

# 電磁界解析のための有限要素法 (FEM) 入門

2002/10 平野拓一

## 目次

1. はじめに .....	2
1.1 有限要素法の特徴 .....	4
2. 座標変換と基底関数 .....	4
2.1 座標変換と面積座標 .....	4
2.1.1 1次の変換 .....	4
2.2 スカラー基底関数 .....	7
2.1 1次要素 .....	7
2.3 ベクトル基底関数 .....	8
2.3.1 1次要素 .....	8
3. ノードベース有限要素法 .....	9
3.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件) .....	9
3.2 有限要素法の適用 .....	12
3.2.1 メッシュと基底関数 .....	13
3.2.2 基底関数による展開 .....	14
3.2.3 要素行列 .....	14
3.2.4 系行列 .....	17
3.2.5 境界条件の適用 .....	19
3.2.6 固有値問題を解く .....	19
3.3. まとめ .....	20
3.4 系行列生成例 .....	21
4. ノードベース有限要素法 (ガラーキン法) .....	22
4.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件) .....	22
4.2 重み付け残差法と弱形式 .....	22
5. エッジベース有限要素法 .....	24
5.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件) .....	24
5.2 重み付け残差法と弱形式 .....	24
5.3 離散化 .....	27
5.4 系行列の組み立てと解法 .....	30
6. H 面分岐回路の解析 .....	33
6.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件) .....	33
6.2 重み付け残差法と弱形式 .....	34
6.3 離散化 .....	36

A. 付録.....	37
A.1 ヘルムホルツの方程式の導出.....	38
A.1.1 導波管のベクトルヘルムホルツ方程式.....	39
A.1.2 導波管のスカラーヘルムホルツ方程式.....	41
A.2 汎関数、変分、変分原理.....	42
A.3 重み付け、モーメント.....	48
A.4 マクスウェルの方程式と境界条件.....	49
A.5 マイクロストリップ線路の準 TEM モード.....	52
A.6 物理定数.....	53
A.7 電気媒質定数.....	54
A.8 ベクトル公式.....	56

## 1. はじめに

**有限要素法(FEM, Finite Element Method)**は微分方程式をある境界条件の下で解く数値計算手法の一つである。歴史的には航空機や建築物の強度解析に使われ始めたのが有限要素法の始まりであり、1956年の論文[1]が有限要素法の始まりであると言われる。

例えば航空機(図 1)を設計する際には、主翼に着目して見た場合、主翼自身の重さで主翼の胴体との付け根部分に大きな力が加わる。他にも大きな力が加わる場所を考慮しておく必要がある。応力を求めるには微分方程式を与えられた境界条件の下で解く必要がある。有限要素法は構造物を要素と呼ばれる小さな多角形の集合で表す(有限要素法という名前の理由である)ので、複雑な形状の構造物に対しても簡単に適用でき、数値的に微分方程式を与えられた境界条件の下で解いたことになる。このようにして任意の場所の応力が求まれば大きな力が加わるには丈夫な材料を使ったり構造を工夫したりして丈夫に設計する。翼の幅を厚くして丈夫にしようとしても自重が増加してかえって逆効果になってしまったり、航空力学(Aerodynamics)的条件を満たさなかったりして苦勞することが予想できる。しかし、有限要素法を使うとこのように構造物の任意の場所に働く応力を実験に依らず計算で求めることができ、試行錯誤で設計することも可能となり、構造物の設計に関して革命的な影響を与えたことは言うまでもない。

その後、建築土木などの他の構造解析を必要とする分野に使われ始めた。巨大な建築物や橋は地震や風などの影響で揺れる。全ての構造物はその構造と使う材料の重さなどで決まるエネルギーを吸収しやすい共振周波数がある(有限要素法を勉強すればわかる)。地震や風が影響無いと思える程小さな規模でもその構造物の共振周波数が地震や風などの外力の共振周波数と一致するといとも簡単に構造物が崩壊することがある。例えば、1940年11月7日にアメリカ、ワシントン州で起きた**タコマ橋落下事故**(図 2)は有名であり、同年7月に開通してわずか4ヶ月後、風速19 m/sという弱い風で落下してしまった。計算上は風速60 m/sまで耐えられるようにしてあったつもりらしいが、共振現象を考慮していなかったようである。ただし、風の強さが周期的に変化する

る訳ではなく、一定の強さの風が橋に当たっているだけでも、橋の風下側に不規則な渦（カルマン渦）が発生し、それが周期的に橋に外力を与えることになる。それが Tacoma 橋のねじれ共振の周波数と一致し、ブランコをこぐ場合のようにエネルギーを溜めていってケーブルが振動による引っ張られる力に耐えられなくなって落下した。よって現在では風による外力も考えて流体力学的にも安定した構造を設計するようである。地震によるビルの崩壊も、地震の周波数をビルの共振周波数と一致させないように設計すると崩壊を防ぐことができる。地震の多い日本においては特に重要な技術である。

このように構造力学については有限要素法は中心的役割を果たし実用化されていたが、電磁界解析で有限要素法が使われ始めたのは有限要素法の歴史の中ではかなり最近のことであり、1960年代後半から1970年以降である。文献[2]にそれらの経緯が記されている。有限要素法が行うことは基本的には「微分方程式をある境界条件の下で解く」ということであり、工学、経済学など多くの分野の問題に適用できる。それでも電磁界解析において有限要素法の発達が遅れていたのは、応力を求める問題の場合には未知数がスカラー量で良かったが、電磁界を求めるにはベクトル量を求める必要があり、スカラーのポテンシャルを未知数として有限要素法を適用しても得られる解には、物理的には出てくるはずがない非物理解（スプリアス解と言う）が出てきてしまうことが原因であった。しかしベクトル基底関数が開発され、スカラー基底関数を使うノード・ベース有限要素法からベクトル基底関数を使うエッジ・ベース有限要素法へと発展し、有限要素法の電磁界解析問題への適用は成功してきた。

現在では市販の3次元構造を有限要素法で解析する汎用電磁界シミュレータ HFSS(Ansoft社とAgilent Technology社版がある。最初はAgilent社がAnsoft社に委託していたようだが、喧嘩別れしてしまったらしい)があり、様々な研究機関、企業等で使われている。



図 1 Boeing747-400 (<http://www.boeing.com/>)



図 2 タコマ橋落下事故 (<http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~masako/exp/melde/tacoma.html>)

## 1.1 有限要素法の特徴

- 要素に分けてメッシュを作って行列を解く問題に直す
- 微分方程式を直接数値的に解くのではなく、一度積分するので数値的に安定である
- 数学的には変分原理で説明される
- 周波数領域の解析法である

## 2. 座標変換と基底関数

ここでは、2次元の三角要素を扱う。変換の次数を高くすると曲辺を扱うことができる。

### 2.1 座標変換と面積座標

#### 2.1.1 1次の変換

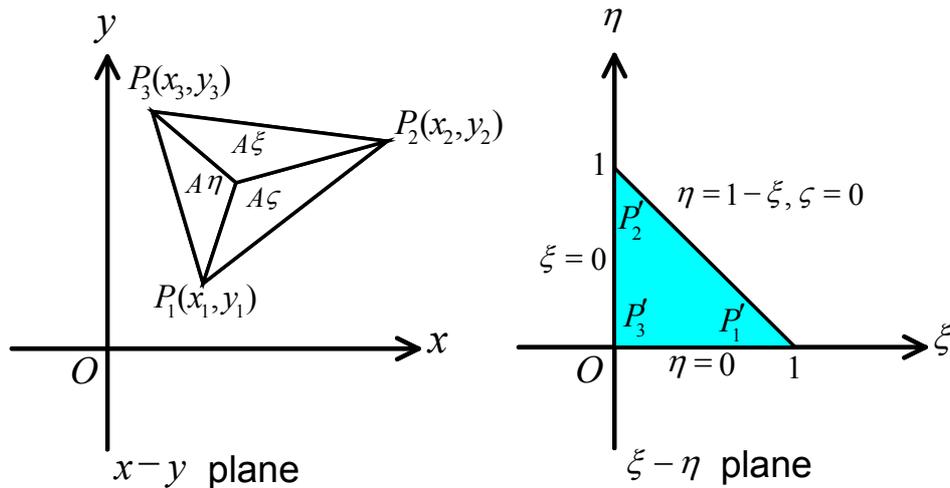


図 3 面積座標

2次元有限要素法では、解析領域を三角要素に分割する。要素行列の要素を計算する場合、その各領域内で面積分を行う必要がある。まともに積分しても積分できるが、場合分けが面倒な上、全ての要素について個別に積分しなければならない。そこで、図 3 左の一般の三角形（三角要素）を右のように決まった三角形に座標変換し、変換された座標で面積分を行うと場合分けをする必要がなく、さらに座標変換を全ての要素に対して行えば積分の値も使いまわしができて計算速度が向上する。また、基底関数を作るときも、決まった $\xi-\eta$ 平面で作成しておき、それを座標変換すればいいので楽になる。

図 3 の座標変換において $\xi-\eta$ 平面は面積座標と呼ばれる。 $x-y$ 平面上の三角形を $\xi-\eta$ 平面に移すことを考えると図に示されるように三角形内の各面積の比が $\xi, \eta, \zeta$ となっているからである。この考え方がわかりにくい場合は単に頂点 $P_1, P_2, P_3$ を $P'_1, P'_2, P'_3$ に座標変換したと思えばよい。この座標変換は「一次変換（拡大・縮小、回転）+平行移動」なので、**アフィン変換**である。

$$\underline{(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)}$$

$$\begin{cases} 1 = \xi + \eta + \zeta \\ x = x_1\xi + x_2\eta + x_3\zeta \\ y = y_1\xi + y_2\eta + y_3\zeta \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_3 + (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta \\ y = y_3 + (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta \end{cases} \quad (1)$$

変数変換 $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ に伴うヤコビアンを $J$ とすると、

$$J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = 2A$$

ただし、 $A$  は  $x-y$  平面上の三角形の面積である。意味を考えると、ヤコビアンは変数変換の変

化率を意味するし、 $\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$  はベクトル  $\overrightarrow{P_3P_1}$  と  $\overrightarrow{P_3P_2}$  の外積になっているから  $P_3P_1$  と

$P_3P_2$  を辺とする平行四辺形の面積となって、三角形の面積の 2 倍になることが理解できる。

$$\underline{(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)}$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_1$$

$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

(3)

### 積分公式

$$\iint_{S_e} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} f(x_3 + (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta, y_3 + (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta) J d\xi d\eta$$

$$\iint_{S_e} \xi^k \eta^l \zeta^m dx dy = 2A_e \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$$

ここで、 $S_e$  は三角要素が存在する範囲、 $A_e$  は三角要素の面積である。

## 2.2 スカラー基底関数

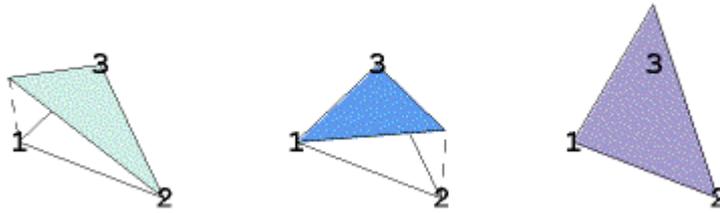


図 4 一次スカラー形状関数

有限要素法の三角要素内で使う基底関数はスカラー場解析の場合図 4 のような 3 つの基底関数がよく使われる。これは一次要素基底関数と言う。さらに、各頂点 1,2,3 において 1 つの基底関数だけが値を持ち、他の 2 つは 0 になっている。この性質は方程式を作るとき非常に便利であり、各基底関数の展開係数は解こうとしている未知関数の頂点の値を意味することになる。あるサンプリング点で他の基底関数の値が 0 になるので、このような基底関数を使う要素を**ラグランジュ要素(Lagrange elements)**と言う。ラグランジュ基底関数という名前はラグランジュの補間多項式に由来している。

### 2.1 1 次要素

一次要素なので、平面の形状関数を作る。よって、補間関数は次のように仮定できる。

$$\varphi(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta \quad (4)$$

$P'_1, P'_2, P'_3$  での値を  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  とすると、

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi(1,0) = a + b \\ \varphi_2 = \varphi(0,1) = a + c \\ \varphi_3 = \varphi(0,0) = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \varphi_3 \\ b = \varphi_1 - \varphi_3 \\ c = \varphi_2 - \varphi_3 \end{cases} \quad (5)$$

式(4)に式(5)を代入する。

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \varphi_3 + (\varphi_1 - \varphi_3)\xi + (\varphi_2 - \varphi_3)\eta \\ &= \underline{\xi}\varphi_1 + \underline{\eta}\varphi_2 + \underline{(1-\xi-\eta)}\varphi_3 \end{aligned}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  を変数として内部の値が補間されていることがわかる。これは点  $(x_1, y_1)$  で  $\varphi_1$ 、点  $(x_2, y_2)$  で  $\varphi_2$ 、点  $(x_3, y_3)$  で  $\varphi_3$  の値を取る平面である。また、各頂点では 1 つの基底関数のみが値を持つので、頂点 1 だけで値を持つ基底関数  $N_1(\xi, \eta)$  を求めるときには  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (1, 0, 0)$  とおいて  $N_1(\xi, \eta) = \xi$  となる。同様にして他の 2 つの基底関数も次のように求まる。

$$N_1(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_2(\xi, \eta) = \eta$$

$$N_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

実は、今の作業は  $\varphi(\xi, \eta)$  を  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  について整理して、 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  の係数を読み取るだけで  $N_1, N_2, N_3$  が求まる。 $N_1, N_2, N_3$  はまた、**形状関数(shape function)**とも呼ばれる。

これを式(2)を用いて座標変換すれば容易に全ての三角要素に対して基底関数を作れる。しかし、実際には式(1)で座標変換して  $\xi - \eta$  平面で面積分するのでその必要はない。図 4 にこの基底関数の例を示す。

## 2.3 ベクトル基底関数

### 2.3.1 1次要素

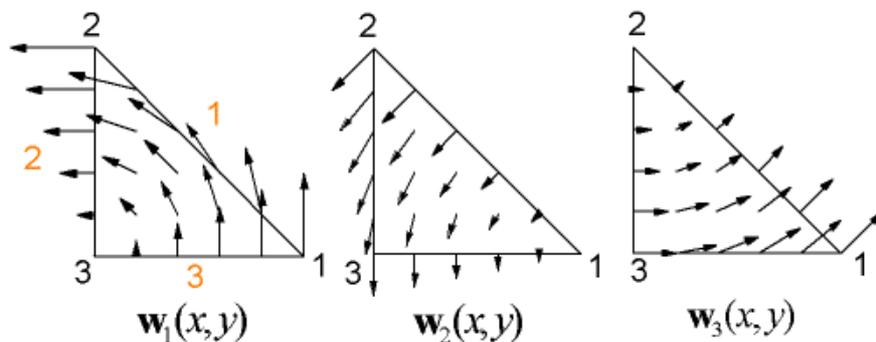


図 5 ベクトル基底関数一次要素

まず、基底関数の性質として次の性質を要求する。

- $w_i$  はエッジ  $i$  上でのみ一様な接線成分を持つ。他の 2 辺上では接線成分は 0 であり、法線成分は持っても構わない。

この条件を満たすように基底関数を作ると次のようになる。

$$w_1(x, y) = l_1(\xi \nabla \eta - \eta \nabla \xi)$$

$$w_2(x, y) = l_2(\eta \nabla \zeta - \zeta \nabla \eta)$$

$$w_3(x, y) = l_3(\zeta \nabla \xi - \xi \nabla \zeta)$$

ここで、 $\nabla$  は  $(x, y)$  に関する微分演算子である。これらのベクトル基底関数のフィールドを図 5 に示す。

$w_1$  の条件と構成法について説明する。

- エッジ 2 とエッジ 3 上ではフィールドの接線成分が 0 である。
- $\nabla \eta$  に掛かっている  $\xi$  はエッジ 2 上で  $\nabla \eta$  の寄与を無くすためである。 $\nabla \eta$  は  $\eta$  が増えていく方向を表すから、辺  $P_3, P_1$  上ではフィールドが垂直になっているのがわかる。

