabla_t E_z + \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} (\nabla_t H_z + \gamma \mathbf{H}_t) = j\omega\mu \mathbf{H}_t \\ \hat{z} \times \nabla_t H_z - \frac{\gamma}{j\omega\mu} (\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) = -j\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} j\omega\epsilon\hat{z} \times \nabla_t E_z + \gamma\nabla_t H_z = -(\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon)\mathbf{H}_t \\ j\omega\mu\hat{z} \times \nabla_t H_z - \gamma\nabla_t E_z = (\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon)\mathbf{E}_t \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbf{H}_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} (-j\omega\epsilon\hat{z} \times \nabla_t E_z - \gamma\nabla_t H_z) \\ \mathbf{E}_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} (j\omega\mu\hat{z} \times \nabla_t H_z - \gamma\nabla_t E_z) \end{cases}$$

TEM波, TE波, TM波の分類

E_z	H_z	
0	0	TEM(Transverse electric and magnetic)波
0	Exist	TE(Transverse electric)波, H波
Exist	0	TM(Transverse magnetic)波, E波
Exist	Exist	ハイブリッド波

$$\begin{cases} H_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} (-j\omega \epsilon \hat{z} \times \nabla_t E_z - \gamma \nabla_t H_z) \\ E_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} (j\omega \mu \hat{z} \times \nabla_t H_z - \gamma \nabla_t E_z) \end{cases}$$

ヘルツ・ベクトルによる表現

ヘルツ・ベクトルはヘルツが微小ダイポールの放射界の計算で初めて導入し、導波管解析にも便利なのでよく用いられる。

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{\Pi}_h \quad \text{磁気型ヘルツベクトル}$$

$$\mathbf{A} = j\omega\mu\epsilon\mathbf{\Pi}_e$$

$$\mathbf{H} = j\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{\Pi}_e \quad \text{電気型ヘルツベクトル}$$

$$\mathbf{F} = j\omega\mu\epsilon\mathbf{\Pi}_h$$

導波路の電磁界は導波管軸成分しか持たない次のヘルツベクトルで表現可能である。

$$\mathbf{\Pi}_h = \hat{z}\psi_h$$

$$\nabla_t^2 \psi_h + k_c^2 \psi_h = 0$$

$$\mathbf{\Pi}_e = \hat{z}\psi_e$$

$$\nabla_t^2 \psi_e + k_c^2 \psi_e = 0$$

$$\mathbf{E} = -\hat{z}\nabla_t^2 \psi_e - \gamma\nabla_t \psi_e + j\omega\mu\hat{z} \times \nabla_t \psi_h$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\epsilon\hat{z} \times \nabla_t \psi_e - \hat{z}\nabla_t^2 \psi_h - \gamma\nabla_t \psi_h$$

$$\psi_h = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} H_z$$

$$\psi_e = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} E_z$$

これはEz, Hzによる表現と等価

$$\nabla_t = \hat{x}(\partial/\partial x) + \hat{y}(\partial/\partial y)$$

$$\nabla_t = \hat{\rho}(\partial/\partial\rho) + \hat{\phi}(1/\rho)(\partial/\partial\phi)$$

モード関数の求め方

TEモード(H波)

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0$$

TMモード(E波)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$$

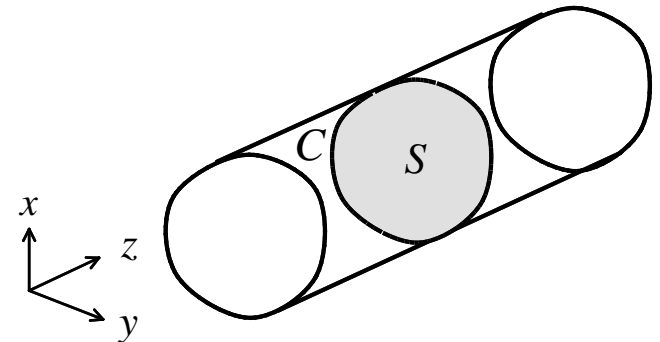
断面の境界値問題を解く。固有値問題なので、無数の固有値(k_c^2)と固有ベクトル(固有関数)の組み合わせが得られる。

H_z または E_z が得られれば、それに対応して伝搬する電磁波の分布(モード)も決定される(励振状態を決定していないので振幅・位相には任意性がある)。

$$\begin{cases} H_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} (-j\omega \epsilon \hat{z} \times \nabla_t E_z - \gamma \nabla_t H_z) \\ E_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} (j\omega \mu \hat{z} \times \nabla_t H_z - \gamma \nabla_t E_z) \end{cases}$$

