基礎
～ マクスウェルの方程式 ～

微分形

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

積分形

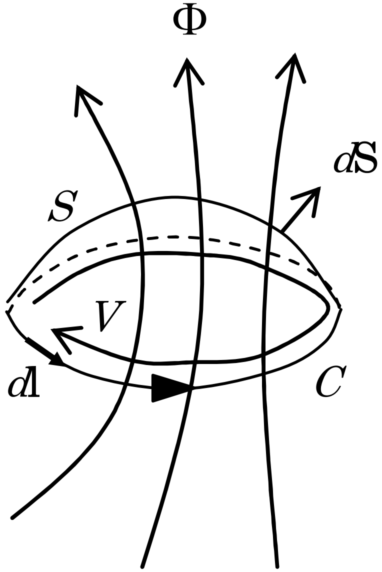
$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \dfrac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$$

電磁気学の知識からマクスウェルの方程式を導く

ファラデーの法則

ファラデー：近接作用、界の概念を提唱

$$V=-\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

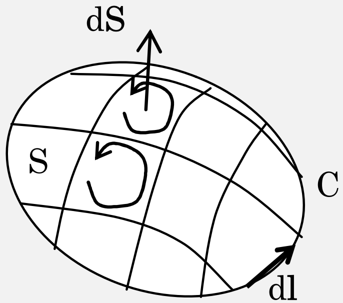


ストークスの定理を使って

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}}$$

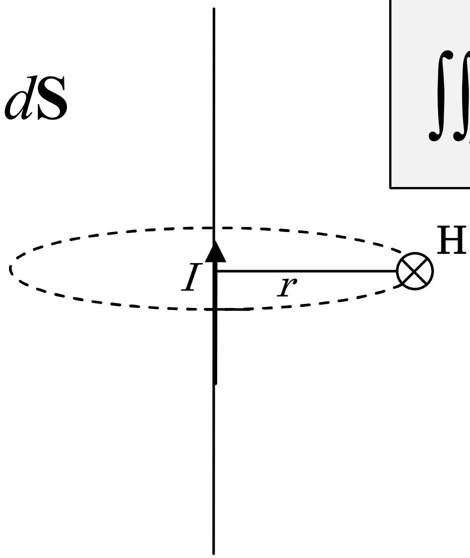
ストークスの定理



$$\iint_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

アンペアの法則

$$H=\frac{I}{2\pi r} \Rightarrow 2\pi r H = I \Rightarrow \oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\iint_S \mathbf{i}\cdot d\mathbf{S}$$



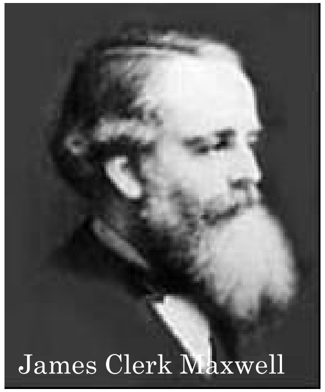
ストークスの定理を使って

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{i}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{i}}$$

電磁界は空間全体に分布する

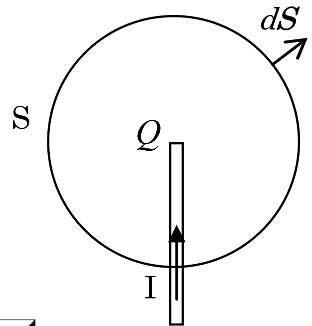
マクスウェルの方程式

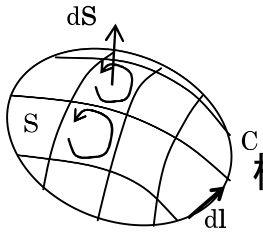


アンペアの法則は無限長電流から導いた不完全なものであった。これが有限長の電流でも成り立つように、電荷保存則（電流連続の式）を組み込んで完成させた。具体的には変位電流をアンペアの法則に組んで修正する。電流連続の式は修正されたアンペアの法則のdivを取ると導かれる。

電流連続の式:

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$





構成（媒質）方程式

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$$

電束密度、誘電率、電界

磁束密度、透磁率、磁界

	微分形	積分形
ファラデーの法則	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
アンペアの法則	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}$
	変位電流	変位電流
	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

解いてみると

この方程式でマクロな電磁気、電磁波現象の全てが記述可能
（媒質条件、励振条件、境界条件は与える）

① 波になる

$$\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \cdots$$

「電磁波」と名付けた

②速度は光速と一致

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = 2.998 \times 10^8 \ [m/\mathrm{sec}]$$

光は電磁波の一部と考えられる

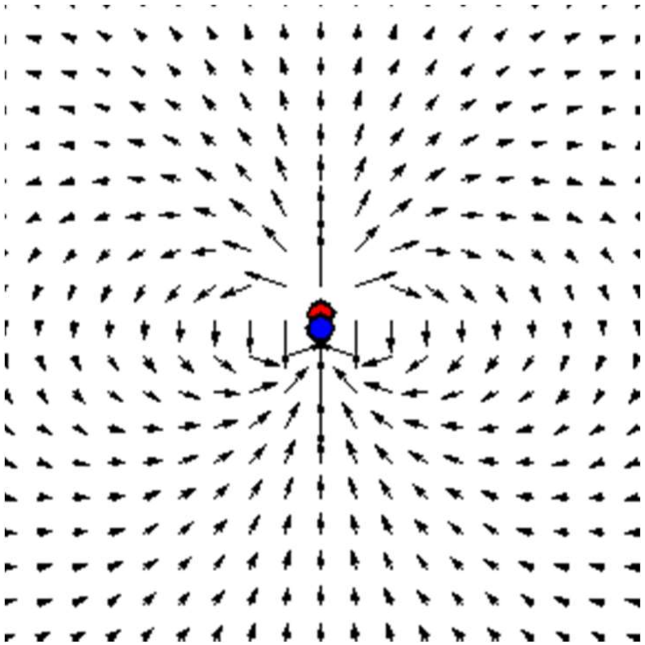
James Clerk Maxwell, “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field,” Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.