- $\eta\nabla\xi$  に付いている負号はフィールドの向きを揃えるためである。
- $\ell_1$  はエッジ上でフィールドの接線成分を 1 に規格化するための係数である。

[基底関数を  $\xi, \eta$  座標で表す]

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\ell_1}{2A} \{ \hat{x}(\xi b_2 - \eta b_1) + \hat{y}(\xi c_2 - \eta c_1) \}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\ell_2}{2A} \{ \hat{x}(\eta b_3 - \zeta b_2) + \hat{y}(\eta c_3 - \zeta c_2) \}$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\ell_3}{2A} \{ \hat{x}(\zeta b_1 - \xi b_3) + \hat{y}(\zeta c_1 - \xi c_3) \}$$

[基底関数を  $x, y$  座標で表す]

$$A_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$A_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$A_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$B_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

$$B_2 = b_2 c_3 - b_3 c_2$$

$$B_3 = b_3 c_1 - b_1 c_3$$

$$C_1 = c_1 a_2 - c_2 a_1$$

$$C_2 = c_2 a_3 - c_3 a_2$$

$$C_3 = c_3 a_1 - c_1 a_3$$

(6)

$$\mathbf{w}_i = \frac{\ell_i}{(2A)^2} \{ \hat{x}(A_i - B_i y) + \hat{y}(C_i - B_i x) \} \quad (i=1,2,3)$$

### 3. ノードベース有限要素法

#### 3.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件)

有限要素法で解析する航空、土木、建築、電磁界などの工学の問題は数学の問題として共通部分を抽出すれば、「微分方程式を与えられた境界条件の下で解く」という問題を解いているだけである。

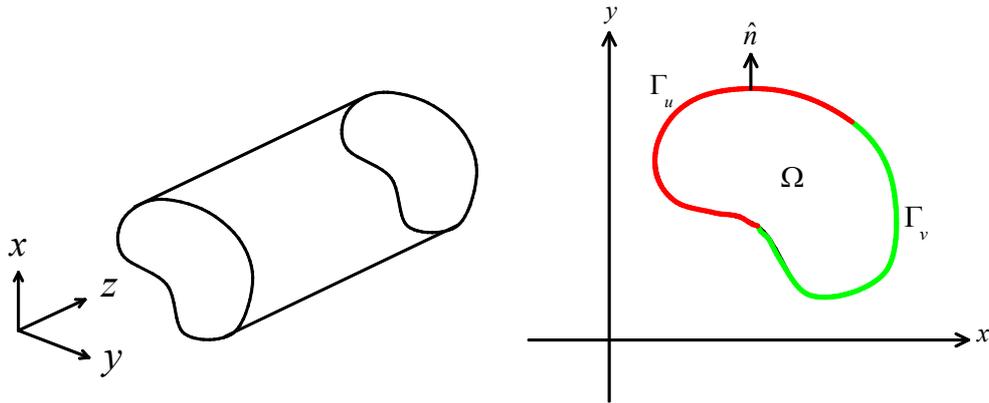


図 6 2次元問題

本稿では電磁界解析を目的としているので例として図 6 に示すような導波路問題を考え、モード関数を求める問題を考える。その場合の未知数は各モードの断面の電磁界分布と伝搬定数（位相定数）である。この問題に対する微分方程式は付録 A.1.3 の式(32)より次のヘルムホルツ方程式である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_{cu}^2 \phi = 0 \quad (7)$$

上の微分方程式を次の境界条件の下で解く

$$\begin{cases} \phi = u & (\Gamma_u) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} + w\phi = v & (\Gamma_v) \end{cases}$$

$\Gamma_u$  上での境界条件は境界上で関数  $\phi$  の値を直接指定しており、これを**第一種境界条件**、または**ディリクレ条件**と呼ばれる。 $\Gamma_v$  上での境界条件は**第三種境界条件**、または**混合境界条件**と呼ばれる。特に  $w=0$  のとき、関数  $\phi$  の境界垂直方向の微係数を指定しており、これを**第二種境界条件**、または**ノイマン条件**と呼ばれる。

上の問題に対する生成汎関数（変分問題が微分方程式を解くのと等価になる汎関数）は次のようになる（汎関数、変分などについては付録 A.2 参照）。今はどうやってこの汎関数を上の微分方程式から作ったのか納得できないかもしれないが、とりあえず変分して確認してほしい。

$$F[\phi] = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - k_{cu}^2 \phi^2 \right] dx dy - \int_{\Gamma_v} \left( v\phi - \frac{w}{2} \phi^2 \right) d\Gamma \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F[\phi + \delta\phi] = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial y} \right)^2 - k_{cu}^2 (\phi + \delta\phi)^2 \right] dx dy \\ & - \int_{\Gamma_v} \left\{ v(\phi + \delta\phi) - \frac{w}{2} (\phi + \delta\phi)^2 \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} + \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \\
&\quad + \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} + \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&\quad - k_{cu}^2 (\phi^2 + 2\phi\delta\phi + \delta\phi^2)] dx dy \\
&\quad - \int_{\Gamma_v} \left\{ v(\phi + \delta\phi) - \frac{w}{2} (\phi^2 + 2\phi\delta\phi + \delta\phi^2) \right\} d\Gamma
\end{aligned}$$

二次の微小変化を無視すると

$$\begin{aligned}
F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] &= \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) - k_{cu}^2 \phi \delta \phi \right\} dx dy \\
&\quad - \int_{\Gamma_v} (v \delta \phi - w \phi \delta \phi) d\Gamma
\end{aligned}$$

ここで、 $\partial \delta \phi / \partial x$  を  $\delta \phi$  で表現したいから面積分に2次元版のガウスの定理を適用する（1次元で言う部分積分）。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \delta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \delta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} &= \nabla \cdot \left( \hat{x} \delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{y} \delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \left( \delta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \delta \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\
&= \nabla \cdot (\delta \phi \nabla \phi) - \delta \phi \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] &= \iint_{\Omega} \left\{ \nabla \cdot (\delta \phi \nabla \phi) - \delta \phi \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - k_{cu}^2 \phi \delta \phi \right\} dx dy \\
&\quad - \int_{\Gamma_v} (v - w \phi) \delta \phi d\Gamma \\
&= - \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + k_{cu}^2 \phi \right\} \delta \phi dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma} (\delta \phi \nabla \phi) \cdot \hat{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_v} (v - w \phi) \delta \phi d\Gamma \\
&= - \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + k_{cu}^2 \phi \right\} \delta \phi dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi d\Gamma - \int_{\Gamma_v} (v - w \phi) \delta \phi d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\iint_{\Omega} \{(\nabla\phi) \cdot (\nabla\phi) + k_{cu}^2 \phi\} \delta\phi dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma_u} \frac{\partial\phi}{\partial n} \delta\phi d\Gamma + \int_{\Gamma_v} \left( \frac{\partial\phi}{\partial n} - v + w\phi \right) \delta\phi d\Gamma
\end{aligned}$$

さて、関数  $\phi$  の微小変化  $\delta\phi$  に対する汎関数  $F[\phi]$  の変化が 0 となるような条件を上式の式から求めてみる。 $\delta\phi$  という関数は任意に選ぶことができる。しかし境界  $\Gamma_u$  上はディリクレ条件であり、問題を解くときにこちらで値を指定するから微小変化量  $\delta\phi$  は  $\Gamma_u$  上では 0 のものを用いる。すると上の式の  $\Gamma_u$  上の線積分は 0 となる。ディリクレ条件は問題を解くと強制的に値を指定するので **強制境界条件** とも言われる。また、 $\Gamma_v$  上の線積分は混合境界条件から 0 となり、汎関数で組み込んでいる。もし  $v = w = \partial\phi/\partial n = 0$  ならば汎関数に線積分の項を組み込む必要も無く楽である。実際の応用上はそのような境界条件がよく使われるため、境界条件は何も考えなくても汎関数に組み込まれることになる。汎関数に境界条件が組み込まれていて、後で何も特別な処理をする必要がないので、混合境界条件は **自然境界条件** とも言われる。

この章では微分方程式を与えられた境界条件の下で解く問題と、汎関数の極小値を求める問題が等価であることを説明した。

### 3.2 有限要素法の適用

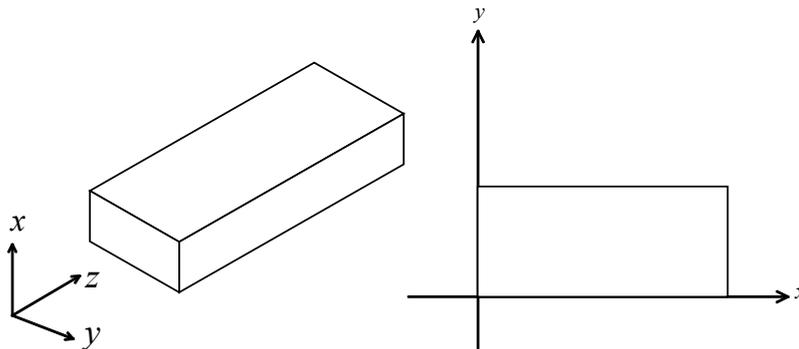


図 7 方形導波管

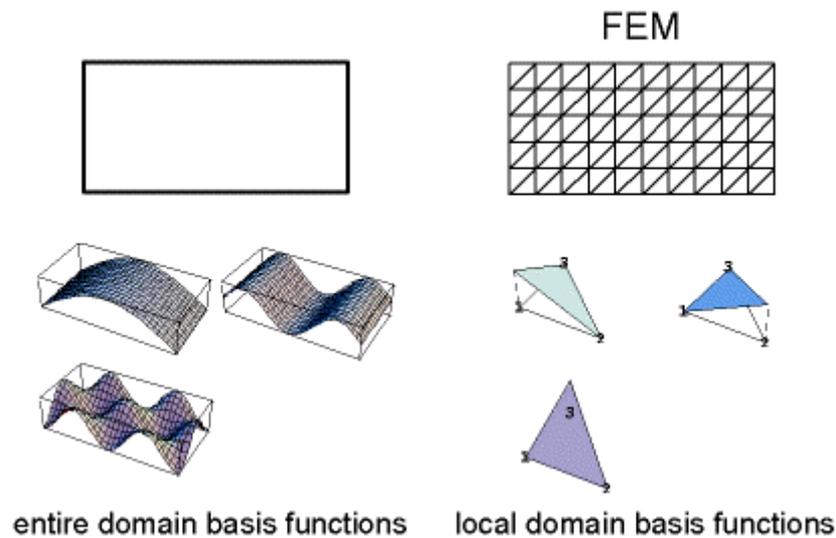


図 8 全域関数と局所関数

### 3.2.1 メッシュと基底関数

問題の例として簡単のために図 7 に示すような方形導波管の TE モード解析を取り上げる。付録 A.1.3 より、TE モードの場合、 $E_x \propto \partial H_z / \partial y$ 、 $E_y \propto \partial H_z / \partial x$  なので、すべての導波管壁面上で  $\partial \phi / \partial n = 0$  の境界条件となり、式(8)の線積分の項が消えて次のようになる。

$$F[\phi] = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - k_{cu}^2 \phi^2 \right] dx dy \quad (9)$$

この汎関数に変分原理を適用して未知の関数  $\phi (= H_z)$  を求める方法を説明する。まず、未知の関数  $\phi$  を既知の基底関数の線形和として展開する。基底関数の選び方には図 8 に示すように全域基底関数で展開する方法と局所基底関数で展開する方法がある。この問題の場合には構造が簡単だから前者でもいいが、一般に複雑な断面形状を有する導波路の解析を行いたいので、有限要素法では後者の局所基底関数の和として未知関数を展開する。それが「有限要素法」と言う名前の由来でもある。値が要素内では急激に変化しない程度に細かく要素分割するので、要素内では簡単な基底関数の和で十分いい精度で未知関数を近似できる。

また、要素に分割する場合、2次元の場合には三角形や四角形などのいろいろな多角形が考えられる。実際に三角形も四角形も要素として使われているが、複雑な構造に対して要素分割する場合、三角形は多角形を構成する最小単位なので柔軟性が高く、一番多く使われている。図 8 の右上のように要素分割された要素の集合をメッシュ(mesh)と言う。

3.2.2 基底関数による展開

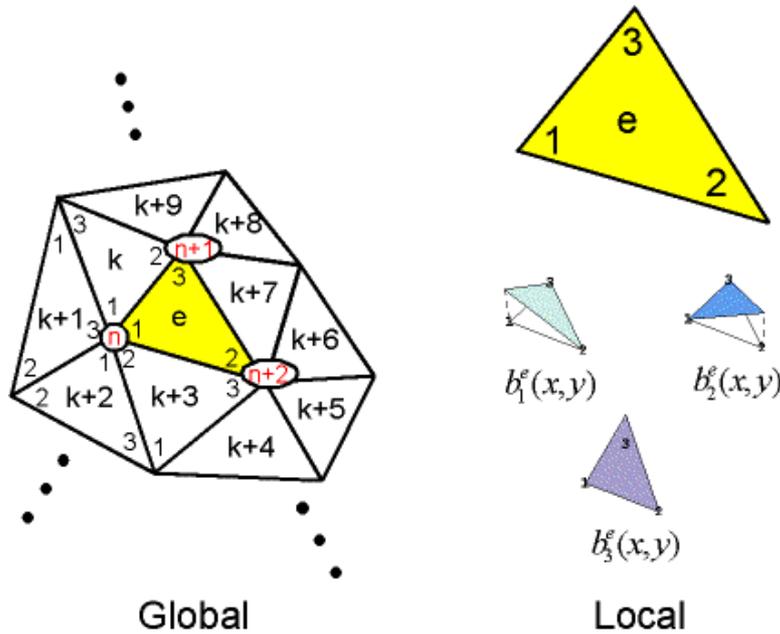


図 9 要素分割

今、領域内を  $N_e$  個の三角要素に分割し、各要素内で定義される 3 個の基底関数を用いて未知スカラー関数  $\phi$  を次のように表す（基底関数についての詳しいことは別の章を参照）。

$$\phi(x, y) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 a_i^e b_i^e(x, y) \tag{10}$$

