有限要素法(FEM)

有限要素法 (FEM, Finite Element Method)

歴史

1955-1956 航空

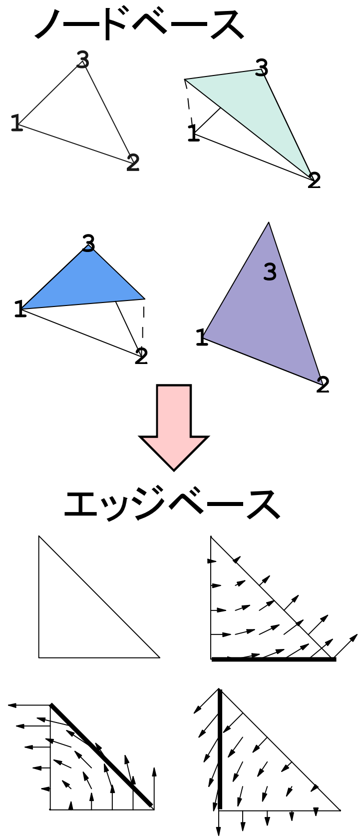
・M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and J. L. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", Journal of Aeronautical Sciences, vol. 23, pp. 805-824, 1956.
・J.H. Argyris, "Energy theorems and structural analysis. Part I general theory," Aircraft Engineering, vol.26, pp.347-356, 1954.

1960 土木・建築

R.W. Clough, "The finite element method in plane stress analysis," 2nd American Society of Civil Engineering (ASCE) Conf. on Electronic Computation, 1960.

1980 電気

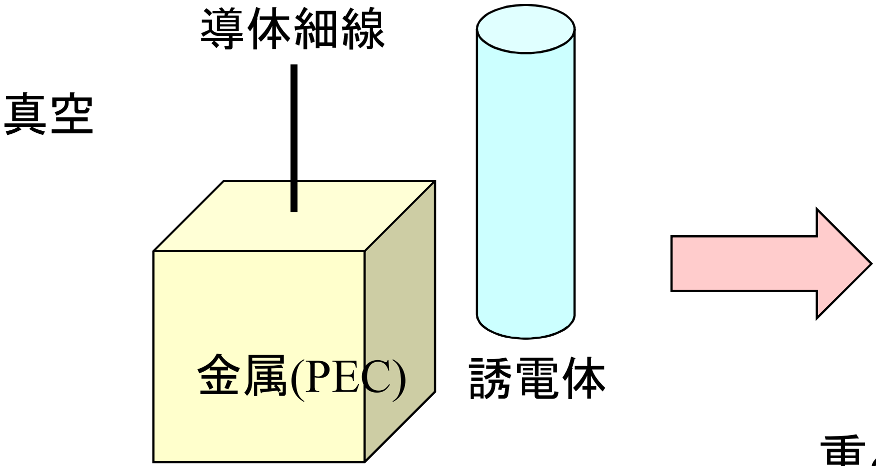
- Z.J. Csendes et al., "Numerical Solution of Dielectric Loaded Waveguides: I-Finite-Element Analysis," IEEE Trans. MTT, vol.18, no.12, pp.1124,1131, Dec. 1970.
- M. V. K. Chari and P. P. Silvester, "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems", John Wiley & Sons, 1980.



電磁波問題への応用はスプリアス（非物理）解の問題(1970)があり、なかなか進まなかった。原因が解明されていき(1984)、ペナルティー法を用いて解決(1984)されたが、エッジ要素(ベクトル基底関数) (1957)の採用により、スプリアス解の問題が自動的に解決(～1980-85)して発展した。

有限要素法の解析手順

(1) 解析モデルを決める



(2) 波動方程式から重み付き残差法で弱形式を導出（昔は変分法）

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}+jk_0\eta_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)=0$$

重み　　**Eの波動方程式**

$$\iiint_\Omega \mathbf{W}\cdot\boxed{\left(\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}+jk_0\eta_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right)}dv=0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形（次のスライド参照）

$$\iiint_\Omega\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{W})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{W}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{W}\cdot\left(jk_0\eta_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right)\right]dv$$

$$-\oiint_{\partial\Omega}\frac{1}{\mu_r}(\hat{n}\times\mathbf{W})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})dS=0$$ **(弱形式)**

この弱形式はEに対する線形方程式なので、MoMと同様に行列方程式を得ればよい。ただし、体積積分があるので基底関数は空間に分布する3-D版を用いる。

ベクトル公式を使った式変形

Eの波動方程式　前のスライドの第1項の式変形

重み

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \boxed{\left(\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + j k_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right)} dv = 0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形

第1項の計算

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left\{ \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \times \mathbf{W} \right\} \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) dv + \oiint_{\partial\Omega} \left\{ \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \times \mathbf{W} \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) dv - \oiint_{\partial\Omega} \left\{ (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{W}) \cdot \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

公式: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \to \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r}, \mathbf{B} \to \mathbf{W}$$

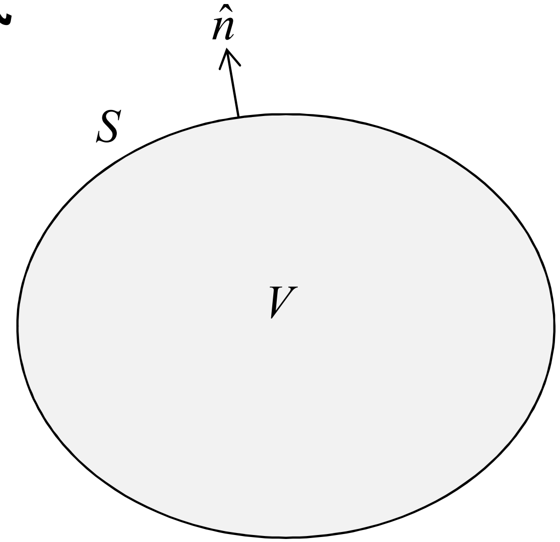
公式: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

$$\mathbf{A} \to \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{B} \to \nabla \times \mathbf{E}, \mathbf{C} \to \mathbf{W}$$

定式化 (1)

マクスウェルの方程式から磁界**H**を消去した波動方程式

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}=\underbrace{-\left[jk_0Z_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_r}\mathbf{M}\right)\right]}_{=\mathbf{f}}$$



$$\underbrace{\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}}_{=\mathbf{R}}+\mathbf{f}=0$$

重み付き残差法　　ベクトル公式を駆使して変形されている

$$\langle\mathbf{R},\mathbf{W}\rangle=\iiint_V\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}\cdot\mathbf{W}\right]dv+\iiint_V\mathbf{W}\cdot\mathbf{f}dv$$

$$+\,jk_0Z_0\underbrace{\oiint_{S_K}\frac{1}{K}(\hat{n}\times\mathbf{E})\cdot(\hat{n}\times\mathbf{W})dS}_{\text{表面インピーダンス}}+\underbrace{\oiint_{S_{PEC}}\left[\mathbf{W}\cdot\left(\hat{n}\times(\nabla\times\mathbf{E})\right)\right]dS}_{\text{完全導体}}$$

→ そして、メッシュ分割してエッジ基底関数で電界**E**を展開し、重み関数Wとしては全展開関数$\mathbf{E}_i$で重み付けして連立一次方程式の問題に帰着させ、行列方程式を解く。

定式化 (2)

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j$$

磁界を知りたいとき $\mathbf{H} = -\dfrac{\nabla \times \mathbf{E}}{j\omega\mu}$

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{E}_i \rangle = \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_i) - k_0{}^2 \varepsilon_r \left(\sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot \mathbf{E}_i \right] dv + \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv$$

$$+ jk_0 Z_0 \oiint_{S_K} \frac{1}{K} \left(\hat{n} \times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_i) dS + \oiint_{S_{PEC}} \left[\mathbf{E}_i \cdot \left(\hat{n} \times \left(\nabla \times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \right) \right] dS$$

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{E}_i \rangle = \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j [\iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}_j) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_i) - k_0{}^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_i \right] dv$$

$$+ jk_0 Z_0 \oiint_{S_K} \frac{1}{K} (\hat{n} \times \mathbf{E}_j) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_i) dS + \oiint_{S_{PEC}} [\mathbf{E}_i \cdot (\hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_j))] dS]$$

$$(i = 1, \cdots, N_{basis})$$

$$+ \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv$$

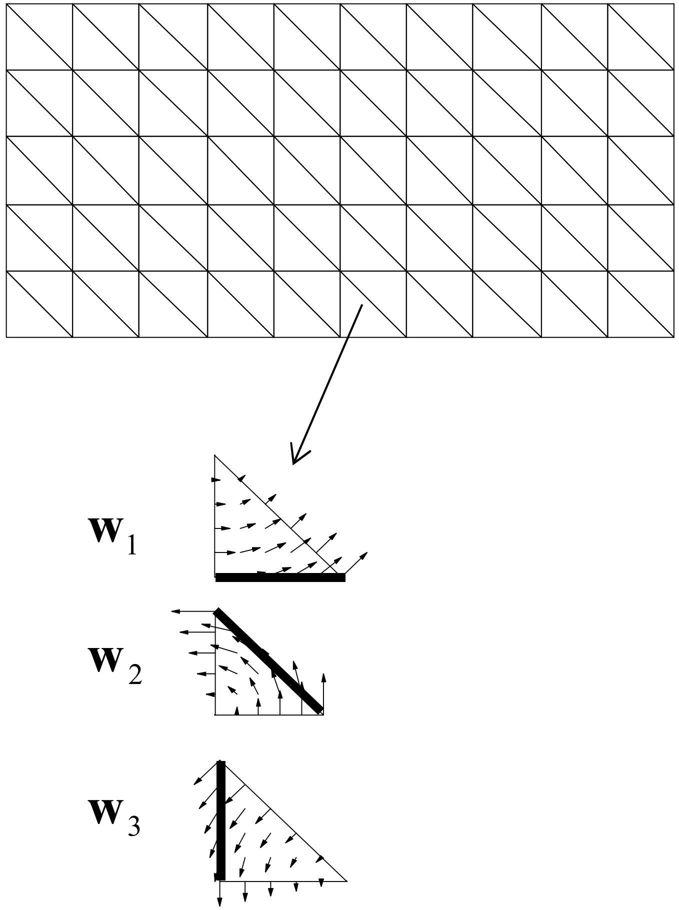
上の体積積分、面積分は各要素j内での積分のみ値を持つ。なぜならば、基底関数同士の積になっており、それらは要素内でしかオーバーラップしないからである。結局$V \to V_i$とすることができる。

定式化 (3)

$$\sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \underbrace{\left[A_{ij} - B_{ij} + C_{ij} + D_{ij}\right]}_{K_{ij}} = -F_i \qquad (i = 1, \cdots, N_{basis})$$

$$\begin{cases} A_{ij} = \iiint_V \dfrac{1}{\mu_r}\left(\nabla \times \mathbf{E}_j\right)\cdot\left(\nabla \times \mathbf{E}_i\right)dv \\ B_{ij} = \iiint_V k_0{}^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_i dv \\ C_{ij} = jk_0 Z_0 \oiint_{S_K} \dfrac{1}{K}\left(\hat{n} \times \mathbf{E}_j\right)\cdot\left(\hat{n} \times \mathbf{E}_i\right)dS \\ D_{ij} = \oiint_{S_{PEC}} \left[\mathbf{E}_i \cdot \left(\hat{n} \times \left(\nabla \times \mathbf{E}_j\right)\right)\right] dS] \\ F_i = \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{i,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},j} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_i \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}} \end{bmatrix}$$