振動する電気双極子、電磁波の予言

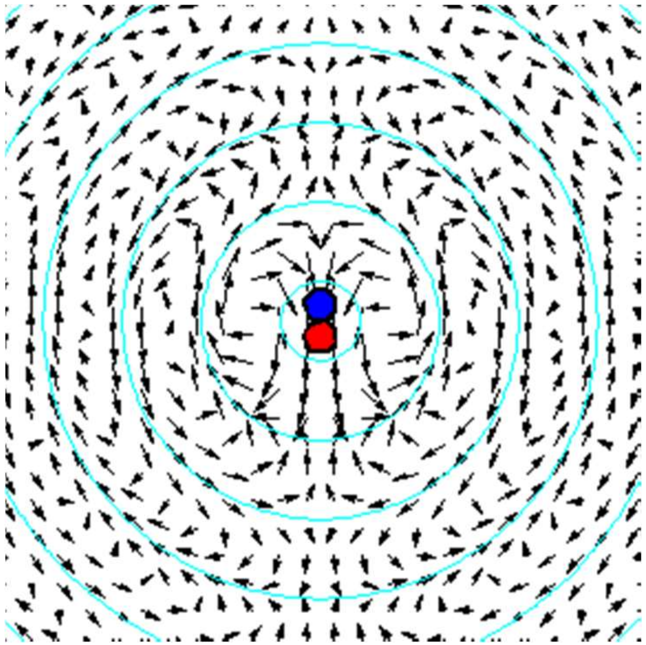
変位電流なし

変位電流あり

電界



伝搬速度が無限大の場合



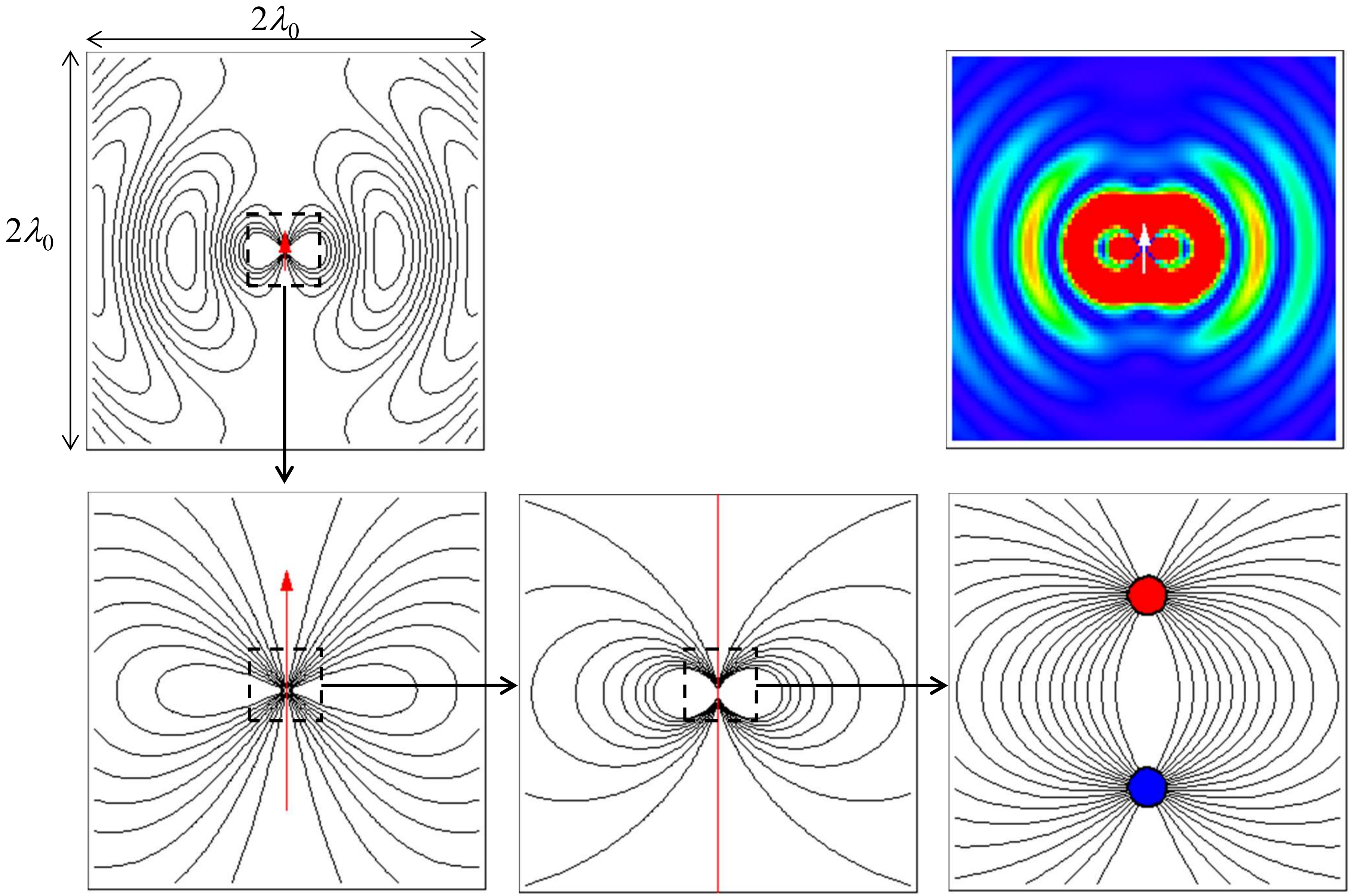
伝搬速度が有限の場合

このように飛んでいく電界(と磁界)が「電磁波」

時間的に変化する電流(加速運動する電荷)は電磁波を放射する

1864年、イギリス人のマクスウェルは時間的に変化する電流(加速する電荷)について思考実験し、電磁波の存在を予言した(電気現象と磁気現象がリンクする。矛盾も解決)。しかもその式を解くと速度は光速と一致するので、光は電磁波であると予言した。