$b_i^e(x, y)$  は要素  $e$  内の  $i$  番目の節点の基底関数である。 $a_i^e$  はその基底関数に対する重みである。

$b_i^e(x, y)$  は図 9 の右に示されるように要素内の節点  $i$  のみで 1 の値を持ち、他の 2 つの節点では 0 の値を取る。つまり、 $a_i^e$  はその節点での未知数  $\phi$  の値そのものである。

3.2.3 要素行列

式(10)を式(9)に代入すると

$$F[\phi] = F_1(a_i^e) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 a_i^e \frac{\partial b_i^e(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 a_i^e \frac{\partial b_i^e(x, y)}{\partial y} \right)^2 - k_{cu}^2 \left( \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 a_i^e b_i^e(x, y) \right)^2 \right] dx dy$$

また、異なる要素の基底関数は互いに定義域が重なることはなく、異なる要素の基底関数同士を掛け算したら 0 になるので、要素に対する和は 2 乗の外、さらに積分の外に出すことができる。また、積分範囲は各要素内  $\Omega_e$  に限定できる。

$$\begin{aligned}
F_1(a_i^e) &= \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 a_i^e \frac{\partial b_i^e(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 a_i^e \frac{\partial b_i^e(x,y)}{\partial y} \right)^2 - k_{cu}^2 \left( \sum_{i=1}^3 a_i^e b_i^e(x,y) \right)^2 \right] dx dy \\
&= \sum_{e=1}^{N_e} \left[ \iint_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left\{ \left( \sum_{i=1}^3 a_i^e \frac{\partial b_i^e(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 a_i^e \frac{\partial b_i^e(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - k_{cu}^2 \iint_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 a_i^e b_i^e(x,y) \right)^2 dx dy \right]
\end{aligned}$$

ここで、変分原理を適用する。すでに未知関数  $\phi$  を既知の基底関数で展開しているため、汎関数  $F$  の極小値を求めるには  $F$  を全ての  $a_i^e$  で微分して 0 になる条件式の連立一次方程式を作る。このように離散化する方法をリッツ(Ritz)法と言う[4]。要素  $e$  内の変数について行くと、

$$\partial F_1(a_i^e) / \partial a_i^e = 0 \text{ より、}$$

[参考 (計算方法) ]

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \text{ とする。}$$

$$\partial f(x) / \partial a_n = f_n(x)$$

$$\begin{aligned}
\{f(x)\}^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right\}^2 = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right\} \\
&= a_1 f_1(x) \{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots\} + a_2 f_2(x) \{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots\} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \{f(x)\}^2 / \partial a_1 &= f_1(x) \{2a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots\} + a_2 f_2(x) f_1(x) + \dots \\
&= 2f_1(x) \{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots\} \\
&= 2f_1(x) \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)
\end{aligned}$$

$$\partial \{f(x)\}^2 / \partial a_n = 2f_n(x) \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$$

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega} \left[ a_1^e \left( \frac{\partial b_1^e(x,y)}{\partial x} \right)^2 + a_2^e \frac{\partial b_1^e(x,y)}{\partial x} \frac{\partial b_2^e(x,y)}{\partial x} + a_3^e \frac{\partial b_1^e(x,y)}{\partial x} \frac{\partial b_3^e(x,y)}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + a_1^e \left( \frac{\partial b_1^e(x,y)}{\partial y} \right)^2 + a_2^e \frac{\partial b_1^e(x,y)}{\partial y} \frac{\partial b_2^e(x,y)}{\partial y} + a_3^e \frac{\partial b_1^e(x,y)}{\partial y} \frac{\partial b_3^e(x,y)}{\partial y} \right] dx dy \\
&- k_{cu}^2 \iint_{\Omega} \left\{ a_1^e (b_1^e(x,y))^2 + a_2^e b_1^e(x,y) b_2^e(x,y) + a_3^e b_1^e(x,y) b_3^e(x,y) \right\} dx dy = 0
\end{aligned}$$

整理すると、

$$a_1^e K_{11}^{e\nabla} + a_2^e K_{12}^{e\nabla} + a_3^e K_{13}^{e\nabla} = k_{cu}^2 (a_1^e K_{11}^e + a_2^e K_{12}^e + a_3^e K_{13}^e)$$

ここで、

$$K_{ij}^{e\nabla} = \iint_{\Omega_e} \left[ \frac{\partial b_i^e(x,y)}{\partial x} \frac{\partial b_j^e(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial b_i^e(x,y)}{\partial y} \frac{\partial b_j^e(x,y)}{\partial y} \right] dx dy$$

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} b_i^e(x,y) b_j^e(x,y) dx dy$$

同様に、 $\partial F_1(a_i^e)/\partial a_2^e = 0$ ,  $\partial F_1(a_i^e)/\partial a_3^e = 0$  を計算すると要素  $e$  に関して次の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} \partial F_1(a_i^e)/\partial a_1^e &\rightarrow \begin{bmatrix} K_{11}^{e\nabla} & K_{12}^{e\nabla} & K_{13}^{e\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix} \\ \partial F_1(a_i^e)/\partial a_2^e &\rightarrow \begin{bmatrix} K_{21}^{e\nabla} & K_{22}^{e\nabla} & K_{23}^{e\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix} \\ \partial F_1(a_i^e)/\partial a_3^e &\rightarrow \begin{bmatrix} K_{31}^{e\nabla} & K_{32}^{e\nabla} & K_{33}^{e\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix} \end{aligned} = k_{cu}^2 \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix} \quad (11)$$

上の行列表現は要素  $e$  に対して汎関数が極小値を持つための条件であり、要素方程式と呼ばれる。

$K_{ij}^{e\nabla}$ ,  $K_{ij}^e$  を要素行列(element matrix)と言う。

### [要素行列の計算]

点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  を頂点とする三角形の要素行列を計算する。

$P_1, P_2, P_3$  は三角形を左に回るような頂点とする。

$$K_{ij}^{e\nabla} = \frac{1}{(2A)^2} \iint_{\Omega} (b_i b_j + c_i c_j) dx dy = \frac{1}{(2A)^2} (b_i b_j + c_i c_j) \iint_{\Omega} dx dy = \frac{1}{4A} (b_i b_j + c_i c_j)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \iint_{\Omega} b_i^e(x,y) b_j^e(x,y) dx dy = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} b_i^e(x,y) b_j^e(x,y) J d\xi d\eta \\ &= 2A \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} b_i^e(x,y) b_j^e(x,y) d\xi d\eta \\ &= \begin{cases} A/6 & (i=j) \\ A/12 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned}$$

$A$  は三角形  $P_1, P_2, P_3$  の面積であり、 $b_i, c_i$  は基底関数の章の式(3)で説明されている座標変換パラメータである。

## 3.2.4 系行列

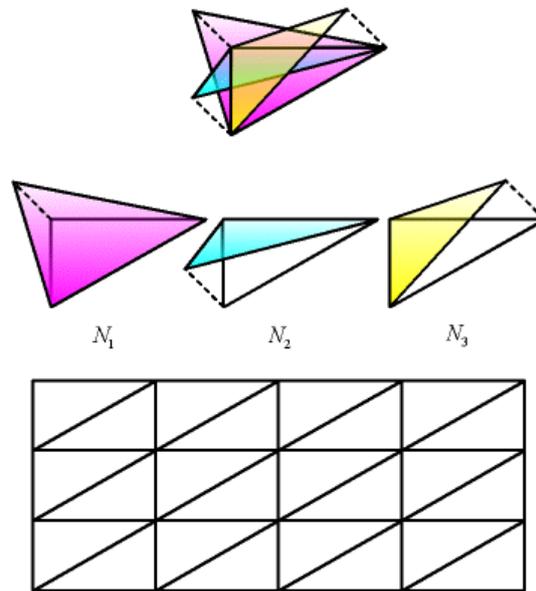


図 10 ローカル基底関数

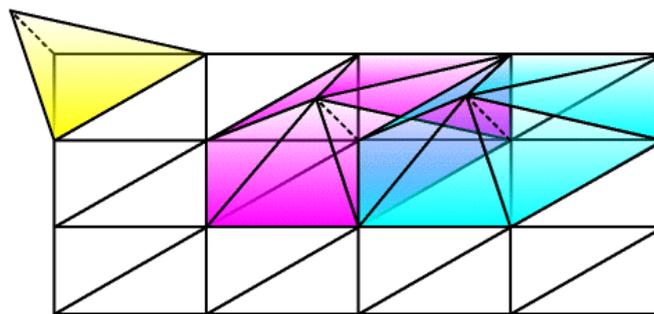


図 11 グローバル基底関数

構造全体の問題を解くためには要素行列を結合して構造固有の系行列を作る必要がある。そのための条件として節点での未知数の値の連続条件を用いる。

各節点は図 9 の左に示すⓐの節点のようにいくつかの要素によって同じ節点が共有される。このようにメッシュ全体を見たときにⓐのように一意に節点に番号を振るとき、その頂点の番号をグローバル節点番号と言う。ここで、境界上の節点に対しても今のところはグローバル番号を振っておいて統一的に扱い、後でその境界条件を考慮する。それに対して、要素内で 1,2,3 と示されているように要素内だけで節点に番号を振るとき、その節点の番号をローカル節点番号という。今、系のグローバル節点数を  $N_n$  とする。

グローバル節点番号はいくつかの要素のローカル節点番号で共有される。よって、式(10)で異なる要素の  $a_i^e$  は共有される節点において同じ値になるように (未知関数  $\phi(x, y)$  は連続だから) 拘束される。図 9 の左のⓐを考えてみると、

$$a_1^e = a_1^k = a_3^{k+1} = a_1^{k+2} = a_3^{k+3} = A_n \quad (12)$$

となる。⑩における未知関数の値を  $A_n$  と置いた。この関係で、局所的な要素が解析領域全体では繋がっているのである。方形導波管断面の例で説明すると、図 10 のように各要素内で自由に定義されているローカル基底関数が節点での関数の連続条件で拘束されて図 11 のようなグローバル基底関数となる。具体的には、新たにグローバル節点番号上の展開係数  $A_n$  (それを節点とする要素の基底関数の共通の重み係数) を未知数とする行列方程式を立てる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^\nabla & \cdots & K_{1n}^\nabla & \cdots & K_{1N_n}^\nabla \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1}^\nabla & \cdots & K_{nn}^\nabla & & K_{nN_n}^\nabla \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N_n1}^\nabla & \cdots & K_{N_n n}^\nabla & \cdots & K_{N_n N_n}^\nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \vdots \\ A_{N_n} \end{bmatrix} = k_{cu}^2 \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1N_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} & & K_{nN_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N_n1} & \cdots & K_{N_n n} & \cdots & K_{N_n N_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \vdots \\ A_{N_n} \end{bmatrix} \quad (13)$$

このようにして全体の構造が考慮された系行列が作成される。図 9 の例では例えば

$$K_{mn}^\nabla = K_{11}^{e\nabla} + K_{11}^{k\nabla} + K_{33}^{k+1\nabla} + K_{11}^{k+2\nabla} + K_{22}^{k+3\nabla}$$

となる。

まとめると次のようになる。

- (i)  $A_1^g, A_2^g, A_3^g$  をグローバル節点番号に対応する展開係数とし、ローカル節点番号 (の未知数) が
- $$a_1^e \rightarrow A_1^g, a_2^e \rightarrow A_2^g, a_3^e \rightarrow A_3^g$$
- のように対応するとする。
- (ii) 要素行列  $K_{ij}^{e\nabla}$ ,  $K_{ij}^e (i, j = 1, 2, 3)$  をそれぞれ系行列  $K_{A_i^g A_j^g}^\nabla, K_{A_i^g A_j^g}$  に足す。
- (iii) (i), (ii) の操作を全要素に対して行う。

今の操作をプログラムリスト風を書くとなつぎのようになる。

```
do m=1, Nelem
  do i=1,3
    do j=1,3
      KAig Ajg∇ = KAig Ajg∇ + Kijm∇
      KAig Ajg = KAig Ajg + Kijm
    end do
  end do
end do
```

この系行列の作成過程が理解しにくい場合は、式(10)の展開に最初から式(12)を適用して行列方程式を作ってみるとわかりやすい。そのとき

$$\phi = \sum_{i=1}^{N_n} A_i \left( \sum_{j=1}^{N_b^i} B_j^i(x, y) \right)$$

と表現される。 $B_j^i(x, y)$ は節点*i*で重み係数  $A_i$  がかかる  $j$  番目の要素基底関数である。節点*i*を共

有する要素は  $N_b^i$  個ある。 $\left( \sum_{j=1}^{N_b^i} B_j^i(x, y) \right)$ の部分は図 11 に示される節点*i*のグローバル基底関数で

ある。

### 3.2.5 境界条件の適用

周囲上の境界条件を考慮する。

#### ディリクレ条件

ディリクレ条件である境界上のグローバル節点  $m$  に対しては、その節点の値が指定されているので、 $A_m$  は最初から未知数ではない。そこで、系方程式の中の  $A_m$  を取り外す。具体的には系行列の  $m$  行と  $m$  列を取り除いてよりサイズの1つ小さな行列を作ればよい。この操作を全てのディリクレ条件境界上の節点に対して行う。

#### 混合境界条件、ノイマン条件

ノイマン条件は式(8)に周回積分として組み込まれているので何もする必要はない。周回積分はノイマン条件の境界壁に接する辺を持つ要素内のみで行う。特に、上記の例題のように  $\partial\phi/\partial n = 0$  のときは線積分の評価も行う必要がない。

### 2.2.6 固有値問題を解く

出来上がった行列方程式は未知係数ベクトル  $[A_i]$  と波数  $k_{cu}$  を未知数とするので**固有値問題 (eigenvalue problem)**となる。各固有値に対応してモードが求まる。波数の2乗  $k_{cu}^2$  が**固有値 (eigenvalue)**として、モード関数を決定するための重みベクトルが**固有ベクトル(eigenvector)**として求まる。橋やビルや航空機の共振周波数を求める問題もこのように決定される。

なお、この問題の場合波源 (力学では外力に相当する) がなかったので固有値問題となったが、波源がある場合は連立一次方程式を解いてフィールドを決定する問題となる。

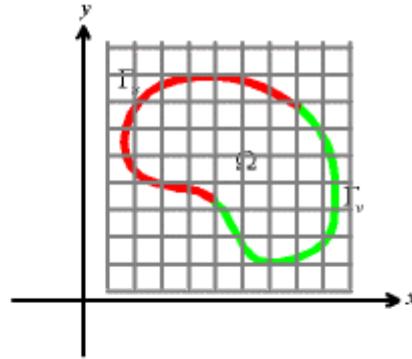
要素分割数を増やせばより精度の高い結果が得られる。また、要素分割するときには極端に細長くメッシュを切ったら精度が落ちる[6](p.66-74)。また、なるべく扁平率の小さな三角形で自動的にメッシュを生成するアダプティブメッシュ生成アルゴリズムもいくつか存在する。

3.3. まとめ

**微分方程式**

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_{cw}^2 \phi = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \phi = u & (\Gamma_1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} + w\phi = v & (\Gamma_2) \end{cases}$$



**数値計算法**

1. 放物型 (陽解法、Crank-Nicolson法)
2. 双曲型 (差分法)
3. 楕円型 (差分近似、反復法 [Jacobi法、Gauss-Seidel法、逐次加速緩和法、ADI法])