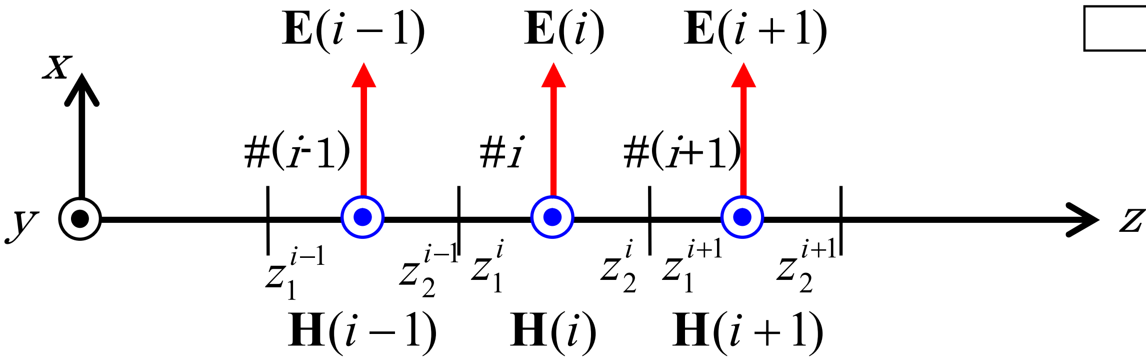


これらの積分は結構簡単に評価することができる。なぜならば、モーメント法の場合の用に特異点はなく、かつ、基底関数は多項式で表現されているので簡単な積分公式に帰着できる。

行列は非常に疎なので、専用のソルバ—を使うとメモリを節約し、高速に解くことができる。

1-Dの例: FEM (基底関数)

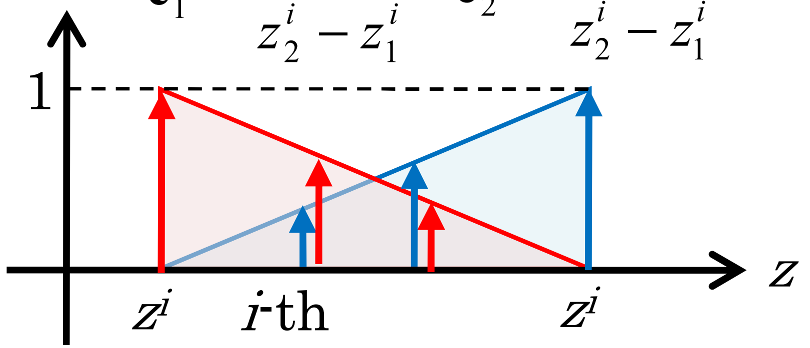
周波数領域



基底関数・・・この既知の関数と重みで任意の分布を表現

基底関数で展開

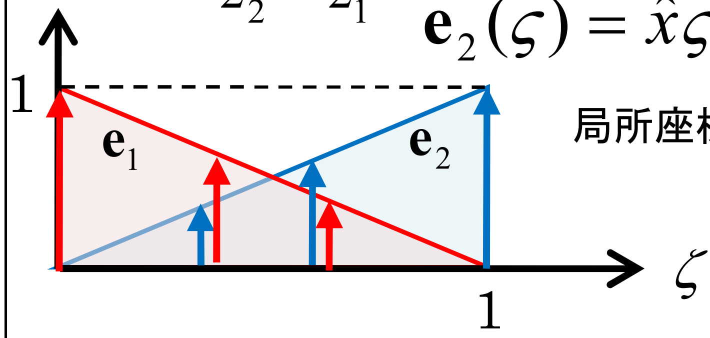
$$\mathbf{e}_1^i = \frac{z_2^i - z}{z_2^i - z_1^i} \qquad \mathbf{e}_2^i = \frac{z - z_1^i}{z_2^i - z_1^i}$$



$$z = z_1^i + (z_2^i - z_1^i)\varsigma$$

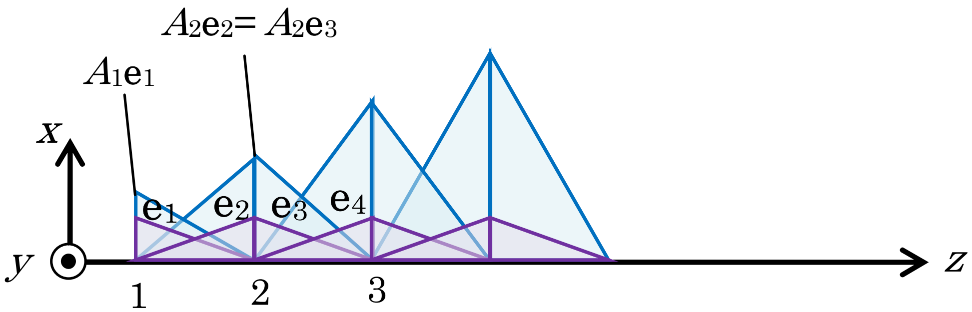
$$\varsigma = \frac{z - z_1^i}{z_2^i - z_1^i} \qquad \mathbf{e}_1(\varsigma) = \hat{x}(1-\varsigma)$$

$$\mathbf{e}_2(\varsigma) = \hat{x}\varsigma$$



局所座標

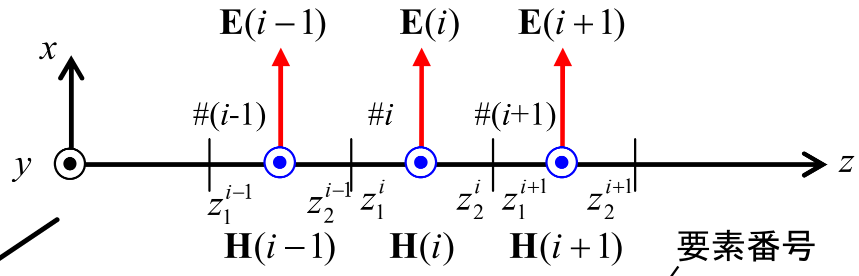
$$A_2^i = A_1^{i+1} = C^{i+1}$$



全空間の電界は基底関数
とその重みで表現

$$E_x = \sum_{i=1}^{N_e} \left(A_1^i e_{1x}^i(z) + A_2^i e_{2x}^i(z) \right)$$

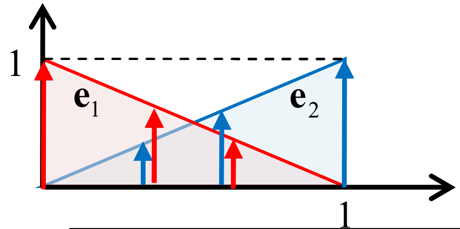
1-Dの例: FEM (波動方程式, 重み付け残差法、弱形式)



要素番号

$$\mathbf{E} = \sum_{e=1}^{N_e} \left(A_1^e \mathbf{e}_1^e(z) + A_2^e \mathbf{e}_2^e(z) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_{basis}} A_n \mathbf{b}_n(z)$$



マクスウェルの方程式

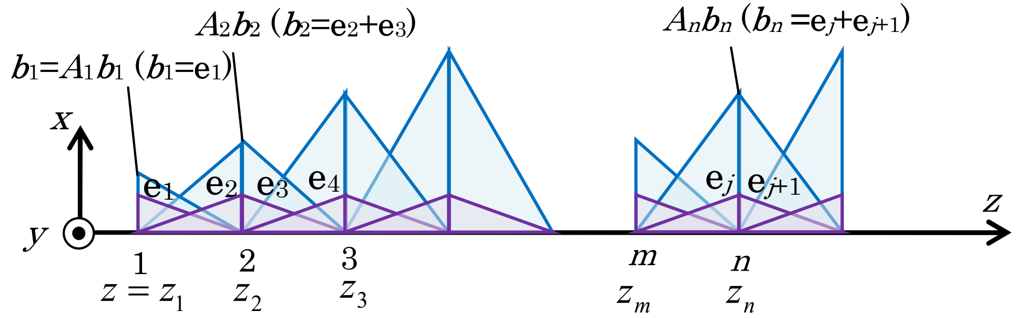
$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \end{cases}$$

Hを消去

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0\eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) = 0$$

グローバルな基底関数の番号付



Eの波動方程式

重み

$$\iiint_\Omega \mathbf{W} \cdot \boxed{\left(\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0\eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right)} dv = 0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形

$$\iiint_\Omega \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{W} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{W} \cdot \left(jk_0\eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) \right] dv$$

$$- \oint\!\!\oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\hat{n} \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dS = 0 \qquad \textbf{(弱形式)}$$

今の1次元の問題の場合

$$\int_\Gamma \Bigg[\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial W_x}{\partial z} \frac{\partial E_x}{\partial z} - k_0^2 \varepsilon_r W_x E_x$$

$$+ W_x \left(jk_0\eta_0 J_x + \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) \Bigg] dz - \left[\frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z} \right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}} = 0$$

1-Dの例: FEM (離散化, 行列方程式)

$$\int_\Gamma [\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial W_x}{\partial z}\frac{\partial E_x}{\partial z} - k_0{}^2\varepsilon_r W_x E_x$$

$$+W_x\left(jk_0\eta_0 J_x + \frac{1}{\mu_r}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\right)]dz - \underbrace{\left[\frac{1}{\mu_r}W_x\frac{\partial E_x}{\partial z}\right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}}}_{=[\text{boundary}]} = 0$$

$$E_x = \sum_{n=1}^{N_{basis}} A_n b_n(z)$$

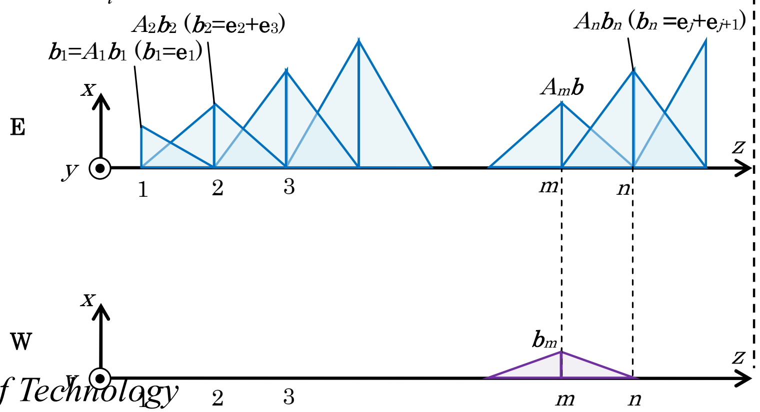
$$W_x = b_m(z) \quad (m = 1, \cdots, N_{basis})$$

W_xは何でも良いのだが、このように選ぶ。 ガラーキン法

W=b$_m$の方程式

$$\sum_{n=1}^{N_{basis}} \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_r}\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z}dz - k_0{}^2\varepsilon_r \int_z b_m b_n dz\right)}_{=K_{mn}} A_n + [\text{boundary}]$$

$$= \underbrace{-\int_z b_m\left(jk_0\eta_0\frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r}\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\right)dz}_{=F_i}$$



$$\sum_{n=1}^{N_{basis}} K_{mn}A_n + [\text{boundary}] = -F_n$$

[boundary]は無視して行列方程式を作ると

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}} \end{bmatrix}$$

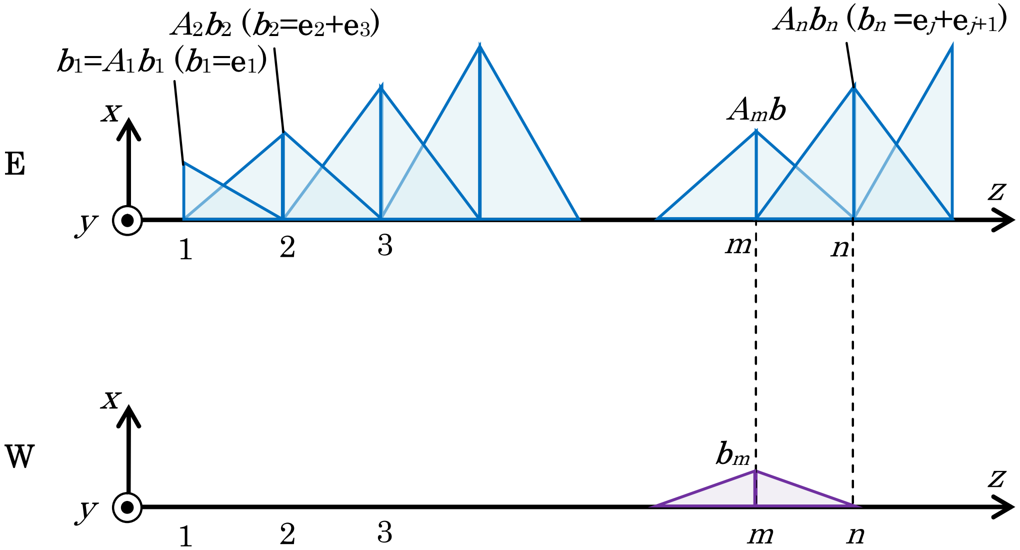
ここで、

$$\begin{cases} K_{mn} = \dfrac{1}{\mu_r}\displaystyle\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z}dz - k_0{}^2\varepsilon_r \int_z b_m b_n dz \\ F_m = \displaystyle\int_z b_m\left(jk_0\eta_0\frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r}\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\right)dz \end{cases}$$