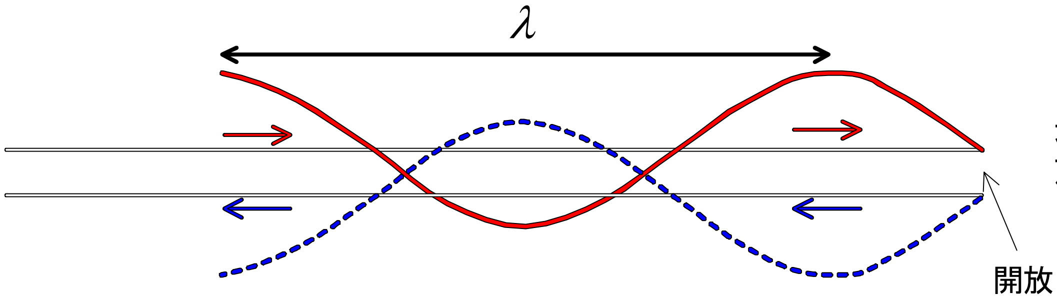
微小ダイポールの放射界



振動電荷

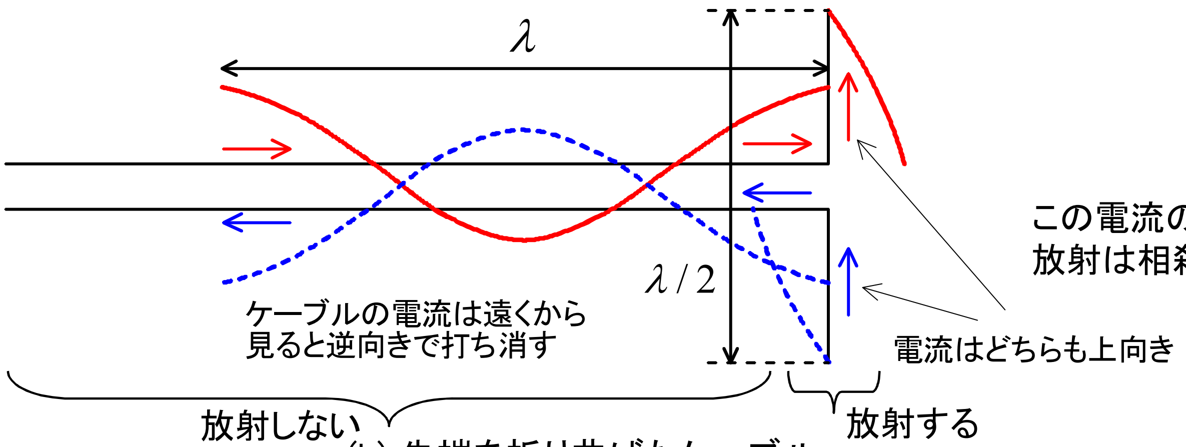
波長に比して微小な領域(電磁界の変化が構造全体に同位相で印加されると見なせる程度の大きさ)を考えるならば静電界・静磁界近似で十分

ダイポールアンテナの動作原理



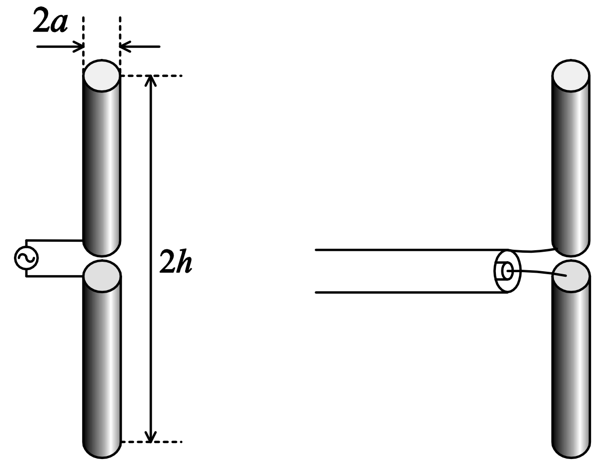
逆方向の電流で、
放射は相殺される

(a) 先端開放のケーブル

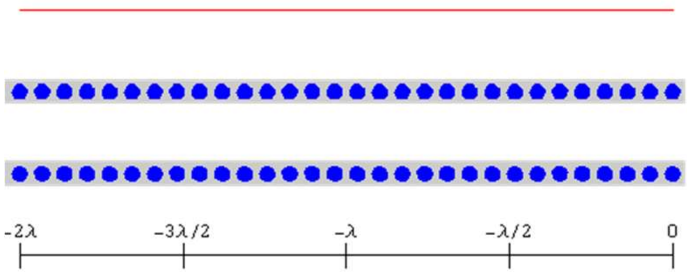


この電流の、
放射は相殺されない

(b) 先端を折り曲げたケーブル

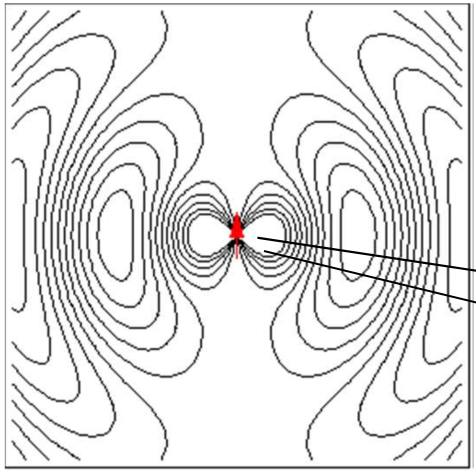


(a) ダイポールアンテナ　(b) 同軸ケーブルによる給電

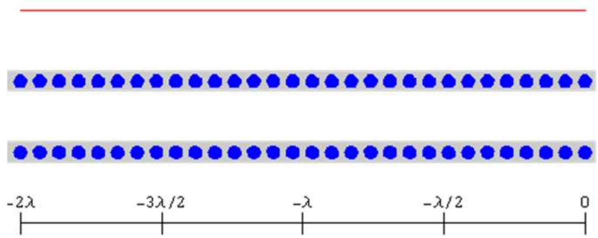


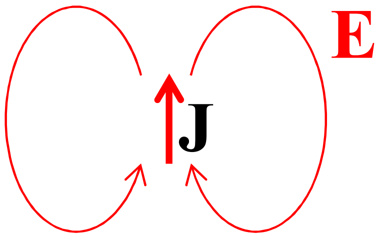
- 交流電流があれば、普通は放射する。(物理現象)
- 電線から電波が放射しにくいのは打ち消すから。
- 電流が波長に比して短いと放射効率は悪い。