**変分原理**

$$F[\phi] = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - k_{cw}^2 \phi^2 \right] dx dy - \int_{\Gamma} \left( v\phi - \frac{w}{2} \phi^2 \right) d\Gamma \quad (2)$$

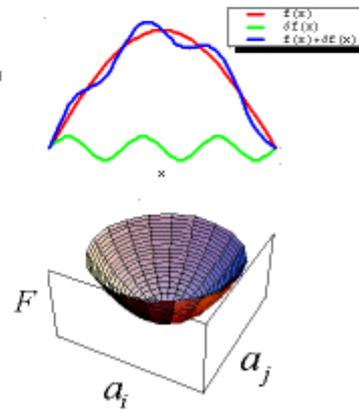
**変分法**

$\phi$  を少し変化させて  $\phi + \delta\phi$  にしても  $\delta F = 0$

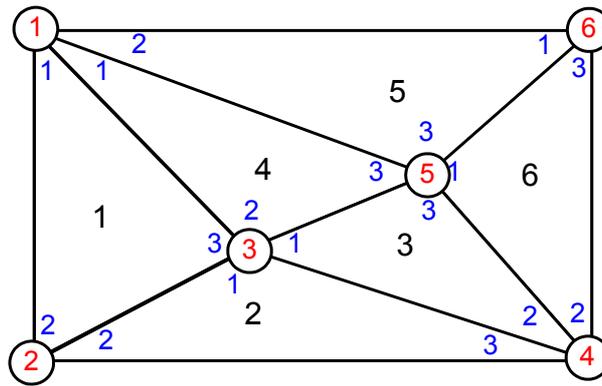
となる  $\phi$  : (1) の解

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad (i=1, \dots, N) \rightarrow \text{連立方程式}$$



3.4 系行列生成例



Black: element number  
 Blue: local node number  
 Red: global node number

図 12 例題メッシュ

ここでは、記号の簡単化のため、

$$K_{ij}^{e\nabla} \rightarrow T_{ij}^e, K_{ij}^e \rightarrow U_{ij}^e$$

$$K_{ij}^{\nabla} \rightarrow T_{ij}, K_{ij} \rightarrow U_{ij}$$

とおく。

**要素行列**

$$\begin{bmatrix} T_{11}^1 & T_{12}^1 & T_{13}^1 \\ T_{21}^1 & T_{22}^1 & T_{23}^1 \\ T_{31}^1 & T_{32}^1 & T_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{bmatrix} = k_{cu}^{-2} \begin{bmatrix} U_{11}^1 & U_{12}^1 & U_{13}^1 \\ U_{21}^1 & U_{22}^1 & U_{23}^1 \\ U_{31}^1 & U_{32}^1 & U_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{bmatrix}$$

...

$$\begin{bmatrix} T_{11}^6 & T_{12}^6 & T_{13}^6 \\ T_{21}^6 & T_{22}^6 & T_{23}^6 \\ T_{31}^6 & T_{32}^6 & T_{33}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^6 \\ a_2^6 \\ a_3^6 \end{bmatrix} = k_{cu}^{-2} \begin{bmatrix} U_{11}^6 & U_{12}^6 & U_{13}^6 \\ U_{21}^6 & U_{22}^6 & U_{23}^6 \\ U_{31}^6 & U_{32}^6 & U_{33}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^6 \\ a_2^6 \\ a_3^6 \end{bmatrix}$$

**要素行列**

T 行列

$$\begin{aligned} \partial/\partial A_1 \rightarrow & \left[ \begin{array}{cccccc} T_{11}^1 + T_{11}^4 + T_{22}^5 & T_{12}^1 & T_{13}^1 + T_{12}^4 & 0 & T_{13}^4 + T_{23}^5 & T_{21}^5 \\ T_{21}^1 & T_{22}^1 + T_{22}^2 & T_{23}^1 + T_{21}^2 & T_{23}^2 & 0 & 0 \\ T_{31}^1 + T_{21}^4 & T_{32}^1 + T_{12}^2 & T_{33}^1 + T_{11}^2 + T_{11}^3 + T_{22}^4 & T_{13}^2 + T_{12}^3 & T_{13}^3 + T_{23}^4 & 0 \\ 0 & T_{23}^2 & T_{13}^2 + T_{12}^3 & T_{33}^2 + T_{22}^3 + T_{22}^6 & T_{32}^3 + T_{12}^6 & T_{32}^6 \\ T_{13}^4 + T_{23}^5 & 0 & T_{13}^3 + T_{23}^4 & T_{23}^3 + T_{21}^6 & T_{33}^3 + T_{33}^4 + T_{33}^5 + T_{11}^6 & T_{13}^5 + T_{31}^6 \\ T_{21}^5 & 0 & 0 & T_{23}^6 & T_{31}^5 + T_{13}^6 & T_{11}^5 + T_{33}^6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、節点 1,2,4,6 においては  $A_1 = A_2 = A_4 = A_6 = 0$  なので、それらに対応する行と列を取り除く

$$\begin{aligned} \partial/\partial A_1 \rightarrow & \left[ \begin{array}{cccccc} T_{11}^1 + T_{11}^4 + T_{22}^5 & T_{12}^1 & T_{13}^1 + T_{12}^4 & 0 & T_{13}^4 + T_{23}^5 & T_{21}^5 \\ T_{21}^1 & T_{22}^1 + T_{22}^2 & T_{23}^1 + T_{21}^2 & T_{23}^2 & 0 & 0 \\ T_{31}^1 + T_{21}^4 & T_{32}^1 + T_{12}^2 & T_{33}^1 + T_{11}^2 + T_{11}^3 + T_{22}^4 & T_{13}^2 + T_{12}^3 & T_{13}^3 + T_{23}^4 & 0 \\ T_{23}^2 & T_{13}^2 + T_{12}^3 & T_{33}^2 + T_{22}^3 + T_{22}^6 & T_{32}^3 + T_{12}^6 & T_{32}^6 & 0 \\ T_{13}^4 + T_{23}^5 & 0 & T_{13}^3 + T_{23}^4 & T_{23}^3 + T_{21}^6 & T_{33}^3 + T_{33}^4 + T_{33}^5 + T_{11}^6 & T_{13}^5 + T_{31}^6 \\ T_{21}^5 & 0 & 0 & T_{23}^6 & T_{31}^5 + T_{13}^6 & T_{11}^5 + T_{33}^6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} T_{33}^1 + T_{11}^2 + T_{11}^3 + T_{22}^4 & T_{13}^3 + T_{23}^4 \\ T_{13}^3 + T_{23}^4 & T_{33}^3 + T_{33}^4 + T_{33}^5 + T_{11}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_5 \end{bmatrix}$$

U 行列についても同様の操作を行い、固有値問題を解く。

#### 4. ノードベース有限要素法 (ガラーキソ法)

##### 4.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件)

3.1 節と全く同じ例題を用いる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_{cu}^2 \phi = 0 \tag{14}$$

上の微分方程式を次の境界条件の下で解く

$$\begin{cases} \phi = u & (\Gamma_u) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} + w\phi = v & (\Gamma_v) \end{cases}$$

##### 4.2 重み付け残差法と弱形式

与えられた微分方程式に対して式(8)のような汎関数を作る方法についてはまだ説明していません。式(8)は変分して生成汎関数となっていることを確認しましたが、実はその汎関数は変分演算に慣れた人が予想して作ったのである。一般には微分方程式に対する汎関数は存在しないことがある。これは変分演算が微分演算に似ていることを考えると「一般の関数は必ずしも積分できる訳ではない」という事実 に似ている。一般の関数が積分できない理由は、任意関数の和については線形性から積分公式が確実に存在するが、積については積分公式 (部分積分はそれに近いが十

分ではない)が存在しないからである。「一般の関数は必ずしも積分できる訳ではない」という事実はガロア理論によって証明されている(ガロア理論は「5次以上の方程式に対する解の公式は存在しない」ということを証明したことで有名である)。例えば、電磁波問題の有限要素法解析では、損失がある場合の問題を支配する微分方程式の汎関数は存在しない。これでは一般の解析ができず、気分が悪い。しかし、変分原理を用いなくてもこれから説明する重み付け残差法(付録A.3参照)の特殊な場合であるガラーキンの法を用いると一般の微分方程式の問題を有限要素法で解析できる。ガラーキンの法を用いると、汎関数が存在する問題に対してはガラーキンの法を使った場合も全く同じ行列方程式が得られる。つまり、ガラーキンの法は変分原理をより一般の問題に拡張できるようにした手法と考えてよい。

さて、式(14)は領域 $\Omega$ の至る所で成立することを要求している。そのために、次のような操作を考える。今、 $W$ を領域 $\Omega$ 内で定義される任意の関数とする。すると、式(14)が領域 $\Omega$ 内で常に成り立つならば任意の関数 $W$ に対して常に次の式を満たさなければならない。

$$\iint_{\Omega} W \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_{cu}^2 \phi \right) dS = 0 \quad (15)$$

左辺は**残差(Residual)**と呼ばれ、微分方程式の誤差量に関数 $W$ で重み付けをして積分した値である。 $W$ は**重み関数(weighting function)**または**試験関数(trial function)**などと呼ばれる。数値計算で $\phi$ の近似値を求めた場合、誤差量の積分値は当然0に近いのが望ましい。 $\phi$ が厳密に微分方程式を満たすならば残差は完全に0になる。

式(15)を変形すると、

$$\iint_{\Omega} W (\nabla_t \cdot \nabla_t \phi + k_{cu}^2 \phi) dS = 0$$

ベクトル公式

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$$

を使って変形すると、

$$\iint_{\Omega} \left\{ \nabla_t \cdot (W\nabla_t \phi) - (\nabla_t W) \cdot (\nabla_t \phi) + k_{cu}^2 W\phi \right\} dS = 0$$

$$\iint_{\Omega} \left[ (\nabla_t W) \cdot (\nabla_t \phi) - k_{cu}^2 W\phi \right] dS - \iint_{\Omega} \nabla_t \cdot (W\nabla_t \phi) dS = 0$$

ガウスの公式を使うと

$$\iint_{\Omega} \left[ (\nabla_t W) \cdot (\nabla_t \phi) - k_{cu}^2 W\phi \right] dS - \oint_{\Gamma} W \nabla_t \phi \cdot \hat{n} d\Gamma = 0$$

$$\iint_{\Omega} \left[ (\nabla_t W) \cdot (\nabla_t \phi) - k_{cu}^2 W\phi \right] dS - \oint_{\Gamma} W \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0$$

ここで、3.2節の方形導波管の解析に限定すると、 $\phi = H_z$ である。PEC境界上では磁界の接線成分の境界法線方向への変化率が0(ノイマン条件)である(付録A.4参照)。よって、

$$\iint_{\Omega} [(\nabla_t W) \cdot (\nabla_t \phi) - k_{cu}^2 W \phi] dS = 0$$

$\phi$  を式(10)と同様に展開する。

$$\phi(x, y) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^3 a_j^e b_j^e(x, y)$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^3 a_j^e \iint_{\Omega} [(\nabla_t W) \cdot (\nabla_t b_j^e(x, y)) - k_{cu}^2 W b_j^e(x, y)] dS = 0$$

ここで、

$$W = b_i^e(x, y) \quad (i=1,2,3, e=1, \dots, N_e)$$

を上の方程式に1つずつ代入し、 $3N_e$ 個の連立一次方程式を得る。

$$\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^3 a_j^e \iint_{\Omega} [(\nabla_t b_i^e(x, y)) \cdot (\nabla_t b_j^e(x, y)) - k_{cu}^2 b_i^e(x, y) b_j^e(x, y)] dS = 0 \quad (i=1,2,3, e=1, \dots, N_e)$$

ここで異なる要素内の基底関数はオーバーラップしないので、 $e' = e$ となったときだけ積分は値を持つ。

$$\sum_{j=1}^3 a_j^e \iint_{\Omega_e} [(\nabla_t b_i^e(x, y)) \cdot (\nabla_t b_j^e(x, y)) - k_{cu}^2 b_i^e(x, y) b_j^e(x, y)] dS = 0 \quad (i=1,2,3, e=1, \dots, N_e)$$

この方程式は変分原理を適用して得た要素方程式と全く同じである。系行列の作成も要素境界の連続条件から同様に作成すると、変分原理のときと全く同様の方程式が得られる。

## 5. エッジベース有限要素法

ノードベース有限要素法(Node-Based FEM)ではスカラー基底関数を用いた。しかし、ベクトルを求める問題でスカラー基底関数を使うとスプリース(非物理)解が発生してしまうという問題があった。そこで、エッジベース(Edge-Based FEM)基底関数が考案され、ベクトル基底関数を用いて直接ベクトル界を求める。

### 5.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件)

図6に示すノードベース有限要素法の例と同じ例題を考える。今回はベクトル基底関数を使うので微分方程式はベクトルバージョン(付録A.1)を用いる。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad (16)$$

境界条件は「周囲の導体壁上で電界の接線成分が0」である。

### 5.2 重み付け残差法と弱形式

任意のベクトル重み関数を  $\mathbf{W}$  として式(16)に重み付け残差法を適用する。

$$\iint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \mathbf{E}) dS = 0 \quad (17)$$

式(17)では、ベクトル関数  $\mathbf{W}$  との内積の積分値を求めているが、別にスカラー関数との積を取って0ベクトルになるような方程式を立てても構わない。どちらでもいいのだが次のように変形できるし、数値計算上便利だから式(17)のように定義している。(モーメント法でもベクトル基底関数を使う際の重み付けで内積を取るが、それは接線成分を抜き出すという意味もある)

ベクトル公式

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

を使って式(17)を変形すると、

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot \{\mathbf{W} \times (\nabla \times \mathbf{E})\} - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}] dS = 0$$

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}] dS - \iint_{\Omega} \nabla_t \cdot \{\mathbf{W} \times (\nabla \times \mathbf{E})\} dS = 0$$

ガウスの定理を用いて、

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}] dS - \oint_{\Gamma} \{\mathbf{W} \times (\nabla \times \mathbf{E})\} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = 0$$

$$\text{ベクトル公式 } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

を用いて線積分の項を変形すると

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}] dS - \oint_{\Gamma} \{(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E})\} dl = 0 \quad (18)$$

式(18)の重み関数  $\mathbf{W}$  はどのように選んでもよいが、精度が良く、変分原理から安定性が保証されているのでガラーキン法を用いる。電界  $\mathbf{E}$  は展開する際もディリクレ境界条件を満たすような基底関数で展開しており、かならずディリクレ条件を境界上で満足する。 $\mathbf{W}$  は  $\mathbf{E}$  と同じにするので、 $\mathbf{W}$  も境界上で  $\mathbf{E}$  と同じディリクレ条件を満たす。よって、 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{W} = 0$  なので、線積分の項は消える。

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}] dS = 0 \quad (19)$$

### TE(H) 波の解析

ここで、TE(H)波の解析を行う。 $E_z = 0$  なので、

$$\mathbf{E} = (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y) e^{-\gamma z}$$

$$\mathbf{E}_t = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$$

とすると

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t e^{-\gamma z}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x e^{-\gamma z} & E_y e^{-\gamma z} & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}(\gamma E_y e^{-\gamma z}) - \hat{y}(\gamma E_x e^{-\gamma z}) + \underline{\hat{z}(\nabla \times \mathbf{E})_z}$$