1-Dの例: FEM (行列要素の計算)

ここで、$K_{mn} = \dfrac{1}{\mu_r}\displaystyle\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z}dz - k_0{}^2\varepsilon_r \int_z b_m b_n dz$

の計算は次の図を見てわかるように、i,jともに同一、あるいは隣接する要素の基底関数のときしか値を持たない。
→行列は疎になる。



よって、要素ごとに基底関数同士の積分を評価して、行列に埋め込んでいくと効率的である。全体の行列方程式における基底関数としては、要素内の基底関数を用いて、上図のように各エッジで重みが定義された基底関数を用いる。このために(要素番号, 基底関数番号1or2)からグローバルの基底関数番号に対応させる変換表を準備しておく。

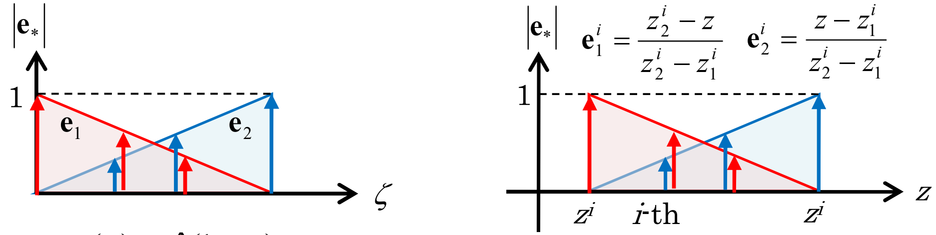
また、$K_{mn} = \dfrac{1}{\mu_r}\displaystyle\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z}dz - k_0{}^2\varepsilon_r \int_z b_m b_n dz$

の計算は

$$b_m(z) = e_2^{e-1}(z) + e_1^e(z)$$

なので、次の計算に帰着される。

$$\begin{cases} E_{ij} = \displaystyle\int_{z_1^e}^{z_2^e} e_i^e(z)e_j^e(z)dz = \begin{cases}(z_2^e - z_1^e)/3 & (i=j)\\ (z_2^e - z_1^e)/6 & (i \neq j)\end{cases} \\ F_{ij} = \displaystyle\int_{z_1^e}^{z_2^e} \frac{\partial e_i^e(z)}{\partial z}\frac{\partial e_j^e(z)}{\partial z}dz = \begin{cases}1/(z_2^e - z_1^e) & (i=j)\\ 1/(z_1^e - z_2^e) & (i \neq j)\end{cases}\end{cases}$$



$\mathbf{e}_1(\varsigma) = \hat{x}(1-\varsigma)$

$\mathbf{e}_2(\varsigma) = \hat{x}\varsigma$

$\varsigma = \dfrac{z - z_1^i}{z_2^i - z_1^i} \iff z = z_1^i + (z_2^i - z_1^i)\varsigma$

1-Dの例: FEM (波源: 電流源)

$$
m = M_J \quad
\begin{bmatrix}
K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\
\vdots & & & & \vdots \\
K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\
\vdots & & & & \vdots \\
K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-F_1 \\ \vdots \\ \boxed{-F_m} \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
\Leftarrow -jk_0\eta_0 J_0/2
$$

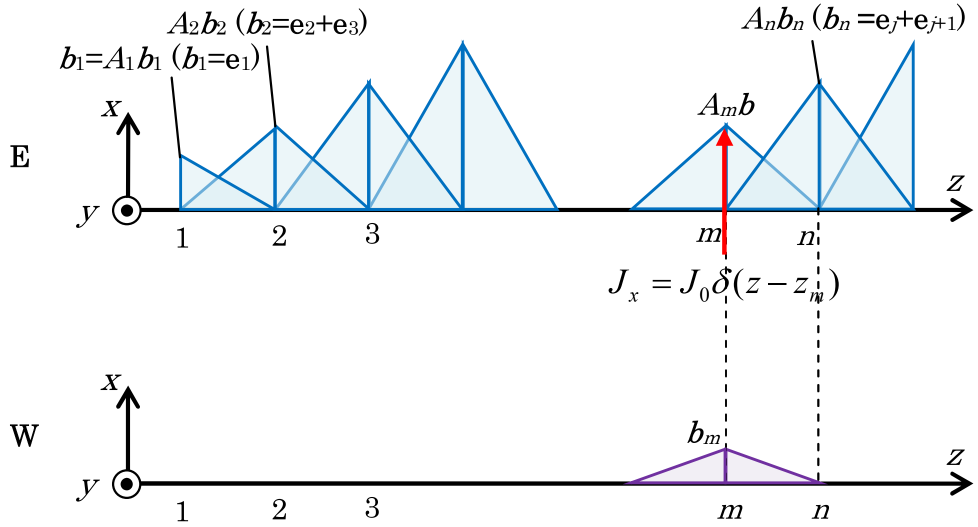
$$
F_m = \int_z b_m \left(jk_0\eta_0 \frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r}\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) dz
$$

m=M_Jの基底関数の中央に線電流

$$
J_x = J_0 \delta(z - z_m) \qquad M_y = 0
$$

で励振されているとすると

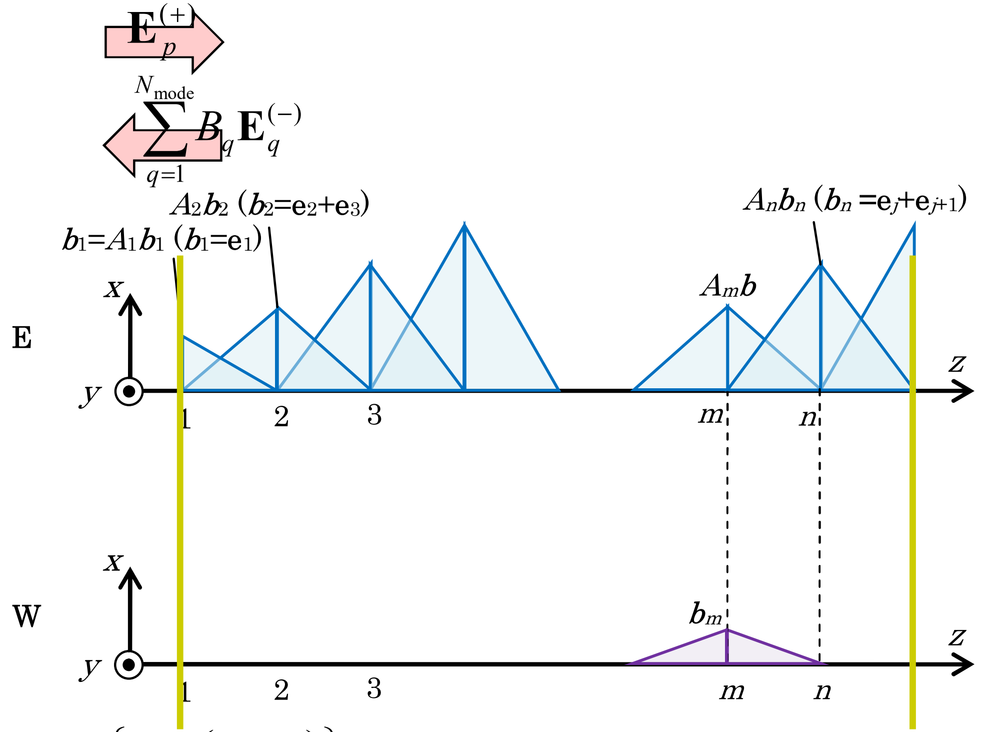
$$
F_{M_J} = jk_0\eta_0 J_0/2
$$



1-Dの例: FEM (波源: 導波管モード)(参考)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p^{(+)} + \sum_{q=1}^{N_{\text{mode}}} B_q \mathbf{E}_q^{(-)}$$

$$= \mathbf{e}_p \exp(-\gamma_p z) + \sum_{q=1}^{N_{\text{mode}}} B_q \mathbf{e}_q \exp(+\gamma_q z)$$



$$\begin{cases} \displaystyle\iint_S \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_j \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\iint_S \mathbf{E}_i \times \frac{\nabla \times \mathbf{E}_j}{\mu_r}\cdot d\mathbf{S} = \delta_{ij}\begin{cases} 1 & \text{(伝搬モード)} \\ j=\sqrt{-1} & \text{(減衰モード)} \end{cases} \\ \displaystyle -\frac{1}{\mu_r}\iint_S \mathbf{E}_i \times \nabla \times \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S} = \delta_{ij}\, j\omega\mu_0 \begin{cases} 1 & \text{(伝搬モード)} \\ j=\sqrt{-1} & \text{(減衰モード)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega \left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{W})\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - k_0{}^2\varepsilon_r \mathbf{W}\cdot\mathbf{E}\right]dv - \iint_{\partial\Omega_{WP}}\left\{\mathbf{W}\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)\right\}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{\overline{\partial\Omega_{WP}}}\left\{\mathbf{W}\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)\right\}\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \underbrace{-\iiint_\Omega \mathbf{W}\cdot\left[jk_0\eta_0\mathbf{J} + \nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right]dv}_{=[\text{current source}]}$$

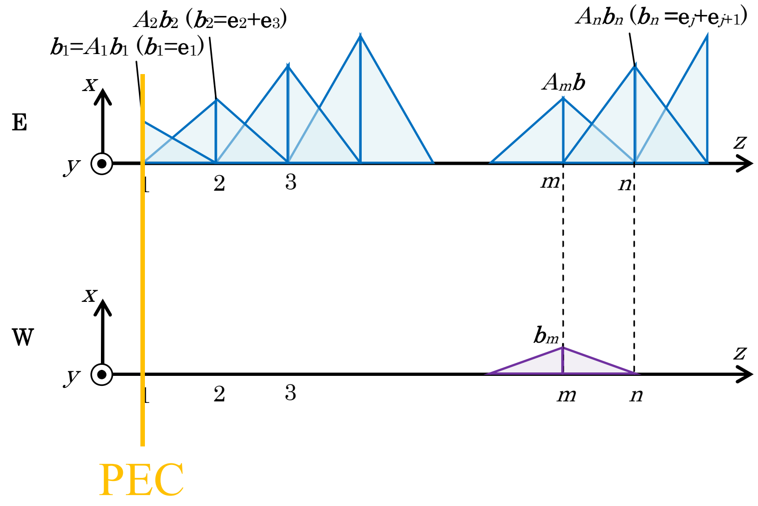
普通に体積内部を基底関数の和で表現

境界のポート上の電界を電界モードの和で表現

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{(\text{inside})} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})} & \text{体積内部} \\ \mathbf{E}^{(\text{port})} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j \mathbf{e}_j^{(\text{port})} & \text{ポート} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{l} \displaystyle\iiint_\Omega \frac{1}{\mu_r}\left(\nabla\times\mathbf{e}_i^{(\text{inside})}\right)\cdot\left(\nabla\times\sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j\mathbf{e}_j^{(\text{inside})}\right)dv \\ \displaystyle -\iiint_\Omega k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{e}_i^{(\text{inside})}\cdot\sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j\mathbf{e}_j^{(\text{inside})}dv \end{array} & \displaystyle -\oiint_{\partial\Omega}\left\{\mathbf{e}_i^{(\text{inside})}\times\left(\frac{\nabla\times\sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j\mathbf{e}_j^{(\text{port})}}{\mu_r}\right)\right\}\cdot d\mathbf{S} \\ \displaystyle -\oiint_{\partial\Omega}\left\{\mathbf{e}_i^{(\text{port})}\times\left(\frac{\nabla\times\sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j\mathbf{e}_j^{(\text{inside})}}{\mu_r}\right)\right\}\cdot d\mathbf{S} & \displaystyle -\oiint_{\partial\Omega}\left\{\mathbf{e}_i^{(\text{port})}\times\left(\frac{\nabla\times\sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j\mathbf{e}_j^{(\text{port})}}{\mu_r}\right)\right\}\cdot d\mathbf{S} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{A_i\} \\ \{B_i\}\end{bmatrix} = [\text{current source}] + [\text{modal ex.}]$$