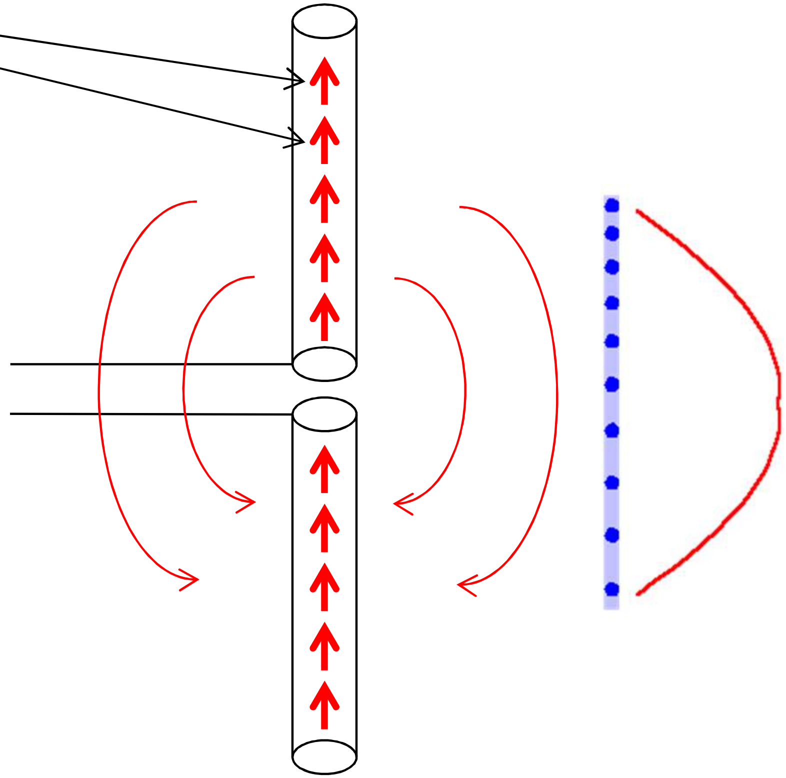
線路とアンテナの違い（参考）

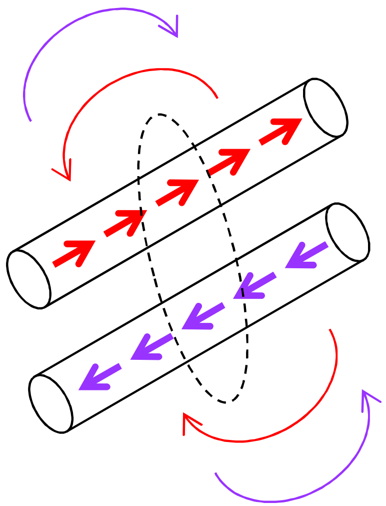


任意の電流分布は微小電流素（微小ダイポール）の和と考えると理解しやすい。









アンテナ

放射は打消し合わない

線路

放射は打消しあう

マクスウェルの方程式と電磁界シミュレータの役割

マクスウェルの方程式

ファラデーの法則　アンペアの法則

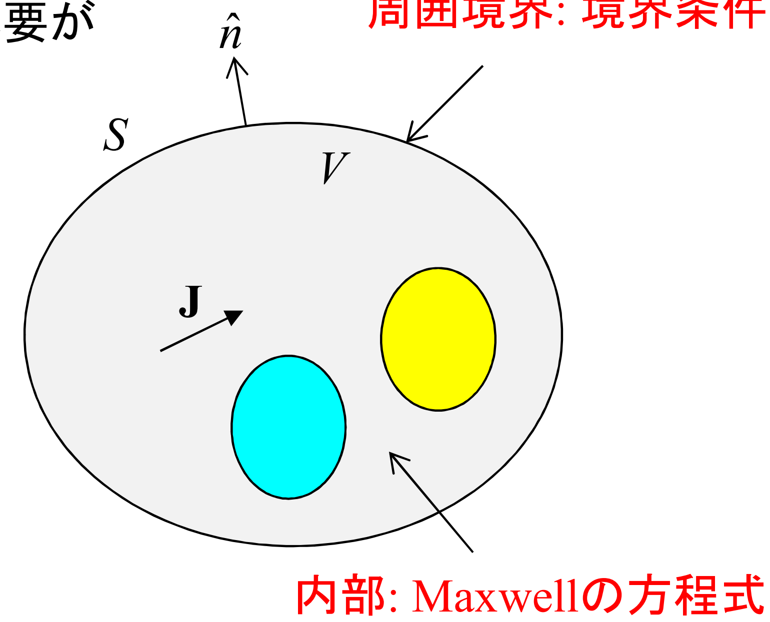
$$
\begin{cases}
\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{(ファラデーの法則)} \\[2ex]
\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{(アンペアの法則)}
\end{cases}
$$

電磁界シミュレータの目的は、上のマクスウェルの方程式を速く、精度良く、なるべく一般の構造を解くこと。境界条件を指定する必要がある(→微分方程式論の境界値問題)。

解くために必要な条件(解析の前準備)

1. 構造および媒質(ε, μ, σ)
2. 境界条件
3. 励振波源

上をまとめて「解析モデル」と呼ぶ



静電界/静磁界/準静電界/準静磁界

マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \boxed{-\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} & \text{(ファラデーの法則)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \boxed{\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} & \text{(アンペアの法則)} \end{cases}$$

逆起電力

変位電流

$\dfrac{\partial}{\partial t} \simeq 0$ 準静電界

変位電流は無視できない (ε: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

時間変化なし $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

静電界／静磁界

独立
$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{(静電界)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} & \text{(静磁界)} \end{cases}$$

$V = -\int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ (Voltage)

$I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ (Current)

$\dfrac{\partial}{\partial t} \simeq 0$ 準静磁界

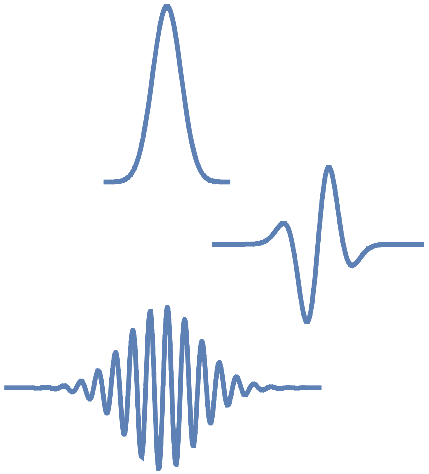
逆起電力は無視できない(μ: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \end{cases}$$

コイル・モーター等の解析

時間領域と周波数領域

時間領域



マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

境界値問題(空間)
＋初期値問題(時間)

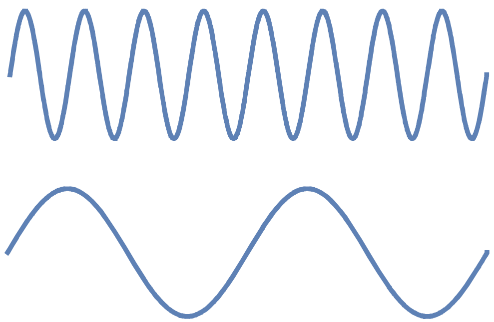
FDTD

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

調和振動

フーリエ変換

周波数領域



$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

境界値問題(空間)

MoM, FEM, FDFD

波動方程式(EまたはHのみの式)

マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E}+j\omega\mu\mathbf{H}=0 \\ \nabla\times\mathbf{H}-j\omega\varepsilon\mathbf{E}=\mathbf{J} \end{cases}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}+j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H}=0$$

場所の関数

$$\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}+j\omega\mu_0\mathbf{H}=0$$

$\nabla\times$

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)+j\omega\mu_0\nabla\times\mathbf{H}=0$$

$\nabla\times\mathbf{H}$ を消去

$$-\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-j\omega\varepsilon\mathbf{E}=\mathbf{J}$$

Hを消去して**E**の方程式を導く

ヘルムホルツの波動方程式

（有限要素法の基礎方程式）

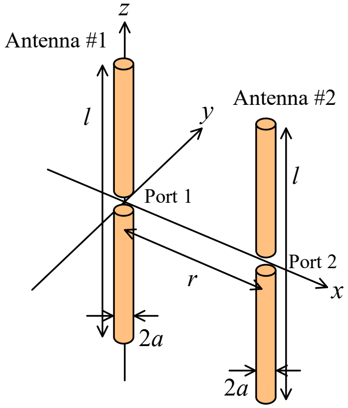
$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}=-jk_0\eta_0\mathbf{J}$$