さらに、固有値問題で k_c 、つまり、そのモードのカットオフ波数も決定されている。⇒周波数がどの程度になると伝搬するかがわかる。

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$



モード関数の表現

導波路内の電磁界はモードの和で表現できる

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \sum_u \left(A_u \mathbf{E}_u^{(+)} + B_u \mathbf{E}_u^{(-)} \right) \\ \mathbf{H} = \sum_u \left(A_u \mathbf{H}_u^{(+)} + B_u \mathbf{H}_u^{(-)} \right) \end{cases}$$

u : モードの番号 (TEM, TE_{mn}, TM_{mn})

$$\begin{cases} \mathbf{E}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{tu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z) \\ \mathbf{H}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \{ \pm \mathbf{h}_{tu}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_{lu}(\mathbf{r}) \} \exp(\mp \gamma_u z) \end{cases}$$

t : transversal (断面方向) ... xy 成分
 l : longitudinal (軸方向) ... z 成分

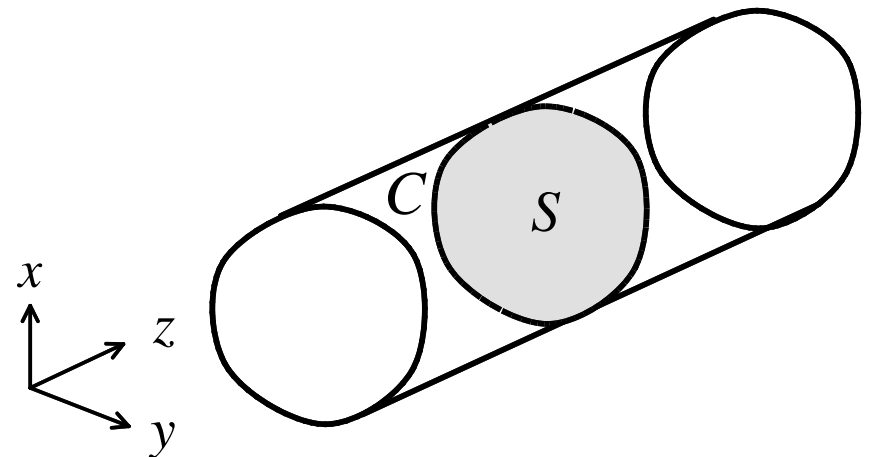
モード関数は導波路問題の固有値問題を解いて得られる。つまり、非励振の問題の解である。モード解析によって、モードの分布とそのモードの伝搬定数が得られる。

モード関数の直交性

$$\iint_S \left(\mathbf{E}_u^{(\pm)} \times \mathbf{H}_v^{(+)} \right) \cdot d\mathbf{S} = +\delta_{uv} e^{(\mp \gamma_u - \gamma_v)z}$$

$$\iint_S \left(\mathbf{E}_u^{(\pm)} \times \mathbf{H}_v^{(-)} \right) \cdot d\mathbf{S} = -\delta_{uv} e^{(\mp \gamma_u + \gamma_v)z}$$

$$\delta_{uv} = 1 (u = v), 0 (u \neq v)$$

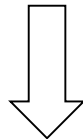


伝搬定数(減衰定数、位相定数)

±z方向に進むモードuの正規化電界モード関数

$$\mathbf{E}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{tu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z)$$

$$\begin{aligned} \exp(-\gamma z) &= \exp(-(\alpha + j\beta)z) \\ &= \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z) \end{aligned}$$



瞬時値表現

$$\text{Re}[\exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z) \exp(j\omega t)]$$

$$= \text{Re}[\exp(-\alpha z) \exp(-j(\beta z - \omega t))]$$

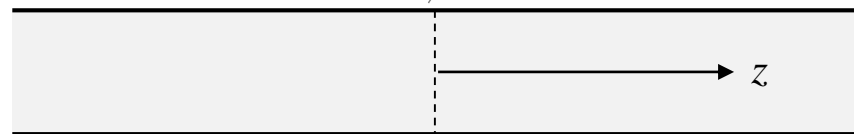
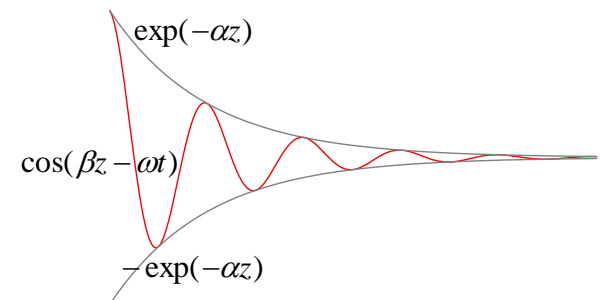
$$= \text{Re}[\exp(-\alpha z) \{ \cos(\beta z - \omega t) - j \sin(\beta z - \omega t) \}]$$