1-Dの例: FEM (境界条件: PEC)



左の壁が電気壁(PEC)の場合

$E_x = 0$ なので、$A_1 = 0$

とする。これは元々既知であったと考えるので
行列方程式に $A_1 = 0$
を代入し、未知数からも消去する。

$$
\begin{bmatrix}
K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\
\vdots & & & & \vdots \\
K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\
\vdots & & & & \vdots \\
K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_1 \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
$$

1-Dの例: FEM (境界条件: 表面インピーダンス Z_s)

$$\boxed{\partial E_x / \partial z + \alpha E_x = \beta}$$

表面インピーダンス

$$[\text{boundary}] = -\left[\frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z}\right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}} = -\left[\frac{1}{\mu_r} W_x(z_{N_e+1}) \frac{\partial E_x(z_{N_e+1})}{\partial z} - \frac{1}{\mu_r} W_x(z_1) \frac{\partial E_x(z_1)}{\partial z}\right]$$

$$= -\frac{1}{\mu_r(N_e)}\left(\beta_{N_e} - \alpha_{N_e} A_{N_{basis}} e_{2x}^{N_e}(z_{N_e+1})\right) + \frac{1}{\mu_r(1)}\left(\beta_1 - \alpha_1 A_1 e_{1x}^1(z_1)\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu_r(N_e)}\left(\beta_{N_e} - \alpha_{N_e} A_{N_{basis}}\right) + \frac{1}{\mu_r(1)}\left(\beta_1 - \alpha_1 A_1\right)$$

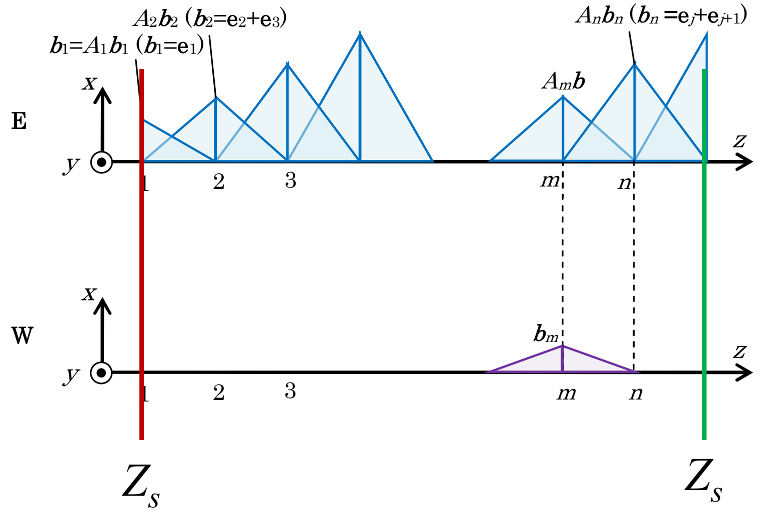
足す $-\dfrac{\alpha_1}{\mu_r(1)}$

$-\dfrac{\beta_1}{\mu_r(1)}$ 足す

$$\begin{bmatrix} \boxed{K_{11}} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & \boxed{K_{N_{basis},N_{basis}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-F_1} \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ \boxed{-F_{N_{basis}}} \end{bmatrix}$$

足す $+\dfrac{\alpha_{N_e}}{\mu_r(N_e)}$

足す $+\dfrac{\beta_{N_e}}{\mu_r(N_e)}$



1-Dの例: FEM (境界条件: 吸収境界条件)

進行波の表現: $E_x = E_0 e^{\mp jkz}$　　上側: +z方向, 下側-z方向

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mp jk \underbrace{E_0 e^{\mp jkz}}_{=E_x} = \mp jkE_x$$

表面インピーダンス

$$\boxed{\partial E_x / \partial z + \alpha E_x = \beta}$$

$z = z_1$

$$\partial E_x / \partial z - jkE_x = 0$$

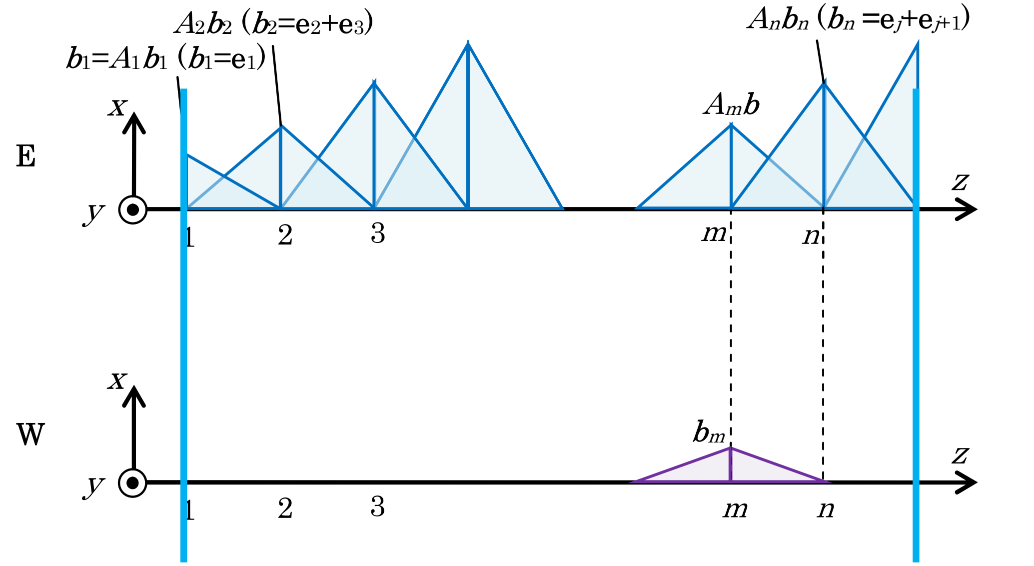
$$\begin{cases} \alpha_1 = -jk \\ \beta_1 = 0 \end{cases}$$

$z = z_{N_e}$

$$\partial E_x / \partial z + jkE_x = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_{N_e} = +jk \\ \beta_{N_e} = 0 \end{cases}$$

$E_x(z_1) = E_0(z_1)e^{+jkz}$　　$E_x(z_{N_e}) = E_0(z_{N_e})e^{-jkz}$



表面インピーダンスと考えればよい

ベクトル基底関数

FEMのベクトル基底関数

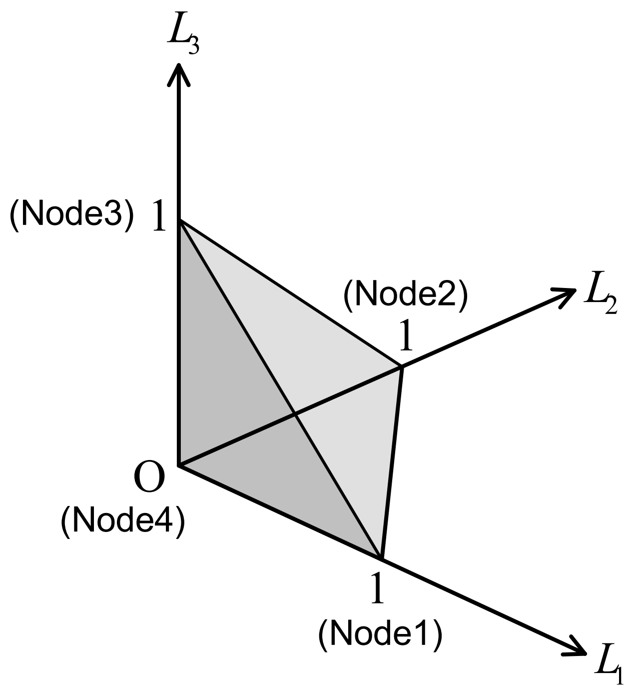
J.C. Nedelec, "Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$," Numerische Mathematik, Vol.35, No.3, pp.315-341, 1980.

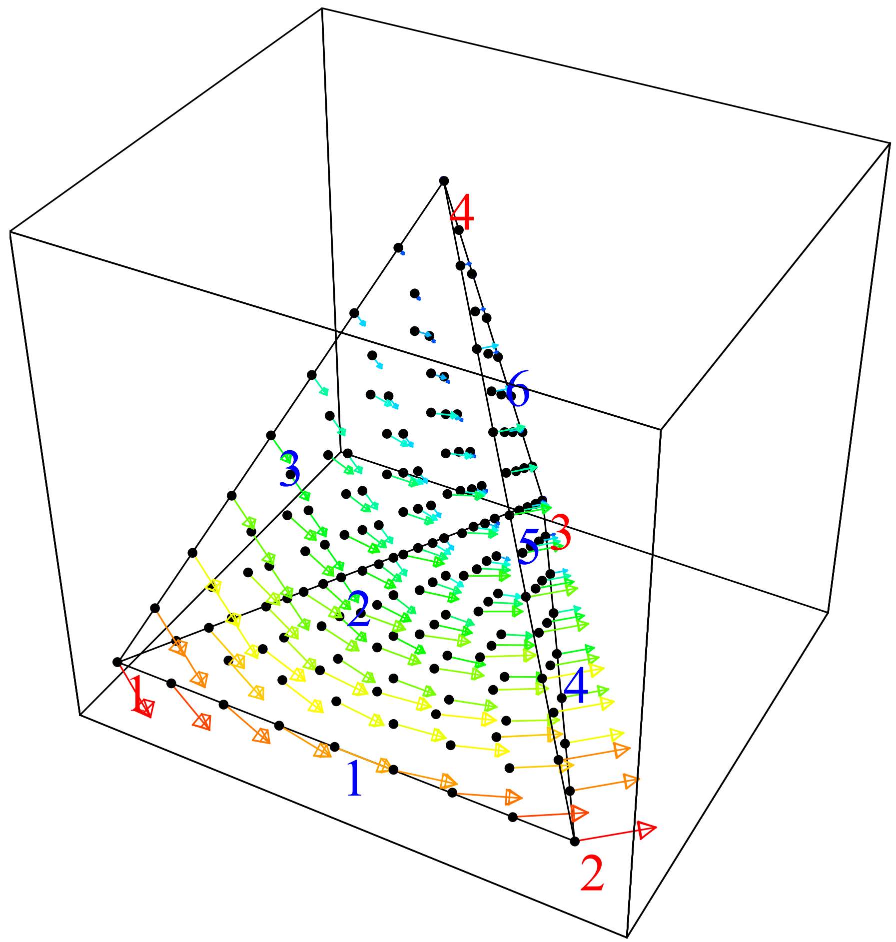
ドイツ語。図が1つしかない。数学の論文みたい・・・。

MoMのベクトル基底関数

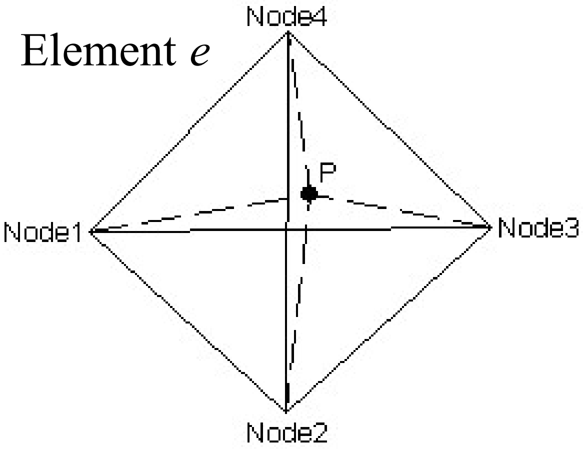
S.M. Rao, D.R. Wilton, and A.W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas & Propagat., vol.30, pp.409-418, May 1982.