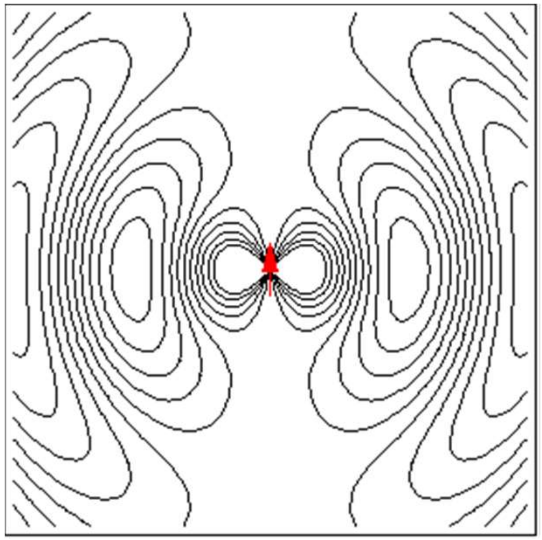
同様に、**E**を消去して**H**の方程式を導くこともできる

励振問題と非励振問題

励振波源あり　行列方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0^{\ 2}\varepsilon_r\mathbf{E}=-jk_0\eta_0\mathbf{J}$$



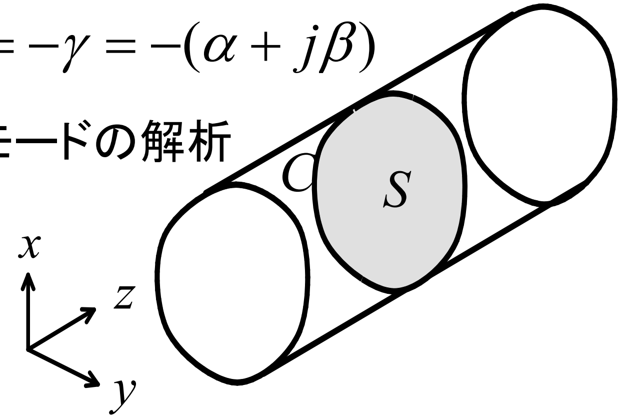


励振波源なし　固有値問題 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$

$$\partial/\partial z=-\gamma=-(\alpha+j\beta)$$

導波路, モードの解析

2-D

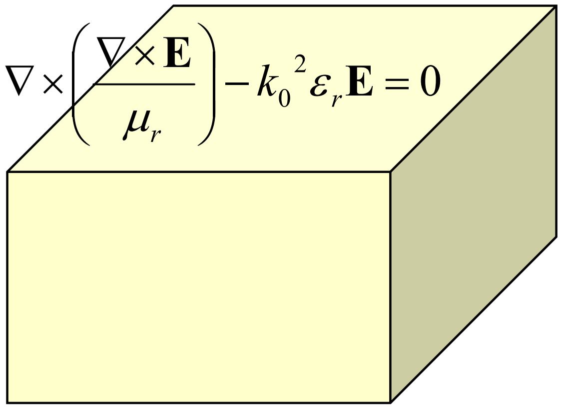


$$\nabla_t\times\left(\frac{\nabla_t\times\mathbf{E}_t}{\mu_r}\right)-\left(k_0^{\ 2}\varepsilon_r+\Gamma\right)\mathbf{E}_t=0$$

共振器

3-D

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0^{\ 2}\varepsilon_r\mathbf{E}=0$$



どの周波数でどのような形で共振するのか?

(2) シミュレーションのための数値計算手法

- 微分と差分(微分方程式の初期値問題と境界値問題)
- 陰解法と陽解法
- 積分と区分求積（数値積分）

初期値問題（例1）

次の微分方程式（バクテリアの増殖, ロジスティック式, 初期値問題）を数値計算（中央差分 $\Delta t = 0.1$ ）で解き、厳密解と比較しなさい。

$$\frac{df(t)}{dt} = af(t)$$

ただし、$a = 2, f(0) = 1$ である。

$0 \leq t \leq 10$ のグラフを描きなさい。

解）

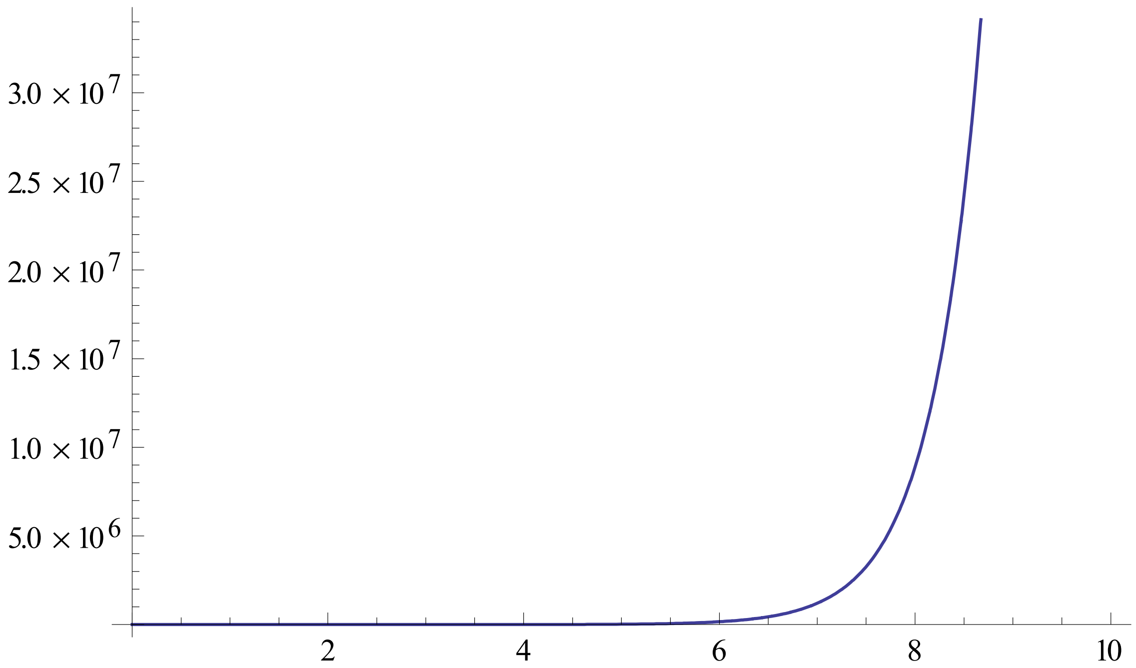
$$f'(t) = af(t)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = a$$

$$\ln f(t) = at + C$$

$$f(t) = \exp(at + C)$$

$$f(t) = \exp(2t)$$



境界値問題(例2)