ここで、

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t \equiv \hat{z}(\nabla \times \mathbf{E})_z e^{\gamma z} = \hat{z} \left( \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right)$$

と定義すると

$$\nabla \times \mathbf{E} = [\hat{x}(\gamma E_y) - \hat{y}(\gamma E_x) + \nabla_t \times \mathbf{E}_t] e^{-\gamma z}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_t e^{-\gamma z}, \quad \mathbf{W}_t = \hat{x}W_x + \hat{y}W_y$$

$$\nabla \times \mathbf{W} = [\hat{x}(\gamma W_y) - \hat{y}(\gamma W_x) + \nabla_t \times \mathbf{W}_t] e^{-\gamma z}$$

ここで、電界  $\mathbf{E}$  は複素数なので、ガラーキン法を用いるとき必ず正数になるように（付録 A.3 参照）重み関数を  $\mathbf{W} = \mathbf{E}^*$  と選ぶのがよい。しかし、基底関数として最初から実数のものを用いたら  $\mathbf{W} = \mathbf{E}$  としても同じことになる。最初から実数の基底関数を用いることにするので後で  $\mathbf{W} = \mathbf{E}$  とする。

よって、これらを式(19)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [(\hat{x}(\gamma W_y) - \hat{y}(\gamma W_x) + \nabla_t \times \mathbf{W}_t) \cdot (\hat{x}(\gamma E_y) - \hat{y}(\gamma E_x) + \nabla_t \times \mathbf{E}_t) \\ & \quad - k_0^2 (\hat{x}W_x + \hat{y}W_y) \cdot (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y)] dS = 0 \\ & \iint_{\Omega} \left[ \{(\gamma^2 W_x E_x) + (\gamma^2 W_y E_y) + |\nabla_t \times \mathbf{W}_t| |\nabla_t \times \mathbf{E}_t|\} - k_0^2 (W_x E_x + W_y E_y) \right] dS = 0 \\ & \iint_{\Omega} \left[ \{ \gamma^2 \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{E}_t + |\nabla_t \times \mathbf{W}_t| |\nabla_t \times \mathbf{E}_t| \} - k_0^2 \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{E}_t \right] dS = 0 \\ & \iint_{\Omega} \left[ |\nabla_t \times \mathbf{W}_t| |\nabla_t \times \mathbf{E}_t| - (k_0^2 - \gamma^2) \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{E}_t \right] dS = 0 \\ & \iint_{\Omega} \left[ |\nabla_t \times \mathbf{W}_t| |\nabla_t \times \mathbf{E}_t| - k_{cu}^2 \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{E}_t \right] dS = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

ここで、

$$k_{cu}^2 = k_0^2 - \gamma^2$$

$$\gamma \text{ が実数 } \alpha \text{ のとき} \quad k_{cu}^2 = k_0^2 - \alpha^2$$

$$\gamma \text{ が純虚数 } j\beta \text{ のとき} \quad k_{cu}^2 = k_0^2 - \beta^2$$

## TM(E)波の解析

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{H}] dS - \oint_{\Gamma} \{(\hat{n} \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\} dl = 0$$

$$\text{ベクトル公式 } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

を用いて線積分の項を変形すると

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{H}] dS - \oint_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \{(\nabla \times \mathbf{H}) \times \hat{n}\} dl = 0$$

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{H}] dS - \oint_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \{(j\omega\epsilon\mathbf{E}) \times \hat{n}\} dl = 0$$

電界は境界  $\Gamma$  上で境界条件  $\hat{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  を満たすので、線積分の項は消える。

$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{W} \cdot \mathbf{H}] dS = 0$$

磁界の境界  $\Gamma$  上の接線成分は依然として未知数である。しかし、境界上の線積分の項が消えたので、境界  $\Gamma$  上に隣接する要素に対しても何も特別な処理を行う必要がなく、内部にある要素と同じように評価すればよい。

### 5.3 離散化

式(20)の離散化を行う。

$$\iint_{\Omega} (\nabla_t \times \mathbf{W}_t^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_t) dS = k_{cu}^2 \iint_{\Omega} \mathbf{W}_t^* \cdot \mathbf{E}_t dS \quad (21)$$

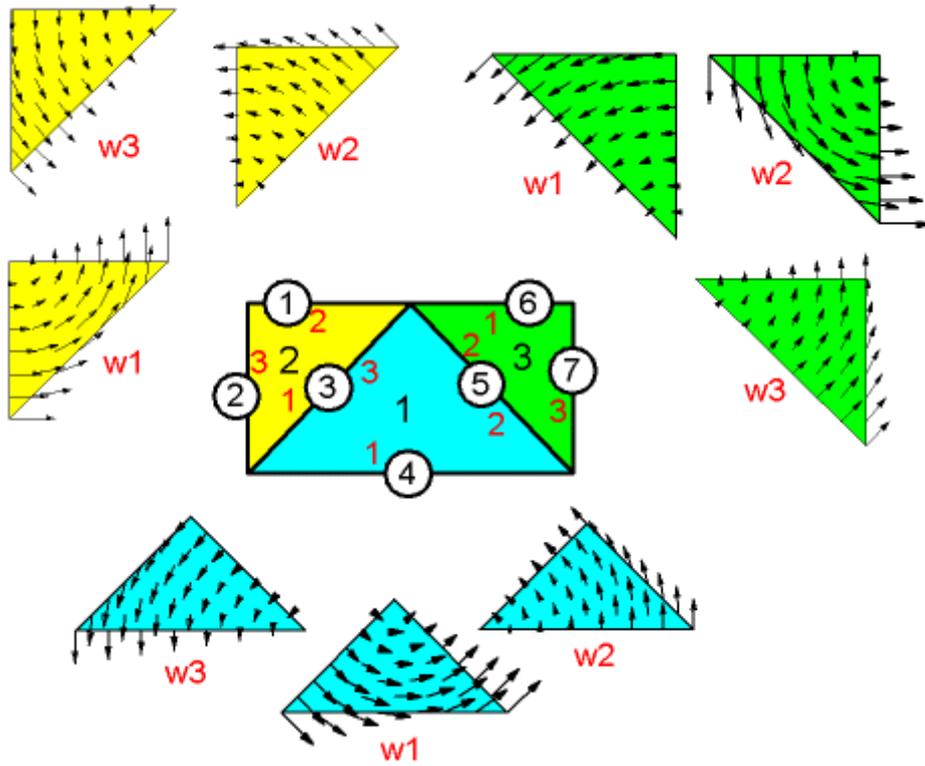


図 13 離散化

今、例として図 13 に示すように方形導波管の断面を3つの三角要素に分割し、角要素内の電界を3つの基底関数の和で表す。付録 A.3 より、波源や電荷がないとき、電界・磁界の接線成分は異なる媒質の境界でも連続になる（電束と磁束は垂直成分が連続）。今、エッジベース基底関数を用いると、要素の辺（エッジ）上で電界の接線成分が連続になるという条件を簡単に表現することができる。エッジベースのベクトル基底関数はすでに1つの辺上で接線成分が一定になり、他の2つの辺上では接線成分が0になるように作られている。よってエッジベース基底関数を使うと非常に容易に電磁界を展開できる。

今、導波管断面の電界を次のように展開する。

$$\mathbf{E}_t(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{j=1}^3 a_j^i \mathbf{w}_j^i(x, y) \quad (22)$$

ここで、 $N_{elem}$  は要素数（図 13 の例では3）、 $\mathbf{w}_j^i(x, y)$  は要素  $i$  内のエッジ  $j$  で接線成分を持つベクトル基底関数で、 $a_j^i$  はその基底関数に対する重みである。金属上で電界の接線成分は0なので、 $a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = a_1^2 = a_2^1 = a_1^3 = a_3^1 = 0$  であるが、これは後で考慮する。

また、各ベクトル基底関数はその要素内だけで定義されるものであり、違う要素の基底関数がオーバーラップすることはないということを強く意識しておく必要がある。式(22)を式(21)に代入すると、

$$\sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{j=1}^3 a_j^i \iint_{\Omega} (\nabla_t \times \mathbf{W}_t^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}_j^i(x, y)) dS = k_{cu}^2 \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{j=1}^3 a_j^i \iint_{\Omega} \mathbf{W}_t^* \cdot \mathbf{w}_j^i(x, y) dS$$

**重み付け**

$\mathbf{W}_t$ としては $\mathbf{E}_t$ と同じ境界条件を満たす関数ならば(線積分の項が消えるから)何でも良いので、 $\mathbf{W}_t$ として $\mathbf{w}_j^i(x,y)$ を選ぶ(本当は PEC 境界上では接線成分を持つ電界の基底関数を使ってはいけないので、後から取り除く)。

$$\sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{j=1}^3 a_j^i \iint_{\Omega} (\nabla_t \times \mathbf{w}_n^m(x,y)) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}_j^i(x,y)) dS = k_{cu}^2 \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{j=1}^3 a_j^i \iint_{\Omega} \mathbf{w}_n^m(x,y) \cdot \mathbf{w}_j^i(x,y) dS \quad (23)$$

( $m=1, \dots, N_{elem}, n=1,2,3$ )

展開関数は $3 \times N_{elem}$ 個あり、また、 $3 \times N_{elem}$ 個の関数で重み付けを行って $3 \times N_{elem}$ 個の方程式を得たので、 $3 \times N_{elem}$ 文字、 $3 \times N_{elem}$ 元連立一次方程式となる( $k_{cu}$ も未知数だから固有値問題となる)。

式(23)を行列表現すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{1\nabla} & K_{12}^{1\nabla} & K_{13}^{1\nabla} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^{1\nabla} & K_{22}^{1\nabla} & K_{23}^{1\nabla} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ K_{31}^{1\nabla} & K_{32}^{1\nabla} & K_{33}^{1\nabla} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{11}^{m\nabla} & K_{12}^{m\nabla} & K_{13}^{m\nabla} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21}^{m\nabla} & K_{22}^{m\nabla} & K_{23}^{m\nabla} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{31}^{m\nabla} & K_{32}^{m\nabla} & K_{33}^{m\nabla} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & K_{11}^{N_{elem}\nabla} & K_{12}^{N_{elem}\nabla} & K_{13}^{N_{elem}\nabla} \\ & & & & & K_{21}^{N_{elem}\nabla} & K_{22}^{N_{elem}\nabla} & K_{23}^{N_{elem}\nabla} \\ & & & & & K_{31}^{N_{elem}\nabla} & K_{32}^{N_{elem}\nabla} & K_{33}^{N_{elem}\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \\ \vdots \\ a_1^m \\ a_2^m \\ a_3^m \\ \vdots \\ a_1^{N_{elem}} \\ a_2^{N_{elem}} \\ a_3^{N_{elem}} \end{bmatrix}$$

$$= k_{cu}^2 \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{11}^m & K_{12}^m & K_{13}^m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21}^m & K_{22}^m & K_{23}^m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{31}^m & K_{32}^m & K_{33}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & K_{11}^{N_{elem}} & K_{12}^{N_{elem}} & K_{13}^{N_{elem}} \\ & & & & & K_{21}^{N_{elem}} & K_{22}^{N_{elem}} & K_{23}^{N_{elem}} \\ & & & & & K_{31}^{N_{elem}} & K_{32}^{N_{elem}} & K_{33}^{N_{elem}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \\ \vdots \\ a_1^m \\ a_2^m \\ a_3^m \\ \vdots \\ a_1^{N_{elem}} \\ a_2^{N_{elem}} \\ a_3^{N_{elem}} \end{bmatrix}$$

ここで、

$$K_{ij}^{m\nabla} = \iint_{\Omega_e} (\nabla_t \times \mathbf{w}_i^m(x,y)) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}_j^m(x,y)) dS$$

$$K_{ij}^m = \iint_{\Omega_e} \mathbf{w}_i^m(x, y) \cdot \mathbf{w}_j^m(x, y) dS$$

行列の対角以外の成分が 0 になっているのは違う要素の基底関数は互いにオーバーラップしないからである。行列内に 0 が多いというのはそのような行列を解くのに特化した数値計算サブルーチンを使えば計算速度が速くなる。明らかに  $K_{ij}^{m\nabla} = K_{ji}^{m\nabla}$ ,  $K_{ij}^m = K_{ji}^m$  となる。

### [1 次三角要素の要素行列の計算]

$$K_{ij}^{m\nabla} = \frac{4\ell_i\ell_j B_i B_j}{A^4} \iint_{\Omega_m} dx dy = \frac{4\ell_i\ell_j B_i B_j}{A^3}$$

$$K_{ij}^m = \frac{\ell_i\ell_j}{A^4} \left[ (A_i A_j + C_i C_j) \frac{A}{2} \right. \\ \left. - (C_i B_j + C_j B_i) \iint_{\Omega_m} x dx dy \right. \\ \left. - (A_i B_j + A_j B_i) \iint_{\Omega_m} y dx dy \right. \\ \left. - B_i B_j \left( \iint_{\Omega_m} x^2 dx dy + \iint_{\Omega_m} y^2 dx dy \right) \right]$$

ここで、 $A_i, B_i, C_i$  は式(6)で与えられる。

また積分は次のようになる。

$$\iint_{\Omega_m} x dx dy = \frac{A}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\iint_{\Omega_m} y dx dy = \frac{A}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$$

$$\iint_{\Omega_m} x^2 dx dy = \frac{A}{6} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$$

$$\iint_{\Omega_m} y^2 dx dy = \frac{A}{6} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1)$$

### 5.4 系行列の組み立てと解法

前節では各要素内で離散化を行った。この節ではさらに全体の構造を一意に表すための条件を適用する。

#### 界の連続条件の適用

同じ媒質内では当然界は連続である。また違う媒質境界でもその境界に波源や電荷が無いときは電界と磁界の接線成分は連続となる (付録 A.3)。幸い (意図的に)、この問題でも電界を未知数としているので各要素境界において接線成分は連続である。ベクトル基底関数の辺上の接線成分の大きさは 1 に規格化されているので、図 13 の例では

$$a_3^1 = -a_1^2 = A_3$$

$$a_2^1 = -a_2^3 = A_5$$

となる。ここで、構造全体のエッジの数を  $N_{edge}$  とすると、 $A_i (i=1, \dots, N_{edge})$  はエッジ番号  $i$  に対応する基底関数の重み係数であり、その辺を有する 2 つの三角要素内の基底関数の共通の重み係数となる。ここで、注意しなければならないことは、ベクトルの向きも一意に揃えなければならないので片方の係数に負号が付いている。

この界の連続条件を適用すると未知数が減る。その分方程式の数も減って正方行列を保つようにする訳だが、どうするかと言うと  $A_i$  の重みが掛かる 2 つの要素の 2 つの基底関数をペアとして 1 つの基底関数と見なす (境界にある辺だけはペアとならないが問題ない)。こうするとエッジに基底関数が対応しているようになり、多少近くの基底関数と定義域がオーバーラップするようになるが、依然として 0 の多い行列である。未知数の順番をうまく入れ替えれば対角付近にのみ値をもつ帯構造の行列にすることができ、特化したサブルーチンを使うと高速に計算できる。