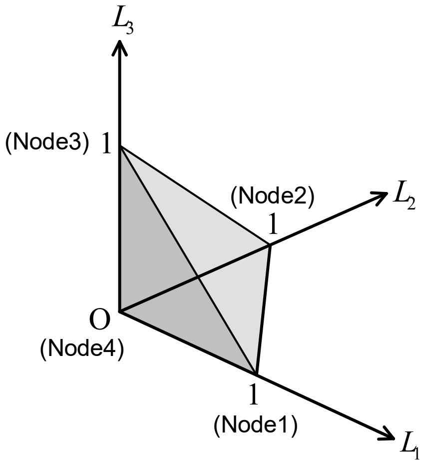
3-D FEMのエッジ要素ベクトル基底関数





3-D FEMのエッジ要素ベクトル基底関数





$$\mathbf{W}_k^e = \ell_{ij}\left(L_i^e \nabla L_j^e - L_j^e \nabla L_i^e\right)$$

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$L_i^e = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$$

$$L_1^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P234}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_2^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P341}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_3^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P412}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_4^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P123}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_1^e + L_2^e + L_3^e + L_4^e = 1$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}$$

ヘルムホルツの定理

任意のベクトル関数**F**は1つのスカラー関数の勾配と、他の1つのベクトル関数の回転の和に分解することができる

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_p$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_r = \nabla \times \mathbf{A} & (\text{ソレノイダル・ベクトル}) \\ \mathbf{F}_p = \nabla \phi & (\text{ラメラー・ベクトル}) \end{cases}$$

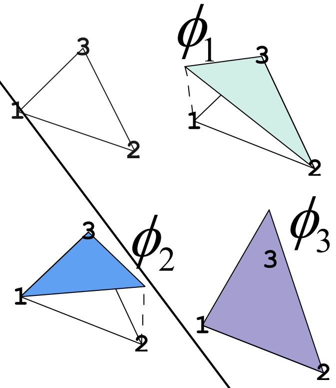
$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F}_r = \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) = 0 & (\mathrm{F_r}\text{は発散が0}) \\ \nabla \times \mathbf{F}_p = \nabla \times \left(\nabla \phi \right) = 0 & (\mathrm{F_p}\text{は回転が0}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_p \\ \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}_r \end{cases}$$

Fを定めるときに、発散だけ、または回転だけを定めたのでは完全に定まらず、発散と回転の両方を定めなければ**F**は一意に定まらない。

スプリアス（非物理）解について

ノードベース



$$\phi = \sum_{i=1}^{3} a_i \phi_i$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

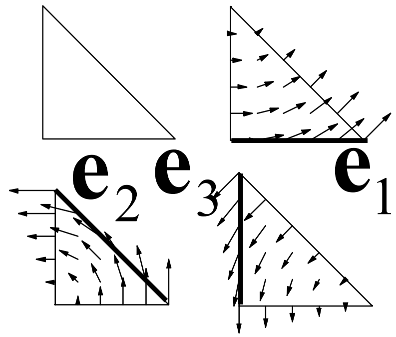
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

ファラデーの法則に矛盾

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

→スプリアス（非物理）解の発生

エッジベース



$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i$$

$$\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$$

問題なし

しかも、$\mathbf{E}$はエッジ上で接線成分が等しくなる（→電界の接線成分の境界条件 $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j) = 0$ を満たす）

静電界/静磁界/準静電界/準静磁界

マクスウェルの方程式

逆起電力

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \boxed{-\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} & \text{(ファラデーの法則)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \boxed{\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} & \text{(アンペアの法則)} \end{cases}$$

変位電流

$\dfrac{\partial}{\partial t} \cong 0$ 準静電界

変位電流は無視できない (ε: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

時間変化なし

これは問題なし

独立
$$\begin{cases} \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{(静電界)}} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad \text{(静磁界)} \end{cases}$$

$$V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(Voltage)}$$

$$I = \oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(Current)}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} \cong 0$ 準静磁界

逆起電力は無視できない(μ: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \end{cases}$$

コイル・モーター等の解析

FEM参考資料: スプリアス(非物理)界の例

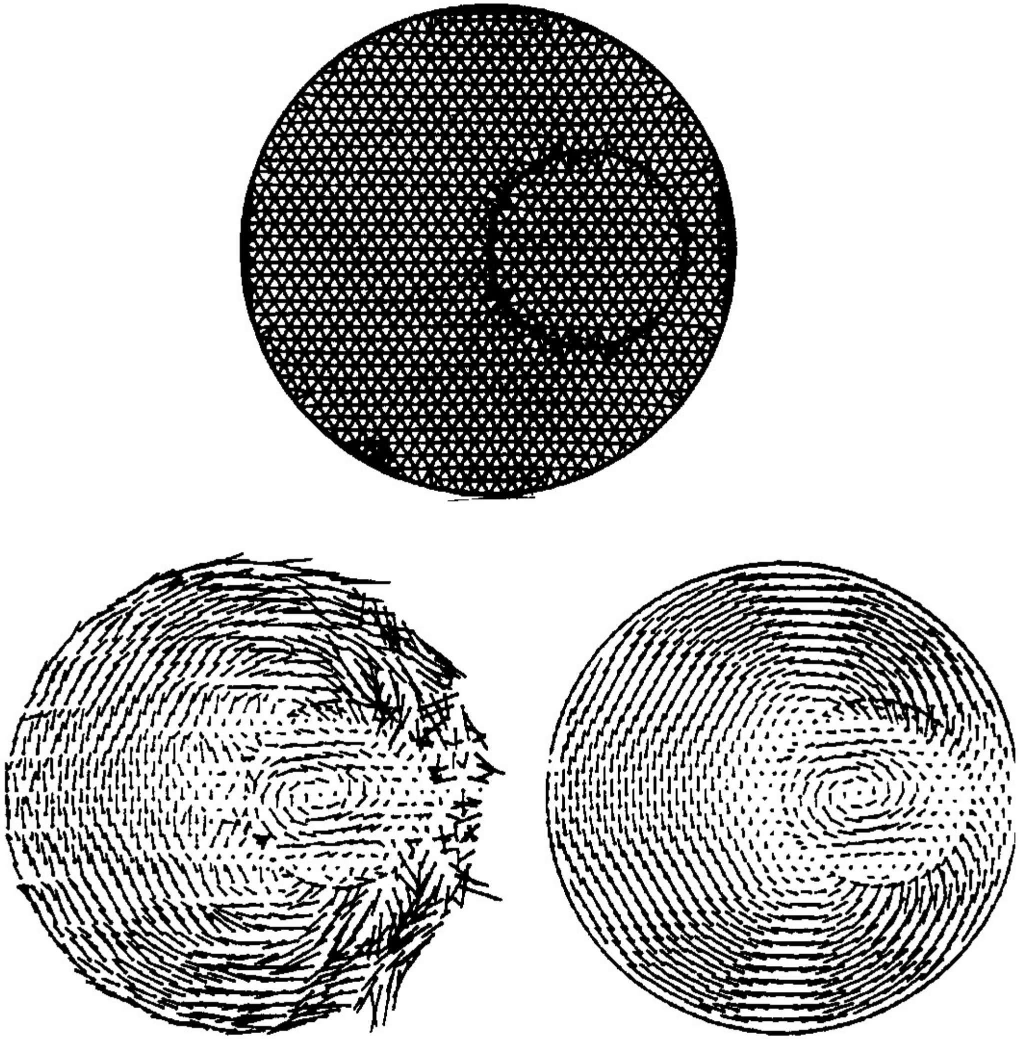
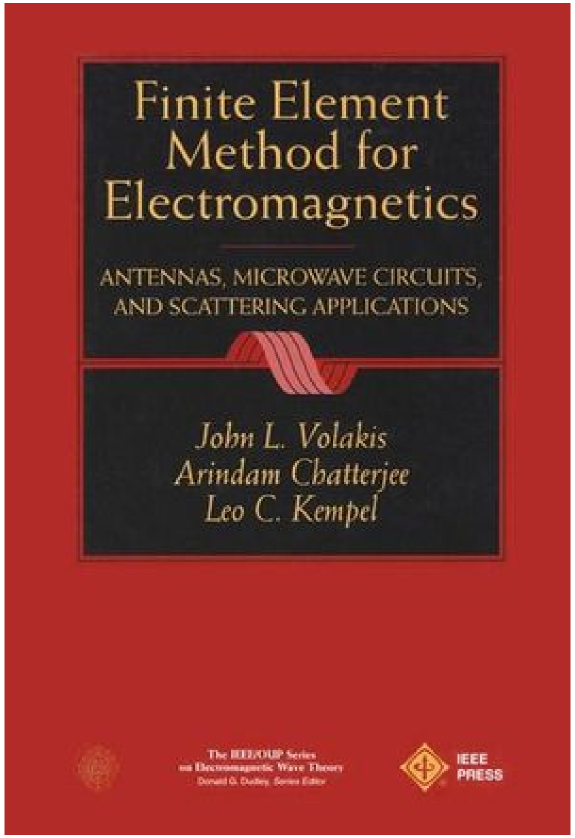


Figure 4.26 Failure of the node-based FEM implementation to predict the correct mode fields inside a coaxial guide with an offset center conductor. Top: mesh interior to the conducting cylinder offset inner cylinder material wavenumber is $k^2_{\text{inner}} = 2000$, and that of the remaining region is $k^2_{\text{outer}} = (196.1, 39.22)$; bottom left: mode solution using node-based elements; bottom right: reference mode fields. [*After Paulsen and Lynch, © IEEE, 1991.*]



J. L. Volakis, A. Chatterjee, L.C. Kempel, Finite Element Method Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications, Wiley, 1998.