次の微分方程式（1次ラプラスの方程式, 境界値問題）を数値計算（中央差分, Δx=1）で解き、厳密解と比較しなさい。

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 0$$

ただし、$\phi(0)=0, \phi(3)=10$ である。

$0 \le x \le 3$ のグラフを描きなさい。

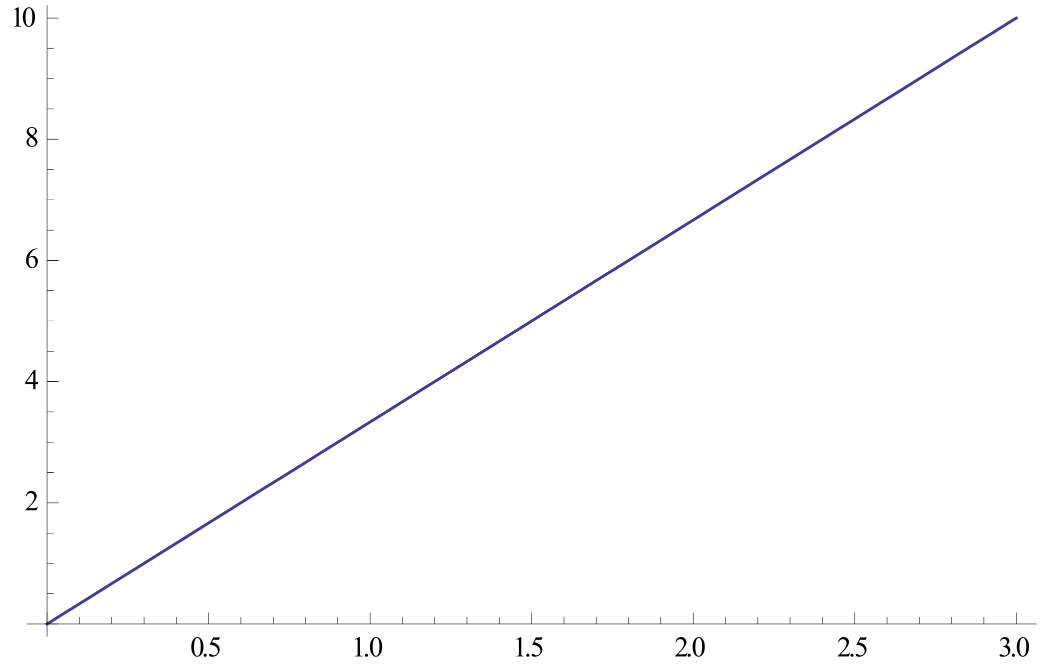
解）$$\frac{d\phi(x)}{dx} = C_1$$

$$\phi(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} \phi(0) = C_2 = 0 \\ \phi(10) = 3C_1 + C_2 = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 10/3, C_2 = 0$$

$$\phi(x) = (10/3)x$$



差分 (Finite Difference)

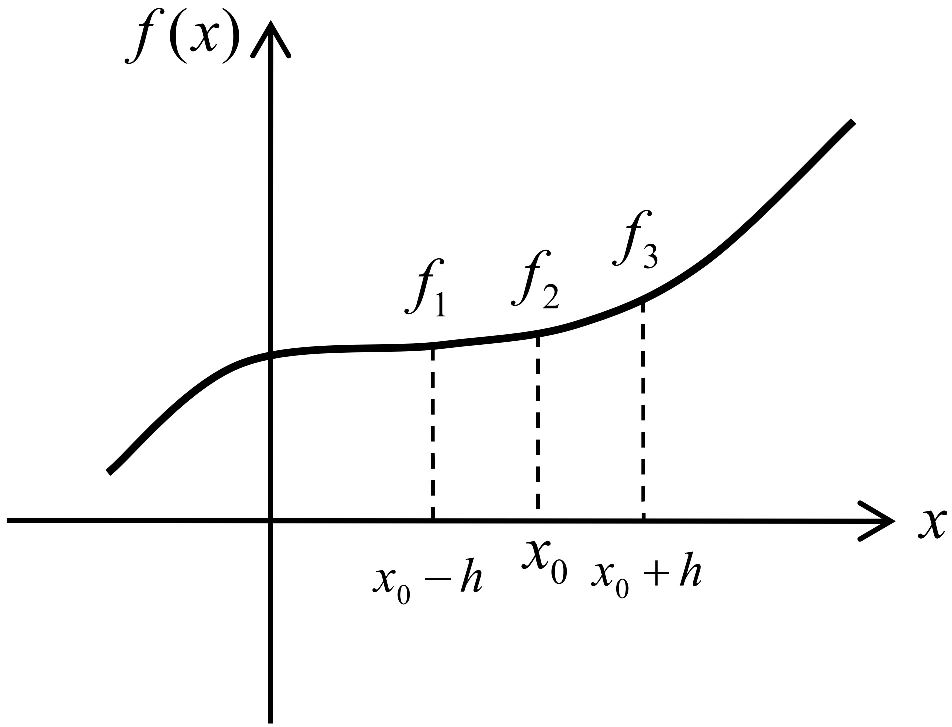
微分(derivative, differentiation)

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

差分 (difference, finite difference)

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

差分には主に次の3種類がある。これら3種類の中では中央差分が精度が一番高い。前進・後進差分はhの1次の精度、中央差分はhの2次の精度である。



$$\left\{ \begin{aligned} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} &\approx \frac{f_3 - f_2}{h} && \text{(前進差分)} \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} &\approx \frac{f_2 - f_1}{h} && \text{(後退差分)} \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} &\approx \frac{f_3 - f_1}{2h} && \text{(中央差分)} \end{aligned} \right.$$

差分の精度

前進差分

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+O(h^2)$$ テイラー展開

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+O(h)$$

後退差分

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+O(h^2)$$ テイラー展開

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}+O(h)$$

中央差分

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cancel{\frac{h^2}{2}f''(x_0)}+O(h^3)$$ テイラー展開

$$-)\quad f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\cancel{\frac{h^2}{2}f''(x_0)}+O(h^3)$$ テイラー展開

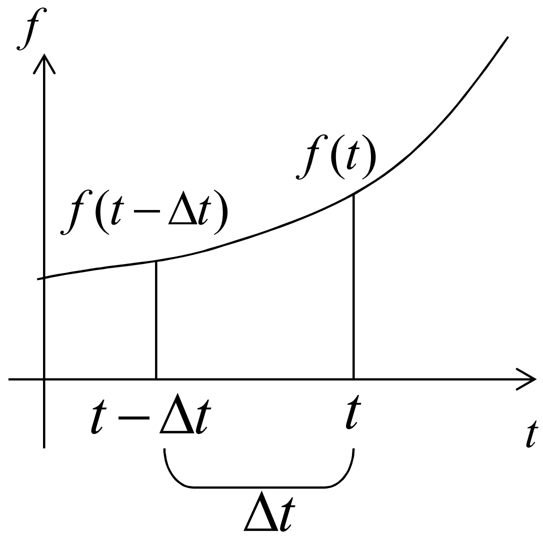
$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=2hf'(x_0)+O(h^3)$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}+O(h^2)$$