2 つの基底関数がペアとなった基底関数は電界を磁流に対応させたとき、モーメント法のルーフトップ関数[10]と一致する。実際にモーメント法と有限要素法を組み合わせるときの相性がよく、モーメント法と有限要素法を組み合わせたハイブリッド計算が行われている[11]。

しかし、この要素内で定義された最初の基底関数をペアの基底関数に置き換えて計算し直すのは少し煩雑なので、より簡単な系行列の作成法を紹介する。

まず、各要素で要素行列を作成する。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{m\nabla} & K_{12}^{m\nabla} & K_{13}^{m\nabla} \\ K_{21}^{m\nabla} & K_{22}^{m\nabla} & K_{23}^{m\nabla} \\ K_{31}^{m\nabla} & K_{32}^{m\nabla} & K_{33}^{m\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^m \\ a_2^m \\ a_3^m \end{bmatrix} = k_{cu}^2 \begin{bmatrix} K_{11}^m & K_{12}^m & K_{13}^m \\ K_{21}^m & K_{22}^m & K_{23}^m \\ K_{31}^m & K_{32}^m & K_{33}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^m \\ a_2^m \\ a_3^m \end{bmatrix}$$

$$a_1^m = \text{orient}(m,1) \times A_{i_1}$$

$$a_2^m = \text{orient}(m,2) \times A_{i_2}$$

$$a_3^m = \text{orient}(m,3) \times A_{i_3}$$

と対応するとする。 $\text{orient}(m,i)$  は要素  $m$  の基底関数を系行列に組み込むときに向きを揃えるための符号である。そのままの向きでいいときは 1、反転させる必要があるときには -1 となっている。

このとき全体の系行列は

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\nabla} & \cdots & K_{1N_{edge}}^{\nabla} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N_{edge}1}^{\nabla} & \cdots & K_{N_{edge}N_{edge}}^{\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{N_{edge}} \end{bmatrix} = k_{cu}^2 \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1N_{edge}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N_{edge}1} & \cdots & K_{N_{edge}N_{edge}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{N_{edge}} \end{bmatrix}$$

の要素に対して

```
do m=1, N_elem
  do i=1,3
    do j=1,3
```

$$\begin{aligned}
K_{l'l_j}^{\nabla} &= K_{l'l_j}^{\nabla} + \text{orient}(m,i) \times \text{orient}(m,j) \times K_{ij}^{m\nabla} \\
K_{l'l_j} &= K_{l'l_j} + \text{orient}(m,i) \times \text{orient}(m,j) \times K_{ij}^m \\
&\text{end do} \\
&\text{end do} \\
&\text{end do}
\end{aligned}$$

というように足していけばよい。

こうすると、うまく周りの基底関数からの重み付けの効果が足されていく。この操作で図 13 の例に対する行列としては次のような行列が出来る。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\nabla} & \cdots & K_{17}^{\nabla} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{71}^{\nabla} & \cdots & K_{77}^{\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_7 \end{bmatrix} = k_{cu}^2 \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{71} & \cdots & K_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_7 \end{bmatrix}$$

有限要素法のプログラムでは各要素内で積分を行い  $K_{ij}^{\nabla}, K_{ij}$  を計算したら後はいかに変換テーブルを駆使して作成、使用するかである。また各要素内の積分も座標変換して決まった位置で行うのでやはり変換テーブルを作ったり読んだりする操作が基本となる。

### 境界条件（ディリクレ条件）の適用

次に、境界条件を適用する。導体上で電界の接線成分は 0 とならなければいけないので、図 13 の例ではグローバルエッジ 1,2,4,6,7 に配置された基底関数の重みは 0 にしなければならない ( $A_1 = A_2 = A_4 = A_6 = A_7 = 0$ )。重みが 0 ということは値が既知であり、未知数ではないからグローバルエッジ  $i$  が金属境界上ならば  $A_i = 0$  であり、行列の  $i$  行と  $i$  列を取り除き、よりサイズの小さな行列とする。 $i$  列を取り除くのは  $A_i$  が既知だからであり、 $i$  行を取り除くのは境界条件を満たす重み付け関数を使わなければならなかったから重み付けを元々行わなかったという意味合いにしたいからである。

(TM(E)モードを解析で、磁界のヘルムホルツ方程式を使ったときの境界条件では 3.2 節で述べたように何もする必要はなく境界条件が満足される。)

図 13 の例に対する最終的な系行列は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{\nabla} & K_{35}^{\nabla} \\ K_{53}^{\nabla} & K_{55}^{\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_5 \end{bmatrix} = k_{cu}^2 \begin{bmatrix} K_{33} & K_{35} \\ K_{53} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_5 \end{bmatrix}$$

これはベクトル  $[A_3, A_5]^T$  と実数  $k_{cu}$  を未知数とする固有値問題である。ベクトル  $[A_3, A_5]^T$  が固有ベクトル、 $k_{cu}^2$  が固有値である。また特に 2 つの行列が対称行列になっているので、これを一般化固有値問題と言い、この問題に特化した多くの数値計算サブルーチンが存在する。この行列は実対称行列なので、固有値はすべて実数となる。よって、固有ベクトルも実ベクトルとなる [12] [13] [14]。

この固有値問題を解くとモード毎に分離されて各モードのカットオフ波数  $k_{cu}$  が固有値として、モード関数の界分布のための重み係数ベクトル  $[A_3, A_5]^T$  が固有ベクトルとして求まる。

## 6. H 面分岐回路の解析

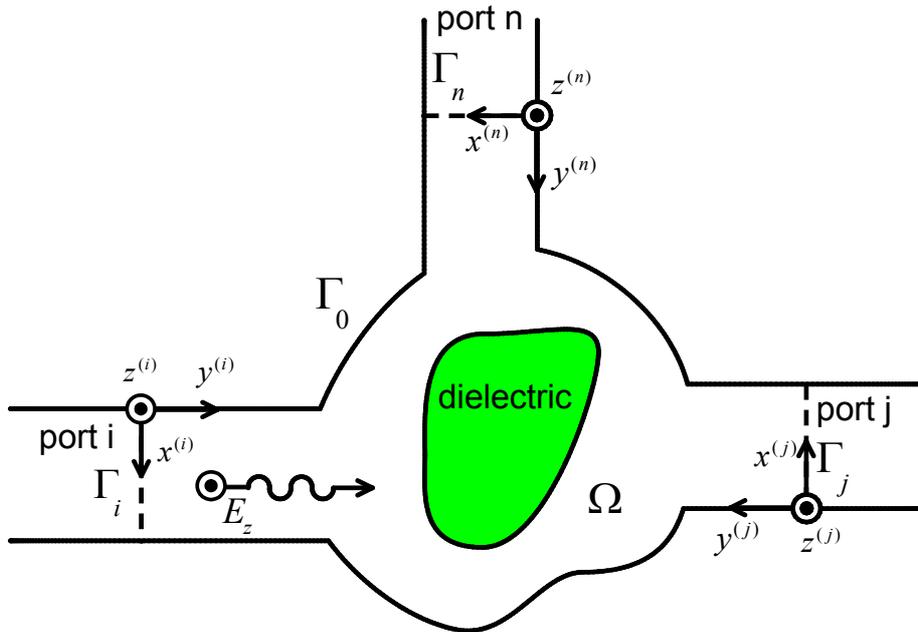


図 14 H 面分岐回路

この章では図 14 に示すような H 面分岐回路の有限要素解析法[15]について説明する。また、この例題を通してポートという概念とその取り扱いについて説明する。

**ポート(port)**とは導波管、同軸ケーブル、マイクロストリップ線路、並行 2 本線路などの二次元構造をもつ（線路の軸方向には変化がない）線路の断面である。マイクロ波回路などの応用例ではよく二次元構造をもつ線路からアンテナやマイクロ波回路などに電力を送りこみ、その反射特性を知りたいという問題がよくある。例えば、携帯電話の例では、発信機で発信されたキャリアを変調し、それをアンプに送って増幅する。その増幅された信号は二次元構造の線路を通過してアンテナに伝わるが、ここで反射が無いように設計をしたいことがよくある。実験ではネットワークアナライザを用いて反射・散乱特性を S パラメータで測定する。

### 6.1 問題の設定 (微分方程式+境界条件)

今回はスカラー基底関数を使うこととするので微分方程式はスカラーバージョン (付録 A.1.1) を用いる。

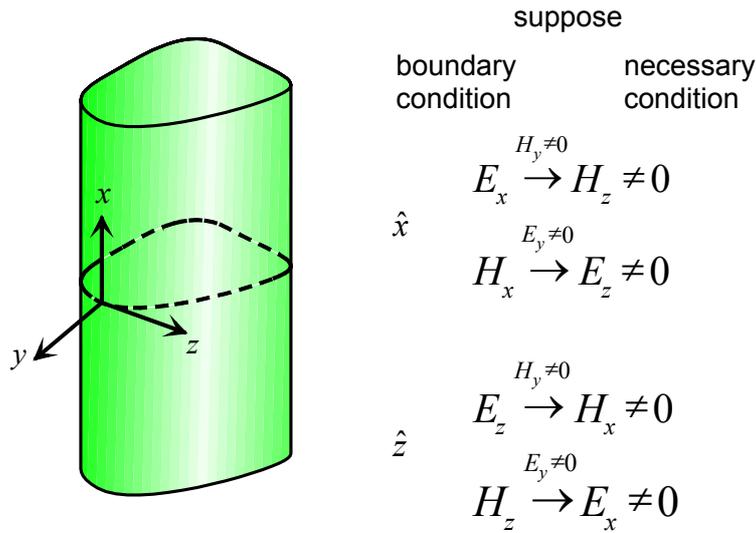


図 15 電磁波成分考察モデル

また、 $E_x = E_y = H_z = 0$ なので、 $E_z$ だけで全電磁界を表現できる。その理由は、付録 A.5 の説明による。電界が境界面に垂直な成分を持つとき、必然的に電界は境界面の進行方向接線成分をもたなければならない。しかし、垂直成分が最初からないならば進行方向接線成分を持たなくても境界条件は満たす。よって、図 14 が H 面分岐回路として使われる場合、電界は z 成分しかもたない。すると  $TM_z$  波なので、1つのスカラーポテンシャルだけで電磁界を完全に表現することができる。

E 面分岐回路について図 15 のモデルで考える。誘電体と空気層の境界条件を考える。 $H_x$ の境界条件を考えると  $E_y$ が存在するならば  $E_z$ を持たなければならない。また、 $E_z$ の境界条件を考えたとき、 $H_y$ が存在するならば  $H_x$ を持たなければならない。今、E 面分岐回路を考えているので、 $H_x$ を持つことを前提としている。逆もまた真なので、 $H_x$ を持つならば  $H_y$ を持たなければならない。するとマクスウェルの方程式から  $E_x$ も存在してしまう。

ここでは H 面分岐回路を扱うので、 $E_z$ だけで完全に電磁界を表現できる。

$$\nabla_t \cdot \nabla_t E_z + k_0^2 E_z = 0 \tag{24}$$

境界条件は「周囲の導体壁上で電界の接線成分が 0」である。

### 6.2 重み付け残差法と弱形式

$$\iint_{\Omega} W (\nabla \cdot \nabla E_z + k_0^2 E_z) dS = 0 \tag{25}$$

ベクトル公式

$$\nabla \cdot (VA) = V \nabla \cdot A + A \cdot \nabla V$$

を使って式(17)を変形すると、

$$-\iint_{\Omega} \nabla E_z \cdot \nabla W dS + \iint_{\Omega} \nabla \cdot (W \nabla E_z) dS + k_0^2 \iint_{\Omega} W E_z dS = 0$$

$$\iint_{\Omega} \nabla E_z \cdot \nabla W dS - k_0^2 \iint_{\Omega} W E_z dS - \oint_{\Gamma} W \nabla E_z \cdot \hat{n} dl = 0$$

$$\iint_{\Omega} \nabla E_z \cdot \nabla W dS - k_0^2 \iint_{\Omega} W E_z dS - \oint_{\Gamma} W \frac{\partial E_z}{\partial n} dl = 0$$

ガラーキン法を用いるので、後で  $W = E_z$  と選ぶことを考えると、線積分の項は境界上では消える。ポート上では寄与が残るので次のようになる。

$$\iint_{\Omega} \nabla E_z \cdot \nabla W dS - k_0^2 \iint_{\Omega} W E_z dS - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} W \frac{\partial E_z}{\partial n} dl = 0$$

$$\iint_{\Omega} \nabla E_z \cdot \nabla W dS - k_0^2 \iint_{\Omega} W E_z dS - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} W \frac{\partial E_z^{(k)}}{\partial y^{(k)}} dx^{(k)} = 0 \quad (26)$$

ここで、ポート上の電磁を次のように入射波と反射波のモードの和で表す。ポート  $j$  が基本モード  $e_1^{(j)}$  で励振されているとすると、 $e_m^{(j)}$  ( $m = 2, 3, 4, \dots$ ) を高次モードの電界の  $z$  成分として

$$E_z^{(k)}(x^{(k)}) = \delta_{kj} e_1^{(j)}(x^{(j)}) \exp(-j\beta_1^{(j)} y^{(j)}) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(k)} e_m^{(k)}(x^{(k)}) \exp(j\beta_m^{(k)} y^{(k)}) \quad (27)$$

また、 $TE_{m0}$  モードの規格化モード関数（電力が 1W になっている）は

$$e_m^{(k)}(x^{(k)}) = \frac{2}{\sqrt{a^{(k)} b}} \sqrt{\frac{k_0 \eta_0}{\beta_m^{(k)}}} \sin\left(\frac{m\pi}{a^{(k)}} x^{(k)}\right)$$

である。

$$\beta_m^{(k)} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_{t_m}^{(k)2}} & (k_0^2 \geq k_{t_m}^{(k)2}) \\ -j\sqrt{k_{t_m}^{(k)2} - k_0^2} & (k_{t_m}^{(k)2} \geq k_0^2) \end{cases}$$

は位相定数である。 $k_{t_m}^{(k)2} \geq k_0^2$  の遮断モードでは  $y^{(k)}$  が負になると減衰するようにしている。

$$k_{t_m}^{(k)} = \frac{m\pi}{a^{(k)}}$$

は  $TE_{m0}$  モードのカットオフ波数である。

3次元の有限要素法解析を行う場合、伝送線路の断面は2次元となる。その断面が方形導波管だけでなく、任意形状の場合でもモード関数と伝搬定数は2章、3章のように二次元有限要素法解析で求めることができるからプログラムは複雑になるが可能である。問題を考える場合、

反射波についてはマイクロ波回路からポートまでの距離を十分長くとおけば高次モードは減衰するので、基本モードのみを考えればよい。式(27) を式(18)に代入して、

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \nabla E_z \cdot \nabla W dS - k_0^2 \iint_{\Omega} W E_z dS \\ & - j \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} W \left[ -\beta_1^{(j)} \delta_{kj} e_1^{(j)}(x^{(j)}) \exp(-j\beta_1^{(j)} y^{(j)}) + \beta_1^{(k)} B_1^{(k)} e_1^{(k)}(x^{(k)}) \exp(j\beta_1^{(k)} y^{(k)}) \right] dx^{(k)} = 0 \\ & \iint_{\Omega} \nabla E_z \cdot \nabla W dS - k_0^2 \iint_{\Omega} W E_z dS - j \sum_{k=1}^N B_1^{(k)} \beta_1^{(k)} \exp(j\beta_1^{(k)} y^{(k)}) \int_{\Gamma_k} W e_1^{(k)}(x^{(k)}) dx^{(k)} \\ & = -j \sum_{k=1}^N \beta_1^{(j)} \delta_{kj} \exp(-j\beta_1^{(j)} y^{(j)}) \int_{\Gamma_k} W e_1^{(j)}(x^{(j)}) dx^{(k)} \end{aligned}$$