$$= \exp(-\alpha z) \cos(\beta z - \omega t)$$

伝搬定数: $\gamma = \alpha + j\beta$

減衰定数
位相定数

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \quad k^2$$

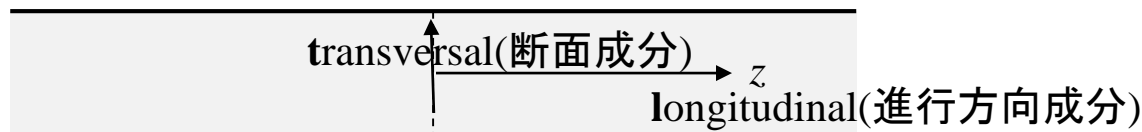


TEモード(H波)

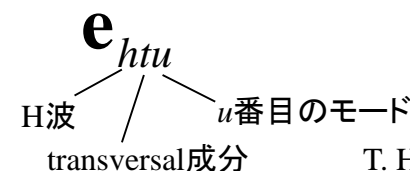
電界の正規化モード関数 磁界の正規化モード関数	$\mathbf{E}_{hu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{htu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z)$ $\mathbf{H}_{hu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \{\pm \mathbf{h}_{htu}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_{hlu}(\mathbf{r})\} \exp(\mp \gamma_u z)$
断面成分	$\mathbf{h}_{htu}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k_{cu}} \sqrt{Y_{hu}} \nabla_t \psi_{hu}(\mathbf{r})$ $\mathbf{e}_{htu}(\mathbf{r}) = -Z_{hu} \hat{z} \times \mathbf{h}_{htu}(\mathbf{r})$
管軸成分	$\mathbf{h}_{hlu}(\mathbf{r}) = \hat{z} \frac{k_{cu}}{\gamma_u} \sqrt{Y_{hu}} \psi_{hu}(\mathbf{r})$
ヘルツ・ポテンシャル カットオフ波数 伝搬定数 特性インピーダンス 管内波長	$\psi_{hu}(\mathbf{r}): \text{断面構造で決まる(固有関数)}$ $k_{cu}: \text{断面構造で決まる(固有値)}$ $\gamma_u^2 = k_{cu}^2 - \mu_r \varepsilon_r k_0^2$ $Z_{hu} = \frac{1}{Y_{hu}} = \frac{j\mu_r k_0 \eta_0}{\gamma_u}$ $\lambda_g = 2\pi / \beta_u, \quad \beta_u = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r k_0^2 - k_{cu}^2}$

TMモード(E波)

電界の正規化モード関数 磁界の正規化モード関数	$\mathbf{E}_{eu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \{\mathbf{e}_{etu}(\mathbf{r}) \pm \mathbf{e}_{elu}(\mathbf{r})\} \exp(\mp \gamma_u z)$ $\mathbf{H}_{eu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \pm \mathbf{h}_{etu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z)$
断面成分	$\mathbf{e}_{etu}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k_{cu}} \sqrt{Z_{eu}} \nabla_t \psi_{eu}(\mathbf{r})$ $\mathbf{h}_{etu}(\mathbf{r}) = Y_{eu} \hat{z} \times \mathbf{e}_{etu}(\mathbf{r})$
管軸成分	$\mathbf{e}_{elu}(\mathbf{r}) = \hat{z} \frac{k_{cu}}{\gamma_u} \sqrt{Z_{eu}} \psi_{eu}(\mathbf{r})$
ヘルツ・ポテンシャル カットオフ波数 伝搬定数 特性インピーダンス 管内波長	$\psi_{eu}(\mathbf{r}): \text{断面構造で決まる(固有関数)}$ $k_{cu}^2: \text{断面構造で決まる(固有値)}$ $\gamma_u^2 = k_{cu}^2 - \mu_r \varepsilon_r k_0^2$ $Z_{eu} = \frac{1}{Y_{eu}} = \frac{\gamma_u \eta_0}{j\varepsilon_r k_0}$ $\lambda_g = 2\pi / \beta_u, \quad \beta_u = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r k_0^2 - k_{cu}^2}$