初期値問題(例1)の差分法による解法

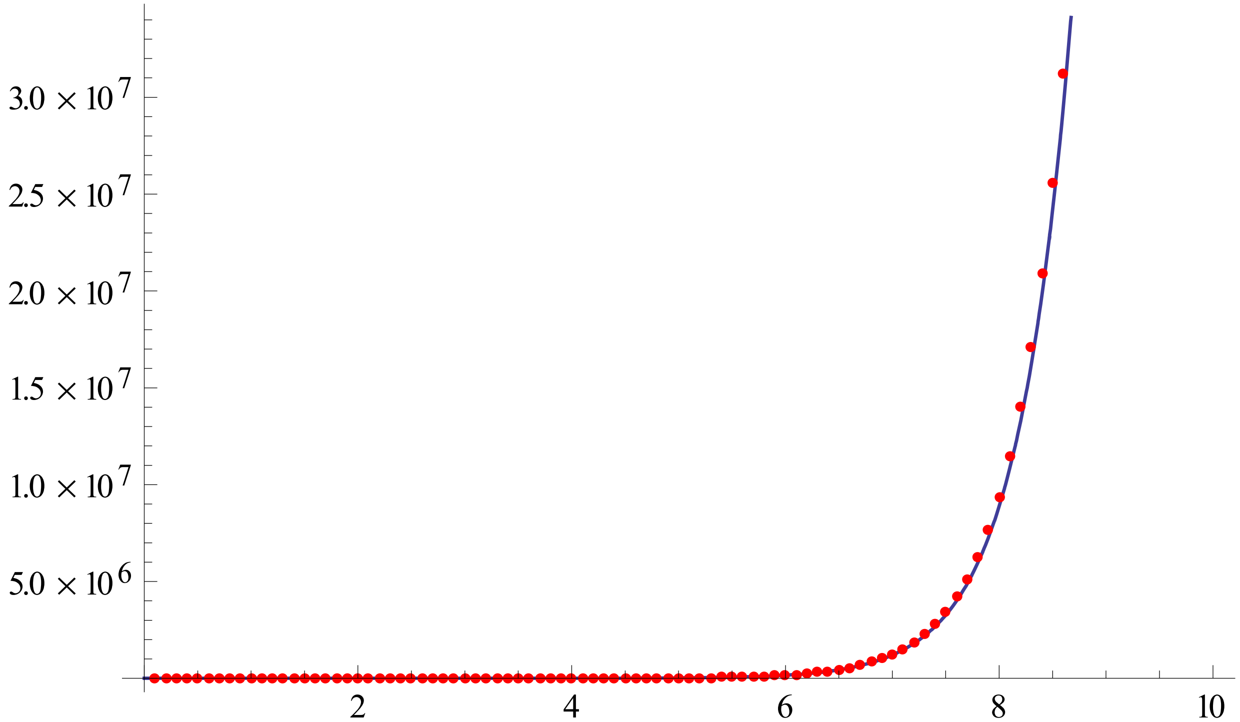
$$\frac{df(t)}{dt} = af(t)$$

$$\frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t} = af(t-\Delta t/2) \cong a\frac{f(t)+f(t-\Delta t)}{2}$$



$f(t)$ について解くと漸化式が完成する。

$$f(t) = \frac{2+a\Delta t}{2-a\Delta t} f(t-\Delta t)$$

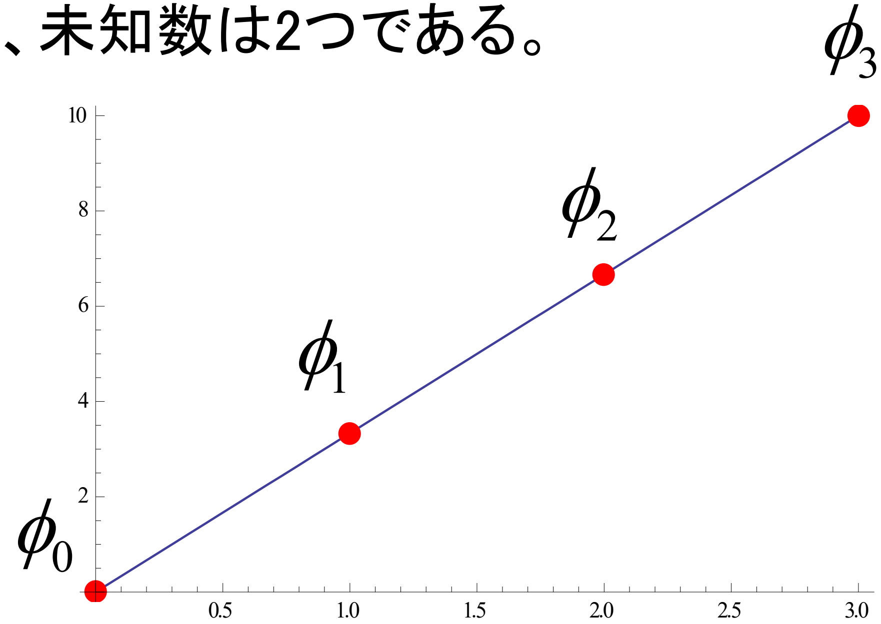


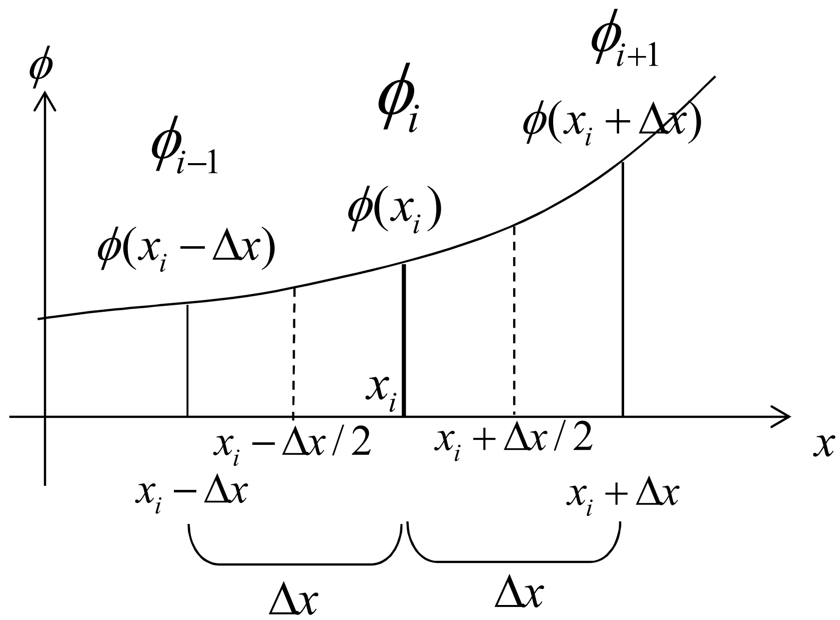
境界値問題(例2)の差分法による解法(1/2)