### 6.3 離散化

$$E_z = \sum_{n=1}^{N_{elem}} \sum_{m=1}^3 E_z^{n,m} e_z^{n,m}(x, y)$$

と展開する。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_{elem}} \sum_{m=1}^3 \left[ E_z^{n,m} \left[ \iint_{\Omega} \nabla e_z^{n,m}(x, y) \cdot \nabla W dS - k_0^2 \iint_{\Omega} W e_z^{n,m}(x, y) dS \right] \right. \\ & \left. - j \sum_{k=1}^N \left[ B_1^{(k)} \beta_1^{(k)} \exp(j\beta_1^{(k)} y^{(k)}) \int_{\Gamma_k} W e_1^{(k)}(x^{(k)}) dx^{(k)} \right] \right. \\ & \left. = -j \sum_{k=1}^N \beta_1^{(j)} \delta_{kj} \exp(-j\beta_1^{(j)} y^{(j)}) \int_{\Gamma_k} W e_1^{(j)}(x^{(j)}) dx^{(k)} \right. \end{aligned}$$

$E_z^{n,m}$  と  $B_1^{(k)}$  が未知数である。

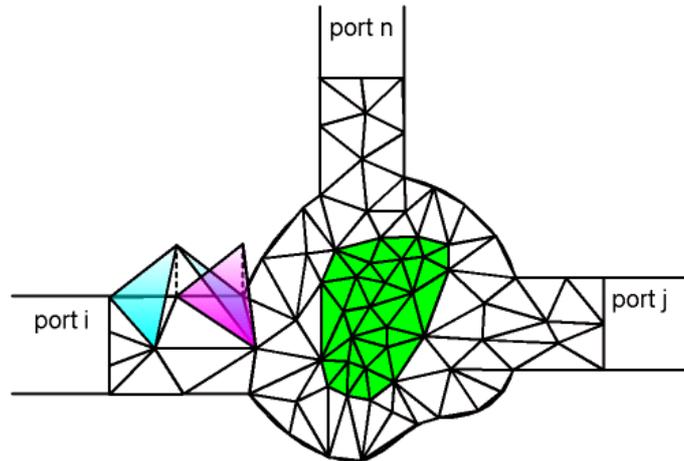


図 16 FEM メッシュ

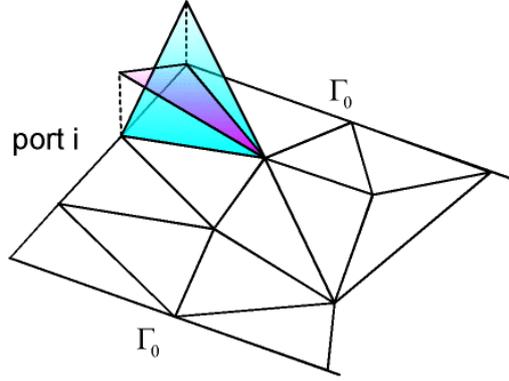


図 17 ポート上での重み付け

この式に対して  $e_z^{n_2, m_2}(x, y)$  ( $n_2 = 1, \dots, N_{elem}, m_2 = 1, 2, 3$ ) で重み付けを行うと、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{N_{elem}} \sum_{m=1}^3 \boxed{E_z^{n,m}} \left[ \iint_{\Omega} \nabla e_z^{n,m}(x, y) \cdot \nabla e_z^{n_2, m_2}(x, y) dS - k_0^2 \iint_{\Omega} e_z^{n_2, m_2}(x, y) e_z^{n,m}(x, y) dS \right] \\
 & - j \sum_{k=1}^N \boxed{B_1^{(k)}} \beta_1^{(k)} \exp(j\beta_1^{(k)} y^{(k)}) \int_{\Gamma_k} e_z^{n_2, m_2}(x, y) e_1^{(k)}(x^{(k)}) dx^{(k)} \\
 & = -j \sum_{k=1}^N \beta_1^{(j)} \delta_{kj} \exp(-j\beta_1^{(j)} y^{(j)}) \int_{\Gamma_k} e_z^{n_2, m_2}(x, y) e_1^{(j)}(x^{(j)}) dx^{(k)} \\
 & \left[ \begin{array}{c} K_{n_2, m_2} \\ \vdots \\ L_{n_2, m_2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} E_z^{n,m} \\ \vdots \\ B_1^{(k)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ M_{n_2, m_2}^{(k)} \end{array} \right] \quad (28)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$K_{n_2, m_2} = \iint_{\Omega} \nabla e_z^{n,m}(x, y) \cdot \nabla e_z^{n_2, m_2}(x, y) dS - k_0^2 \iint_{\Omega} e_z^{n_2, m_2}(x, y) e_z^{n,m}(x, y) dS$$

$$L_{n_2, m_2}^{(k)} = -j\beta_1^{(k)} \exp(j\beta_1^{(k)} y^{(k)}) \int_{\Gamma_k} e_z^{n_2, m_2}(x, y) e_1^{(k)}(x^{(k)}) dx^{(k)}$$

$$M_{n_2, m_2}^{(k)} = -j\beta_1^{(j)} \delta_{kj} \exp(-j\beta_1^{(j)} y^{(j)}) \int_{\Gamma_k} e_z^{n_2, m_2}(x, y) e_1^{(j)}(x^{(j)}) dx^{(k)}$$

式(28)は決定問題であり、連立一次方程式を解くと未知数  $E_z^{n,m}, B_1^{(k)}$  が求まる。入射波として用いる規格化固有モード関数の電力は定義から 1W なので、入射ポートが  $k$  だけのときは  $B_1^{(k)}$  はそのまま反射係数となる。入射ポートが  $k$  以外のときは  $B_1^{(k)}$  は透過係数となる。

## A. 付録

### A.1 ヘルムホルツの方程式の導出

マクスウェルの方程式(Maxwell's equation)は波源からの放射問題を考えるとき、電界と磁界を未知数とする2元連立微分方程式であり、2つの未知数が混在しているため数値的に計算しにくい。そこで、2つの方程式から1文字(電界または磁界)消去して電界だけ、または磁界だけを未知数とする1つの微分方程式を作り、その微分方程式を解くことに集中する。2つの連立微分方程式から1文字消去した1つの微分方程式は解が波動を表すヘルムホルツの方程式(Helmholtz equation)となる。

次のマクスウェルの方程式からヘルムホルツの方程式を導出する。

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} & \textcircled{1} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H} & \textcircled{2} \end{cases} \quad (\text{Maxwell's equation})$$

ここで、 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_r \mu_0$  であり、 $\epsilon_0, \mu_0$  はそれぞれ真空中の誘電率と透磁率である。 $\epsilon, \mu$  は一般には場所の関数である。

#### 磁界のヘルムホルツ方程式

$$\nabla \times \left( \frac{\textcircled{1}}{\epsilon_r} \right) \text{より、}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{\epsilon_r} \right) &= \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_r} \right) + j\omega\epsilon_0 \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_r} \right) + j\omega\epsilon_0 (-\mathbf{M} - j\omega\mu\mathbf{H}) \end{aligned}$$

これを整理すると、

$$\boxed{\nabla \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{\epsilon_r} \right) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} = -j \frac{k_0}{\eta_0} \mathbf{M} + \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_r} \right)} \quad (\text{磁界のヘルムホルツ方程式}) \quad (29)$$

となる。ただし、 $\eta_0$  は真空中の界インピーダンスである。

#### 電界のヘルムホルツ方程式

$$\nabla \times \left( \frac{\textcircled{2}}{\mu_r} \right) \text{より、}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) &= -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) - j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{E} \\ &= -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) - j\omega\mu_0 (\mathbf{J} + j\omega\epsilon \mathbf{E})\end{aligned}$$

これを整理すると、

$$\boxed{\nabla \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J} - \nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right)} \quad (\text{電界のヘルムホルツ方程式}) \quad (30)$$

となる。

式(29), (30)は空間の至る所で成り立つ微分方程式である。

### A.1.1 導波管のベクトルヘルムホルツ方程式

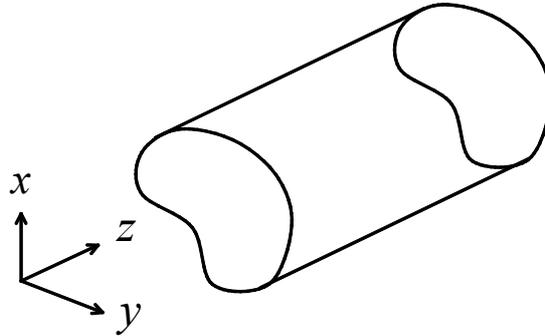


図 18 導波管

波源が無く、導波管内が真空( $\epsilon_r = \mu_r = 1$ )のとき、式(30)のヘルムホルツ方程式は次のようになる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

ここで、第一項はベクトルラプラシアン $\nabla^2$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \\ &\quad (\text{電荷がないから } \nabla \cdot \mathbf{E} = 0) \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

よって、波動方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

となり、直角(カルテシアン)座標系では次のようになる。

$$(\hat{x}\nabla^2 E_x + \hat{y}\nabla^2 E_y + \hat{z}\nabla^2 E_z) + k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

**TE(H)波の解析**

ここで、TE波(H波)の解析を考える。図18のような導波管を考えたとき、TE波は電界の $z$ 成分を持たない。また、上のヘルムホルツ方程式を変数分離法で解くことを考えると、 $z$ 方向には無限に長く、一様な構造をしているので各成分に共通の $z$ 成分依存項

$$Z(z) = A \exp(\gamma z) + B \exp(-\gamma z)$$

が現れる（その理由は、フレネルの反射・透過係数を導出する際の位相整合条件と同じで、そうしなければ境界条件を満足できないからである）。反射波がなく、進行波だけが存在する状態を考えると  $\partial/\partial z = -\gamma$  とおける。条件をまとめると、

$$\begin{aligned} E_z &= 0 && \text{TE波を扱うから} \\ \partial/\partial z &= -\gamma && z \text{方向に一様な構造をしているから} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_t = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t = \hat{x}\nabla_t^2 E_x + \hat{y}\nabla_t^2 E_y$$

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

として、電界の断面成分 $\mathbf{E}_t$ に対して次の方程式が成り立つ（電界の管軸方向成分はTE波なので当然0である）。

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t + (k_0^2 + \gamma^2) \mathbf{E}_t = 0$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t + k_{cu}^2 \mathbf{E}_t = 0 \tag{31}$$

ここで、

$$k_{cu}^2 = k_0^2 + \gamma^2$$

であり、 $k_{cu}$ をカットオフ波数(cutoff wavenumber)と言う。

その理由は、 $\gamma = \pm \sqrt{k_{cu}^2 - k_0^2}$  だから  $\alpha, \beta$  を実数として

$$\gamma = \begin{cases} \pm \alpha & (k_{cu} > k_0) \\ \pm j\beta & (k_{cu} < k_0) \end{cases}$$

であり、導波管内の電界が

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t \exp(-\gamma z)$$

で表されることを考えると  $k_0$  が  $k_{cu}$  よりも大きくなると減衰せずに伝搬可能になるからであ

る。カットオフ周波数(cutoff frequency)  $f_{cu}$  の計算は  $\gamma = 0$  となるとき、つまり

$$k_{cu}^2 - k_0^2 = 0, \quad \frac{2\pi}{\lambda_0} = k_{cu}, \quad 2\pi \frac{f_{cu}}{c} = k_{cu}$$

$$f_{cu} = \frac{c}{2\pi} k_{cu}$$

として求まる。周波数がカットオフ周波数を超えるとそのモードは伝搬可能となる。

式(31)で、未知数は  $\mathbf{E}_t$  と  $k_{cu}$  の2つである。よって、これは固有値問題(eigenvalue problem)であり、 $k_{cu}$  が固有値(eigenvalue)として、 $\mathbf{E}_t$  が固有関数(eigenfunction)として求まる。離散化された各固有値に対する電磁界分布をモード(mode, 姿態)と言う。

有限要素法では式(31)の電磁界の導波管断面成分を導波管断面の管壁などの境界条件の下で解くことになる。

式(31)の方程式は導波管だけではなく  $z$  方向に一様ならばどんな構造のものでも適用できるため、同軸ケーブルや平行2本線路(フィーダ)などの2導体系の解析もできる。そのときはカットオフ波数0の直流から伝搬するモード(TEM波)が存在する。カットオフ波数0ということは式(31)のヘルムホルツの方程式はラプラスの方程式となる。それが、同軸線路や平行2本線路の解析を行うときに断面成分を静電界で求め、進行方向成分を  $\exp(-\gamma z)$  として掛け算して線路上の電磁界分布を求めることができる理由である。

### A.1.2 導波管のスカラーヘルムホルツ方程式

文献[7](p. 43-47)より、TE波に対しては磁界の  $z$  成分  $H_z$  だけを未知数とするスカラーヘルムホルツ方程式

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_{cu}^2 H_z = 0 \quad (32)$$

TM波に対しては電界の  $z$  成分  $E_z$  だけを未知数とするスカラーヘルムホルツ方程式

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_{cu}^2 E_z = 0 \quad (33)$$

を解き、簡単な計算で電磁界の断面成分も  $H_z$  から求めることができる。

$E_x, E_y, H_x, H_y$  は次式で与えられる。

$$E_x = \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \left( -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$E_y = \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \left( j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$H_x = \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \left( j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_y = \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \left( -j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

## A.2 汎関数、変分、変分原理

### 汎関数

汎関数(functional)とは関数をパラメータ（変数、引数）とする関数である。関数よりもより上位のものとして見ているので汎関数と呼ばれる。

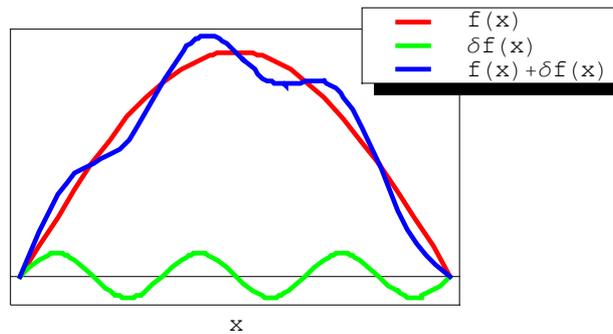


図 19 汎関数と変分の説明

例えば、図 19 のような関数  $f(x)$  を考える。それをギターなどの弦を指で引っ張ったときの変位と考える。その弦の変位によるエネルギーのようなものを考え、次のように  $F[f]$  で表す。汎関数であることを強調するために引数には大括弧  $[ ]$  を使う。

$$F[f] = \int_{x=a}^b \{f(x)\}^2 dx$$

すると、そのエネルギーらしき  $F$  はある値となり、関数  $f$  の形によって値が変わる。つまり、関数  $f$  の関数になっており、その意味で  $F$  は汎関数であると言う。