FEM参考資料: 変分法(有限要素法の原理)

方程式の解放を極値を求める問題に帰着させて解く手法

・昔の定式化(安定性の数学的証明)
・汎関数が求まるとは限らない

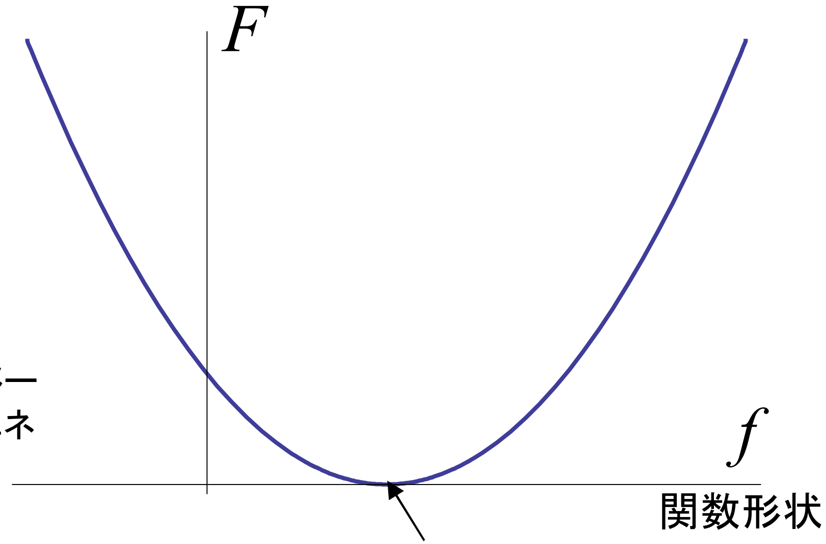
【例】

$f(x)=0$　方程式

$F[f]$　汎関数(Functional)

関数から実数への写像

・Fが極値を取るfは$f(x)=0$となる
・関数fの形状による関数(極値は1つ:単峰性)
(F は$f(x)$をxの定義範囲で積分した表現であり、イメージとしてはエネルギー弦の振動における変位からエネルギーを求めるようなものである。)



このような汎関数を求めるのは大変である

$$f(x) \cong \sum_{j=1}^{N} \boxed{a_j} \boxed{g_j(x)}$$

必ず求まるわけではない

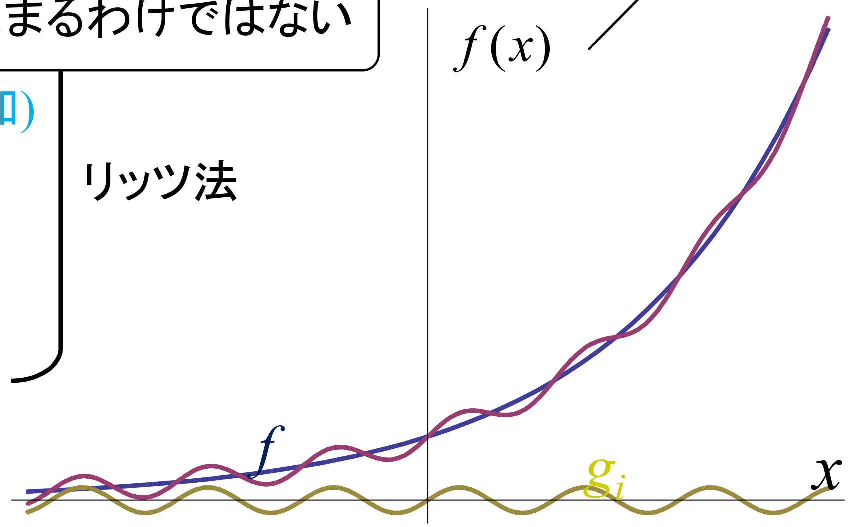
基底関数(既知)

重み係数(未知)

リッツ法

$$\frac{\partial F[f]}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, N)$$

連立一次方程式の問題となり、a_jが決定されて近似的に$f(x)$が求まる。



(例)仮想変位の方法(エネルギーを座標で偏微分して力を求める)

【参考】 有限要素法(FEM, finite element method)による電磁界解析入門 (pp.9-12)
http://www.takuichi.net/study/fem/fem.pdf

有限要素法解析の流れ

メッシュ生成
- 解析空間全体をメッシュ分割する

行列の生成
- 各要素の中の基底関数の寄与を全体の行列に足し込む

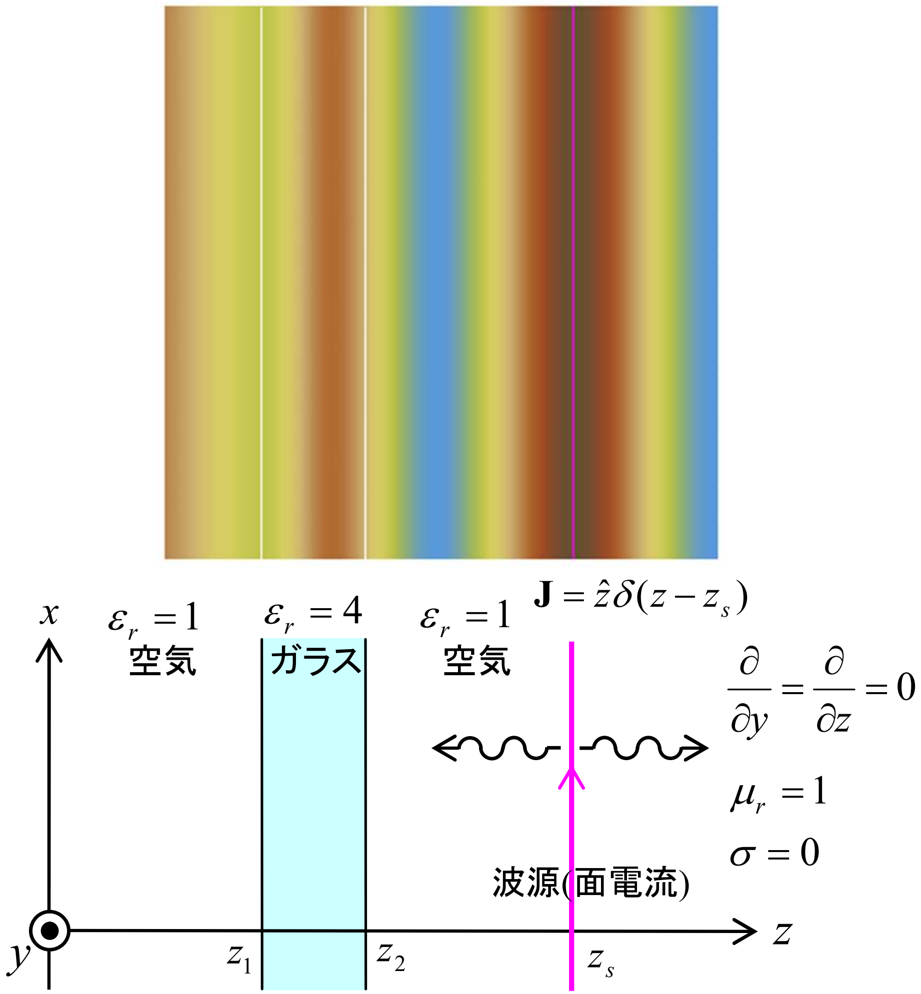
境界条件
- 境界条件の寄与に関しても全体の行列に足し込む

励振
- 励振波源の寄与についても全体の行列に足し込む

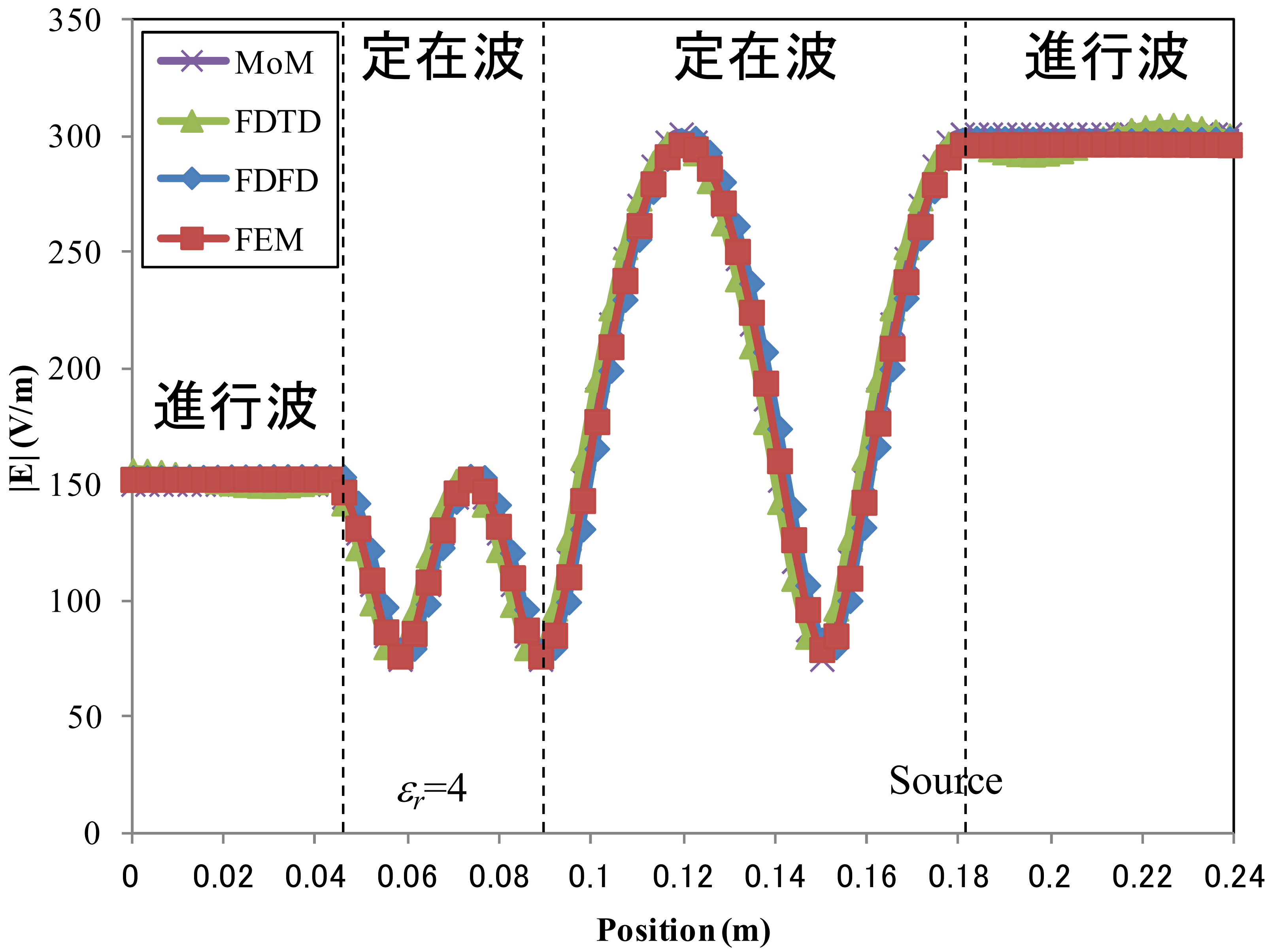
行列方程式
- 生成された行列方程式を解く
- 疎行列のため、前処理を行ってSOR法で解くなどの専用ソルバーが使われる