インデックスの意味



速度(位相速度と群速度)

位相速度

$$v_{pu} = \frac{\omega}{\beta_u} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_{cu}^2}}$$

エネルギー伝送速度

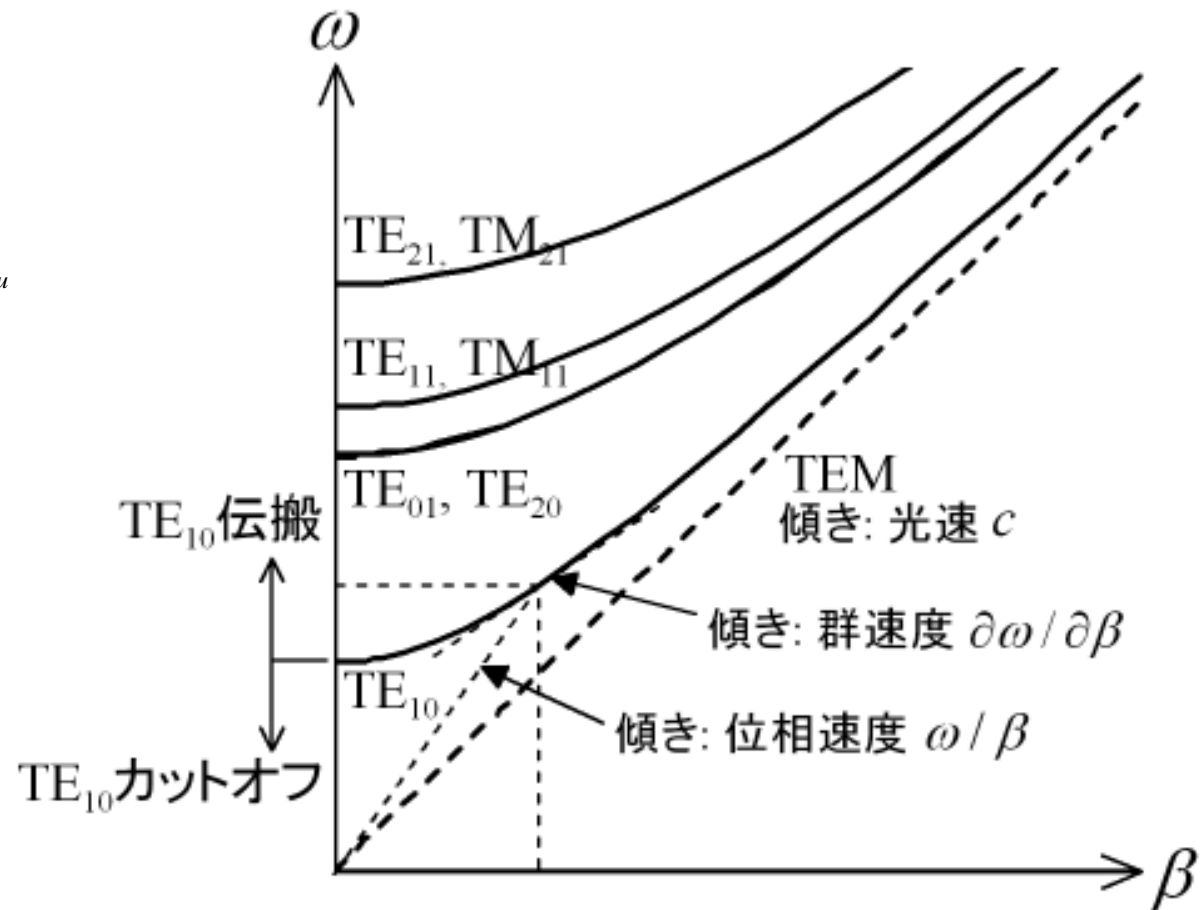
$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon |\mathbf{E}_u|^2 dv + \frac{1}{2} \iiint_V \mu |\mathbf{H}_u|^2 dv$$

$$v_{eu} = \frac{P}{W}$$

群速度

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}$$

$$v_p v_g = c^2$$



伝送電力

電力

$$P = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S}\right]$$

$$P = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \iint_S \left(\sum_u A_u \mathbf{E}_{tu}^{(+)}\right) \times \left(-\sum_u A_u^* \mathbf{H}_{tu}^{(-)}\right) \cdot d\mathbf{S}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_u |A_u|^2 \quad [\text{W}]$$

直交性