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=x_i+\Delta x/2} - \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=x_i-\Delta x/2}}{\Delta x} \approx \frac{\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\phi_{i+1}+\phi_{i-1}-2\phi_i}{\Delta x^2} = 0$$

$$\phi_i = \frac{\phi_{i+1}+\phi_{i-1}}{2}$$

として、x=1,2における方程式を立てる。x=0,3は問題により境界条件が与えられているので、未知数は2つである。





境界値問題(例2)の差分法による解法(2/2)

陽解法

行列方程式を解かない方法。反復・繰り返し演算。
不安定（安定条件を満たす必要あり）

$$\phi_0 = 0$$

$$\phi_3 = 10$$

収束するまで繰り返し

```
Do k=1,100
  Do i=1,2
```

$$\phi_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1}}{2}$$

```
  End Do
End Do
```

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_N \\ 1 \end{bmatrix}_{\text{new}} := \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 10 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_N \\ 1 \end{bmatrix}$$

アフィン変換

陰解法

行列方程式を解く方法
安定

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = \dfrac{\phi_2 + \phi_0}{2} \\ \phi_2 = \dfrac{\phi_3 + \phi_1}{2} \\ \phi_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\phi_1 - \phi_2 = 0 \\ -\phi_1 + 2\phi_2 = 10 \end{cases}$$

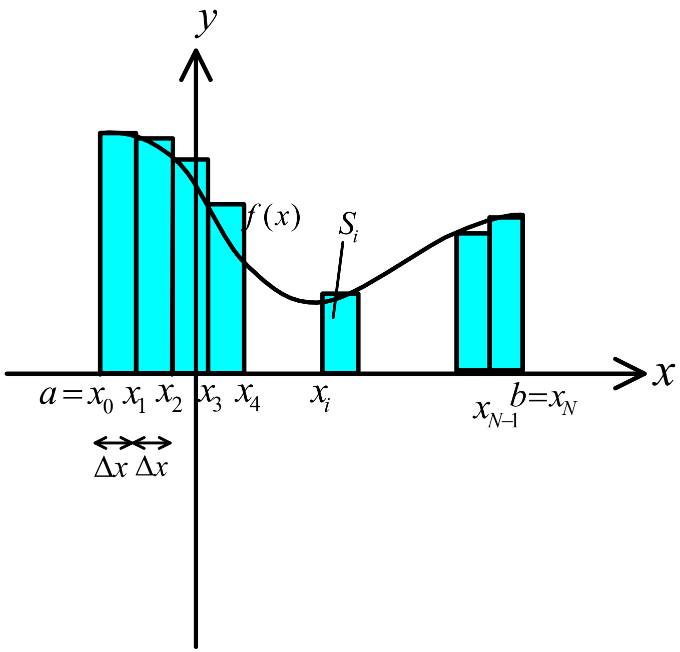
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

対角優位

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 10 \end{bmatrix}$$

行列方程式の直接解法(ガウスの消去法, LU分解, 掃き出し法)ではO(N³)の計算時間がかかる。

数値積分



(a) Riemann's Integral

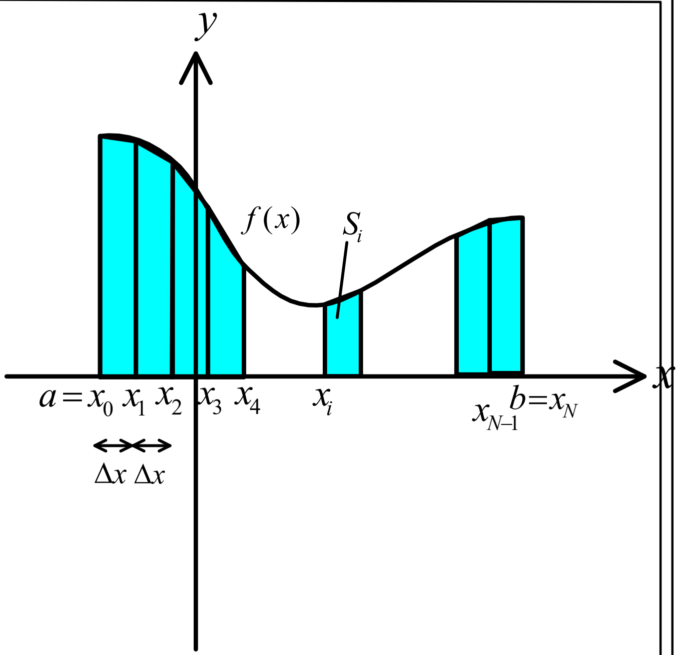
リーマン積分(短冊和)

$$S_i = f(x_i)\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{N-1} S_i = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\Delta x$$

$$\Delta x = (b-a)/N$$

$$x_i = i\,\Delta x$$



(b) Trapezoidal rule

台形公式

$$S_i = \frac{\{f(x_i)+f(x_{i+1})\}\Delta x}{2}$$

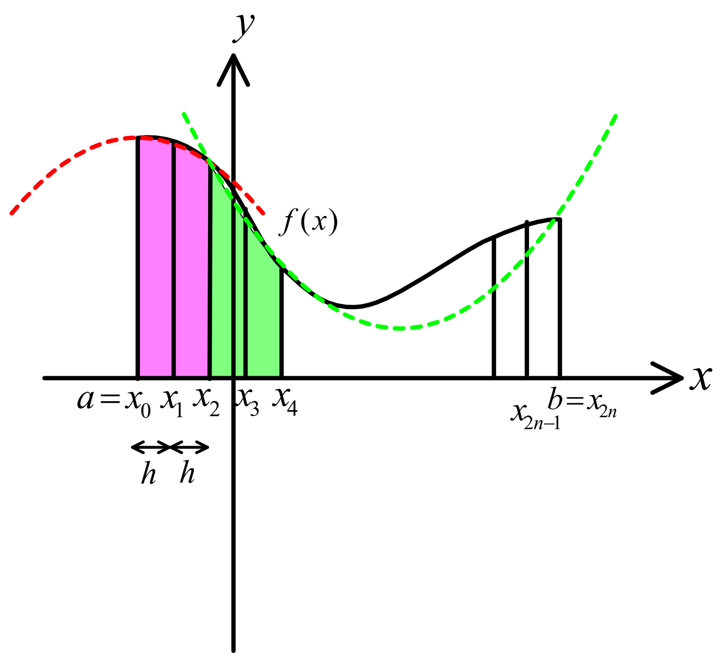
$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{N-1} S_i$$

$$= \frac{\{f(x_0)+f(x_1)\}\Delta x}{2} + \frac{\{f(x_1)+f(x_2)\}\Delta x}{2} + \cdots + \frac{\{f(x_{N-1})+f(x_N)\}\Delta x}{2}$$

$$= \frac{\{f(x_0)+f(x_N)\}\Delta x}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\Delta x$$

$$\Delta x = (b-a)/N$$

$$x_i = i\,\Delta x$$



(c) Simpson's formula

シンプソンの公式

http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/mom/num_diff_int/index-j.html