後処理
- 電界基底関数のときは任意の位置での電界は重み付けした基底関数の和で求まる。磁界はファラデーの法則より求まる。

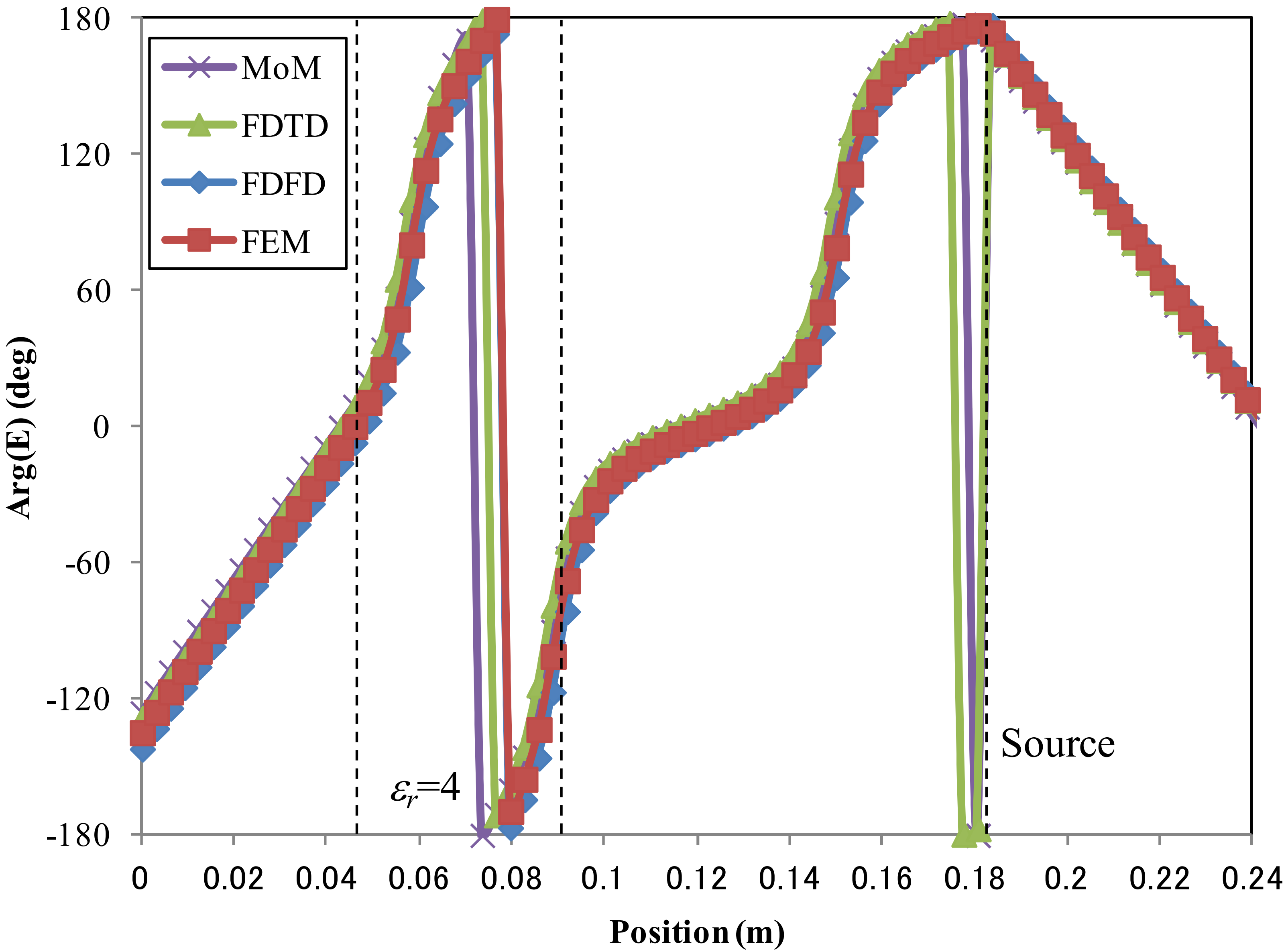
1次元問題の解析結果


$\mathbf{J} = \hat{z}\delta(z - z_s)$
x
$\varepsilon_r = 1$
空気
$\varepsilon_r = 4$
ガラス
$\varepsilon_r = 1$
空気
$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$
$\mu_r = 1$
$\sigma = 0$
波源(面電流)
y
z_1
z_2
z_s
z

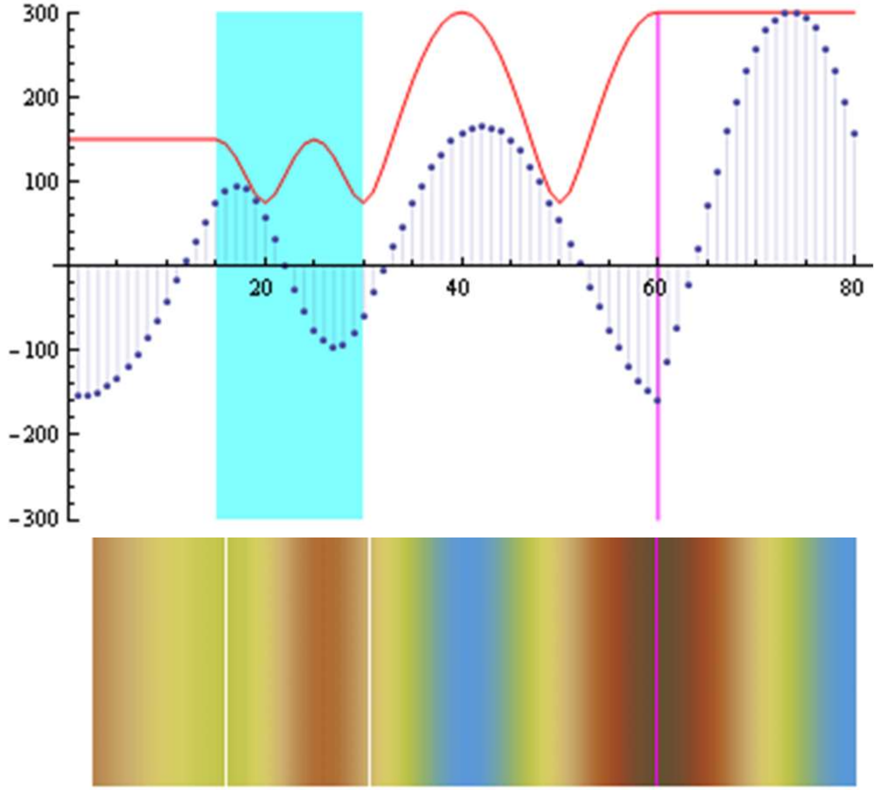
Result: Amplitude of E-field

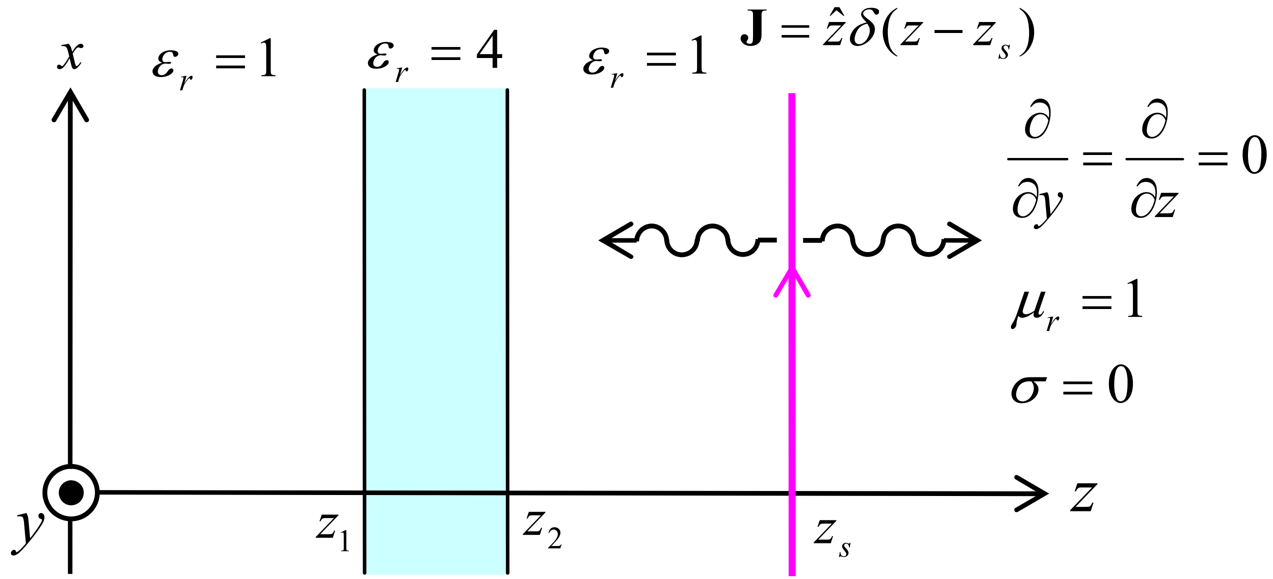


Result: Phase of E-field

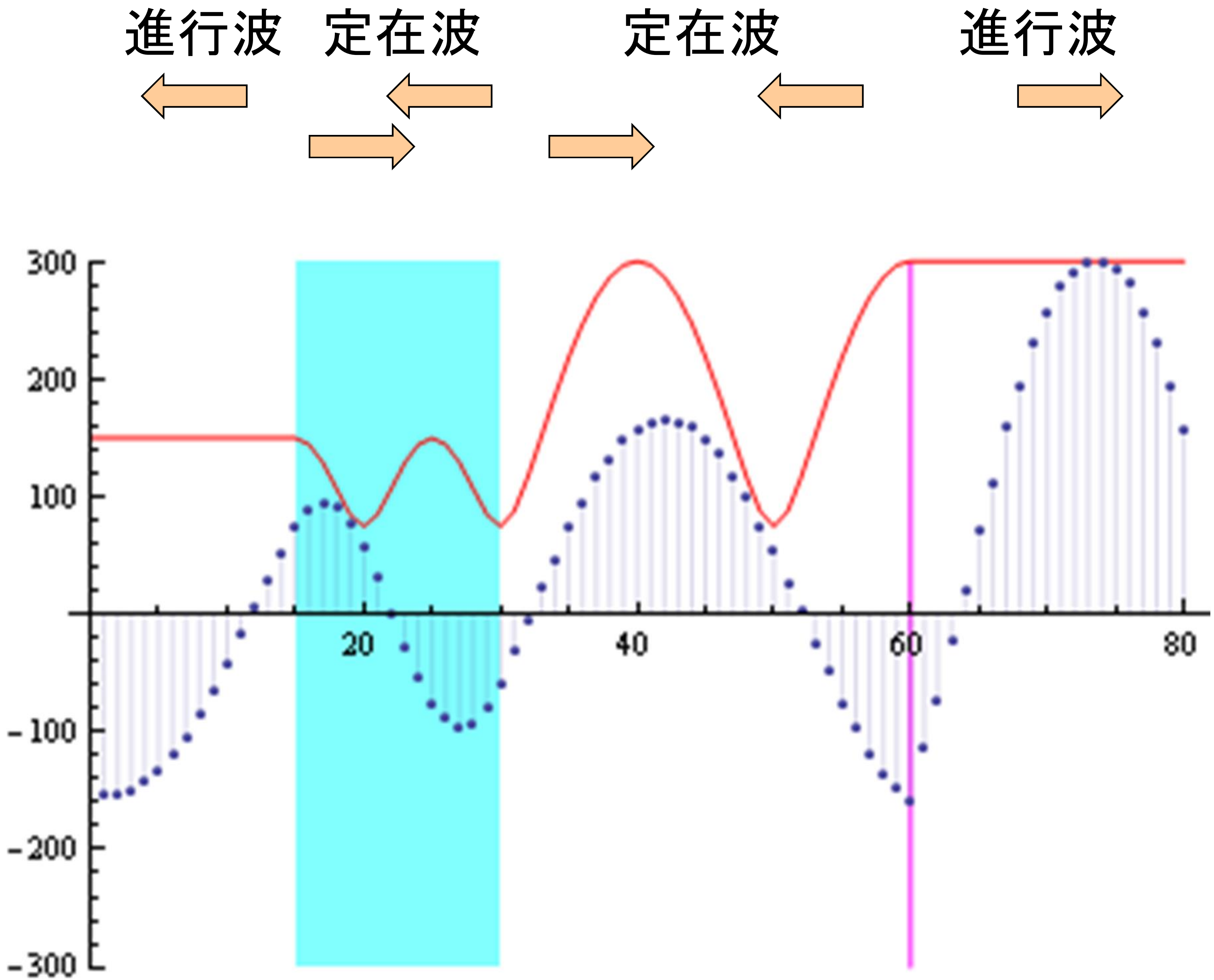


Result: 電界強度分布アニメーション

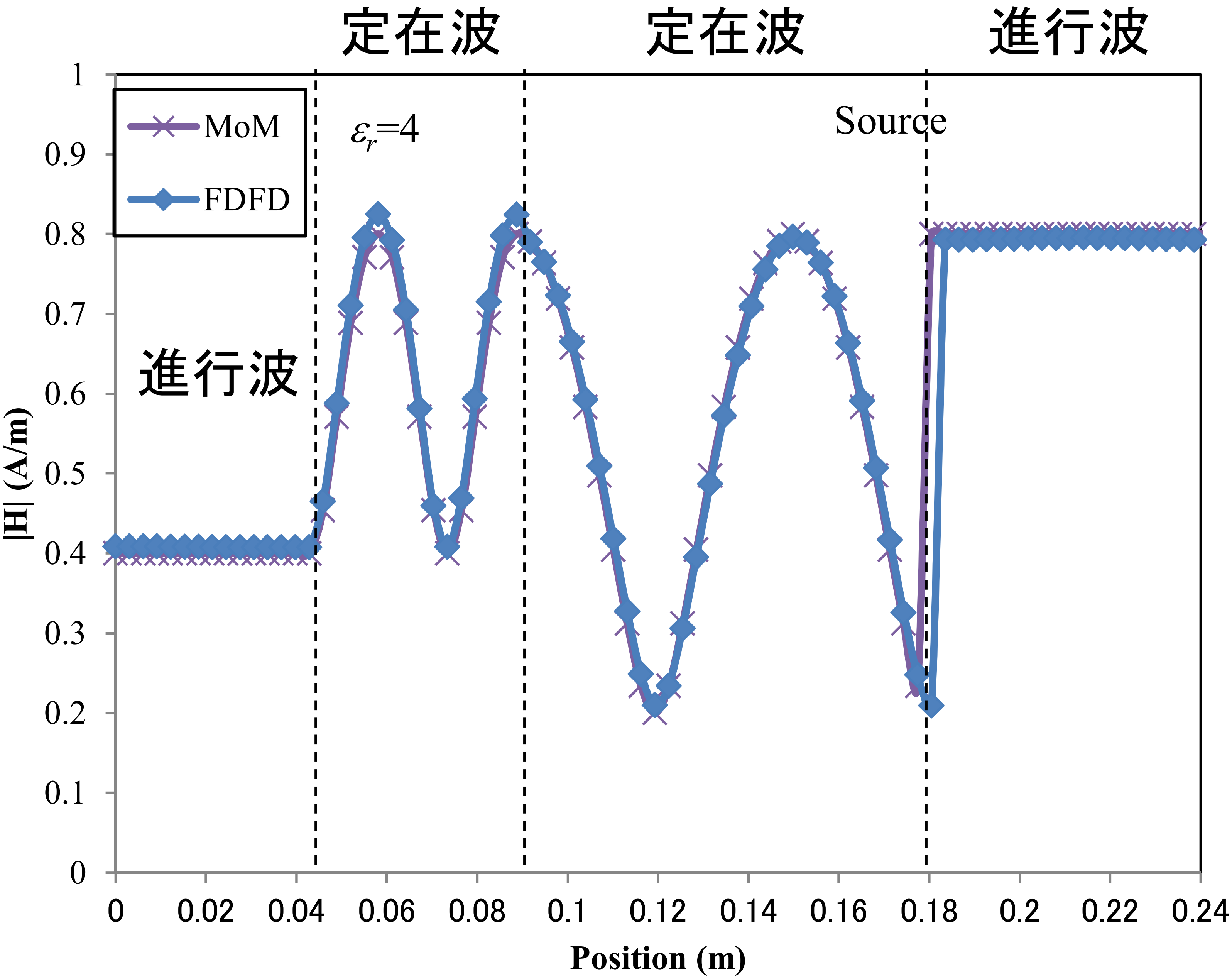




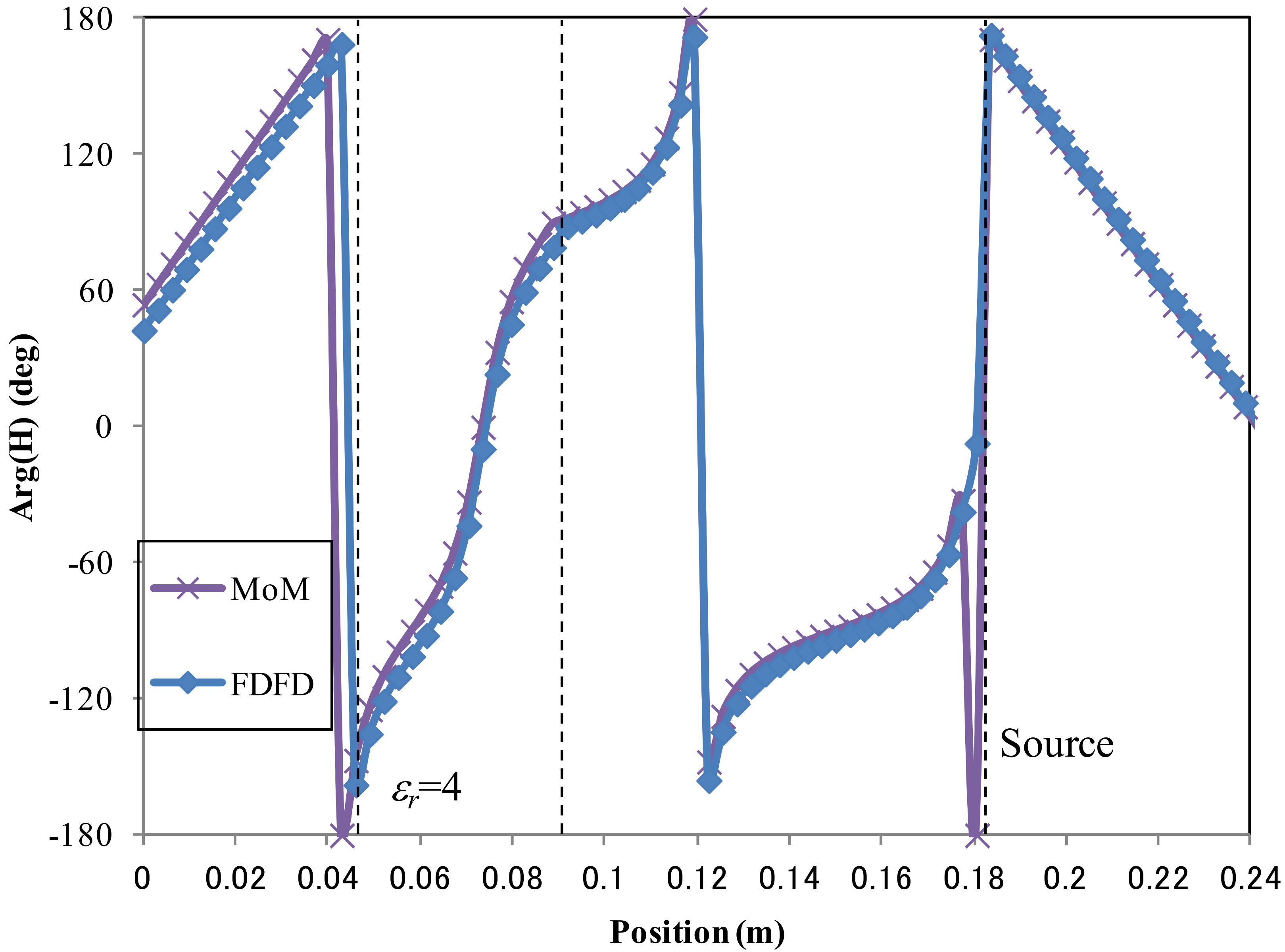
Result: Time-Varying Animation of E-field



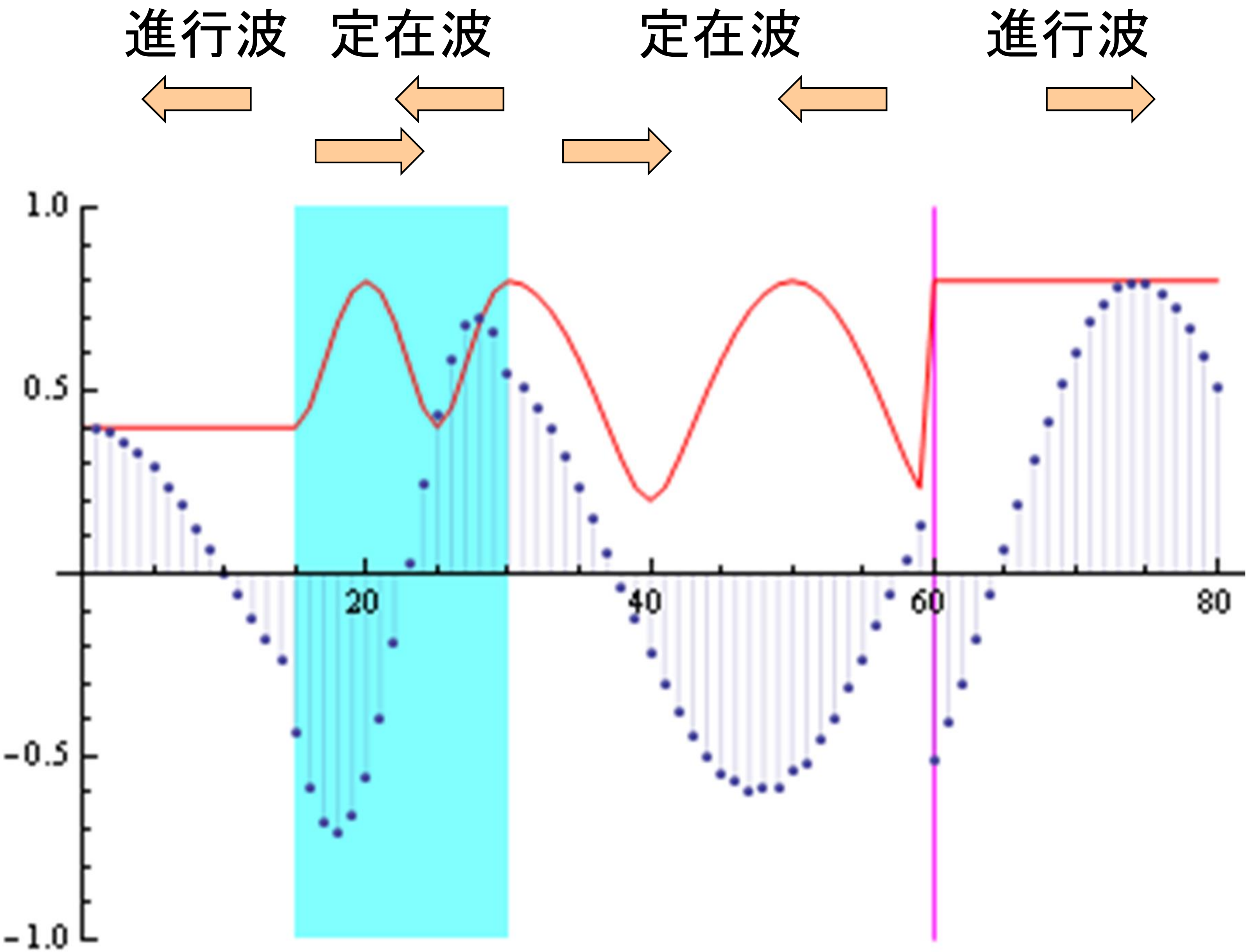
Result: Amplitude of H-field



Result: Phase of H-field



Result: Time-Varying Animation of H-field



各種電磁界解析法の比較

	FDTD	MoM	FEM
メッシュ分割	**3D (空間全体)**	**2D (物体表面)**	**3D (空間全体)**
解法	陽解法（安定条件必須）	陰解法（安定）	陰解法（安定）
行列の疎密	**N/A**	密	疎（高速化可。メモリも節約可）
周波数／時間領域	時間領域	周波数領域	周波数領域
得意な問題	人体解析（複雑な媒質）	**RCS**解析	あまり広い空間を用いず、疎・蜜メッシュが混在したモデル
その他特徴	開放問題では吸収境界条件が必須	開放問題は最初から厳密に組み込まれている	開放問題では吸収境界条件が必須
	Time: O(N*[Time Step]) Mem: O(N)	Time: O(N log N) Mem: O(N log N) **ML-FMM**	Time: $O(N^{1.2})$ Mem: $O(N^{1.3})$

備考: 行列方程式をまともにガウスの消去法(LU分解, 掃き出し法)で解くには$O(N^2)$のメモリ、$O(N^3)$の計算時間が必要となる。