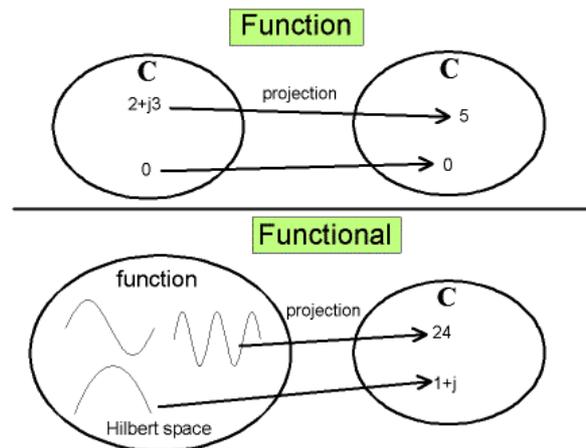


図 20 汎関数の写像による説明

また、図 20 に示すように汎関数を写像により説明する。普通に関数はあるスカラー量（図中では複素数  $C$  の集合を考えている）を別のスカラー量に対応させるものであるが、汎関数はある関

数形をあるスカラー量に対応させるものであると考えることができる。

## 変分

図 19 に示すように関数  $f(x)$  の形が  $\delta f(x)$  (一般に微小変化を扱う) だけ変わり、 $f(x) + \delta f(x)$  となったときに汎関数の値はどれだけ ( $\delta F$ ) 変わるか言うのが**変分(variation)**である。汎関数の変分は関数の微分に相当する量である。定義は微分と同じようなものであり、次のように定義してみる。

$$\delta F = |\delta f| \lim_{|\delta f| \rightarrow 0} \frac{F[f + \delta f] - F[f]}{|\delta f|} \quad (34)$$

分子第 1 項の  $f + \delta f$  というのは 2 つの関数の和  $f(x) + \delta f(x)$  を意味することになる。この定義は関数の微分と同じ定義になっているので、変分も関数  $f$  を文字と見なして関数と同様に微分することができる。  $|\delta f|$  は関数のノルムである。

## 変分の意味

より変分の意味が明確になるように次のように定義してみる。

$$\delta F = \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \varepsilon g] - F[f]}{\varepsilon} \quad (35)$$

$\varepsilon$  はスカラーであり、 $g$  は任意波形の関数である。よって、 $g$  の関数形 (微小変化の与え方) によって変分の値は変わる。もし  $g(x) = 1$  ならば式(34)は式(35)の定義と一致する。つまり、式(34)の定義では関数  $f$  を一様に上下に変化させようとしたときの変化量だと言える。関数と同様の微分公式を使って微分したら全体を上下に一様に変化させたときの変分を求めたことになるから、なるべく式(35)の定義に従って微分するのが望ましい。また、関数と同様の微分公式を使わなければ式(34)の定義に従って変分しても式(35)と同様の操作をしているので式(35)の定義に従って変分しているのと同じことになる。

より意味がわかりやすいような表現にするにはパラメータの関数  $f$  を  $\delta f$  だけ変化させて  $f + \delta f$  としたときの汎関数の値  $F[f + \delta f]$  から元の値  $F[f]$  を引いて汎関数の  $\delta f$  による微小変化量  $\delta F$  を調べればよい。

$$\delta F \equiv F[f + \delta f] - F[f]$$

### 例題 1

汎関数

$$F[f] = \int_{x=0}^3 \{f(x)\}^2 dx$$

を一様に変化させたときの変分を求めよ。

### 解答

一様に変化させるのであるから関数のように微分すればよい。

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \int_{x=0}^3 2f(x)dx$$

$$\delta F = \delta f \int_{x=0}^3 2f(x)dx$$

数値例

$$f(x)=1 \text{ のとき} \quad \rightarrow \quad F[1]=3, \quad \delta F = 6\delta f$$

$$F[1+0.05]=3.3075$$

$$F[1+0.05] \cong F + \delta F = 3 + 6 \times 0.05 = 3.3$$

$F(1)$  から微小に変化させて  $F(1+0.05)$  にしたとき、 $F + \delta F$  とよく一致するから  $\delta F$  は変分であるという意味がよくわかる。

$$f(x)=x \text{ のとき} \quad \rightarrow \quad F[x^2]=48.6, \quad \delta F = 18\delta f$$

$$F[x^2+0.01]=48.7803$$

$$F[x^2+0.01] \cong F + \delta F = 48.6 + 18 \times 0.01 = 48.78$$

### 例題 2

次の汎関数の変分を求めよ

$$F[\phi] = \int_0^3 \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 2\phi \right\} dx$$

解答

一様に変化させるとは言われていないし、微分があるので、定義に従って変分した方が楽である。

$$F[\phi + \delta\phi] = \int_0^3 \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} + \frac{d\delta\phi}{dx} \right)^2 + 2(\phi + \delta\phi) \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \left[ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} + \left( \frac{d\delta\phi}{dx} \right)^2 \right\} + 2(\phi + \delta\phi) \right] dx$$

$$F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] = \int_0^3 \left[ \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} + \left( \frac{d\delta\phi}{dx} \right)^2 \right\} + 2\delta\phi \right] dx$$

ここで、2次の微小量は無視する。 $\delta\phi$  が  $\phi$  に比べて微小ならば  $d\delta\phi/dx$  も微小である。なぜならば、図 19 に示すように振幅が小さく、よって微係数も小さくなるからである。

$$\begin{aligned}
F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] &= \int_0^3 \left( \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} + 2\delta\phi \right) dx \\
&= \int_0^3 \left( \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} \right) dx + \int_0^3 (2\delta\phi) dx \\
&= \left[ \frac{d\phi}{dx} \delta\phi \right]_0^3 - \int_0^3 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \delta\phi \right) dx + \int_0^3 (2\delta\phi) dx \\
&= - \int_0^3 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} - 2 \right) \delta\phi dx + \left[ \frac{d\phi}{dx} \delta\phi \right]_0^3
\end{aligned}$$

あえてこの表現で止めておく。

## 変分原理

微分方程式  $Df = 0$  を解いて未知関数  $f$  を求める問題を考える。ある汎関数  $F[f]$  が極値（変分が 0 になるところ）になるような  $f$  を求めるとそれは  $Df = 0$  の解の  $f$  と全く同じものになることがある。つまり、汎関数  $F[f]$  の極値を求めることは微分方程式  $Df = 0$  を解くのと全く等価になることがある。

そのようなとき、汎関数を変分して極値を求め、汎関数の極値問題と等価な微分方程式を求めることを**変分原理(variational principle)**を適用すると言う。汎関数に変分原理を適用して得られる微分方程式は**オイラーの微分方程式**と呼ばれる。ただし、極小値を求めるときには放物曲面のように極小値はただ 1 つでなければならない ( $\delta^2 F > 0$ )。峰や鞍のような停留点があってもいけない。変分原理を適用して微分方程式を得る過程は電磁気学の分野でポテンシャルを微分してフィールドを求めたり、確率・統計の分野で積率母関数(moment generating function)を微分してモーメント(積率)を求めたりするのに似ている。

変分原理が使われている問題は数多く存在する。特に物理学の分野の一つである解析力学で汎関数や変分原理が多用される[8]。ラグランジアン、ハミルトニアンなどがあり、微分方程式を生成するので生成汎関数と呼ばれる。電磁界理論のモーメント法もガラーキン法を適用したら電流分布の微小変化に対して入力インピーダンスが変分表現になっており、安定な解を与えることが証明されている。ICT(Improved Circuit Theory)[9]でも入力インピーダンスは電流分布の変分表現になっていることを利用して、変分原理を適用してアンテナ上の電流分布を求めている。

変分原理は物理学では「系全体のエネルギー（汎関数）が最小になるように物理量（フィールドや温度）が分布する」というエントロピー増大の原理のような最小エネルギー原理として解釈することができる。フェルマー(Fermat)の原理として知られる「屈折率が場所によって異なる媒質中の 2 点間を光が通るときの光路は、2 点間を光が通るのに要する時間を最小にする路である」は、変分原理から来ている。屈折角はフレネルの反射・透過係数を求めるときに位相整合条件を適用して導出されるが、変分原理を用いてフェルマーの原理として解釈することもできる。どちらの解釈も正しいのだが、慣れないうちは誰でも変分原理の考え方は理解しにくいのではないだろうか。筆者も変分原理による解釈は天下りの感じがしてちょっと腑に落ちない。

**例題 3**

次の微分方程式を解け

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2$$

ただし、

$$\phi(0) = 3, \phi(3) = 0 \quad (\text{境界条件})$$

解答

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x + C_1$$

$$\phi(x) = x^2 + C_1x + C_2$$

境界条件を適用して積分定数を求めると

$$\phi(0) = C_2 = 3$$

$$\phi(3) = 9 + 3C_1 + 3 = 0, \quad C_1 = -4$$

よって、

$$\phi(x) = x^2 - 4x + 3$$

**例題 4**

例題 2 の汎関数に変分原理を適用し、オイラーの微分方程式を導け。ただし、例題 3 のときのよ  
うに  $\phi$  の値が  $x=0,3$  で強制されている（ディリクレ条件）とする。

解答

例題 2 の解答より、

$$F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] = \int_0^3 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} + 2 \right) \delta\phi dx + \left[ \frac{d\phi}{dx} \delta\phi \right]_0^3$$

ここで、 $\phi$  の値が  $x=0,3$  で強制されているので、微小変化させる関数  $\delta\phi$  も  $x=0,3$  の値を動かす  
ことはできない。よって  $\delta\phi(0) = \delta\phi(3) = 0$  となるような微小変化関数  $\delta\phi$  を用いるので、

$$F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] = \int_0^3 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} + 2 \right) \delta\phi dx$$

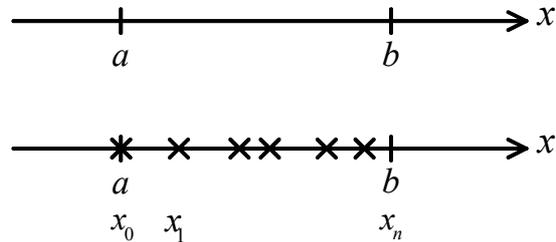
これがいかなる関数  $\delta\phi$  に対しても 0 となるためには

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2 = 0$$

を満たす必要がある。よって、この汎関数の極値問題を解いて  $\phi$  を求めればそれは上のオイラー  
の微分方程式の解である。



## A.3 重み付け、モーメント

図 21 区間 $[a,b]$ 

$f(x)=0$ が図 21 上のように区間 $[a,b]$ で定義されている。 $f(x)=0$ を区間 $[a,b]$ 全域で満たすようにしたい場合、その条件を書くとすれば例えば図 21 下に示されるような離散的な点で $f(x)=0$ を満足するような条件を書く。

$$\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f(x_2)=0 \\ \vdots \\ f(x_n)=0 \end{cases} \quad (36)$$

$f(x_i)$  ( $i=1,\dots,n$ )は正かも知れないし負かも知れないが、 $\{f(x_i)\}^2$ は絶対に正数なので、式(36)の条件式群をまとめて次のように書くことができる。

$$\sum_{i=0}^n \{f(x_i)\}^2 = 0 \quad (37)$$

しかし、式(37)もまだ離散的な点でしか $f(x)=0$ の条件を満足しないので、全区間で満たすようにするには、次のように離散点の間隔を無限に小さくする。

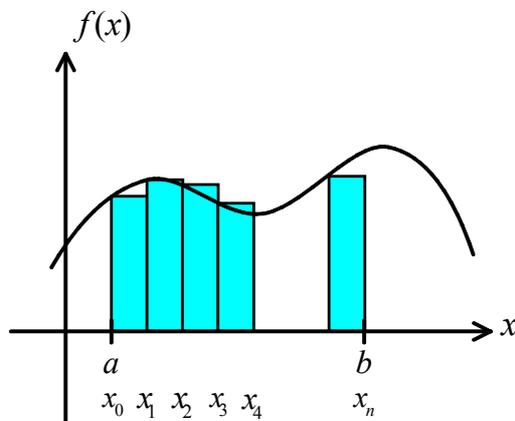


図 22 区分求積

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \Delta x \{f(x_i)\}^2 = 0$$

これは区分求積（リーマン積分の定義）であり、次のように表現される。

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = 0 \quad (38)$$

$f(x)$  が式(38)を満たすとき、 $f(x)$  は区間 $[a,b]$ 内の至る所で  $f(x)=0$  であり、目的の条件と等価になる。ここで、式(38)は次のモーメントの定義

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \quad (39)$$

の特殊な場合である。 $g(x)$  を **重み関数(weighting function)** または **試験関数(trial function)** と言う。

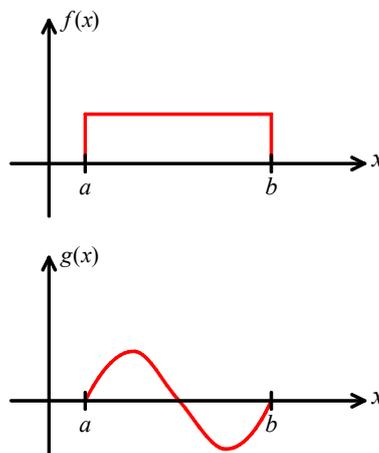


図 23 モーメント

式(39)の表現では図 23 に示されるように  $g(x)$  の形によっては「区間 $[a,b]$ 内で  $f(x)=0$ 」が満たされるとは限らない。しかし、 $g(x)=f(x)$  と選び、式(38)の表現にすると式(38)を満たすことと「区間 $[a,b]$ 内で  $f(x)=0$ 」となることは等価となる。 $g(x)=f(x)$  と選ぶ重み付けの方法は **ガラーキン法(Galerkin's method)** と呼ばれ、数値的に安定した解を与える。有限要素法だけでなく、**モーメント法(MoM, Method of Moments, Moment Method)** でもよく使われる手法である。

#### A.4 マクスウェルの方程式と境界条件

##### マクスウェルの方程式

基礎方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega \mathbf{B} = -\mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega \mathbf{D} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \end{cases}$$

物性方程式

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$$

等方性するとき

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega \mu \mathbf{H} = -\mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{J} \end{cases}$$

### 境界条件

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = -\mathbf{M}_s \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \rho_{ms}$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

上と下の条件式は同時に満たす。左右の条件式も同時に満たす。

### 電気壁(PEC=Perfect Electric Conductor)

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial n} = 0, H_n = 0$$

ただし、 $n$ は境界法線方向の軸、 $H_n$ は磁界の法線成分、 $\mathbf{H}_t$ は磁界の接線方向ベクトルである。

(証明)

$\hat{n} = \hat{z}$ ,  $x-y$ 平面を境界面と考えて( $\Rightarrow$ )の証明をする。

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0$$

$$\hat{n} \times \left( \frac{1}{j\omega \varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} \right) = 0, \quad \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B} = \hat{n} \cdot \mathbf{H} = \hat{z} \cdot \mathbf{H} = H_z = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial H_x}{\partial z} + \hat{z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$\hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \hat{z} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\hat{y} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \hat{x} \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial n} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial n} = 0$$

**磁気壁(PMC=Perfect Magnetic Conductor)**

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial n} = 0, E_n = 0$$

A.5 マイクロストリップ線路の準 TEM モード

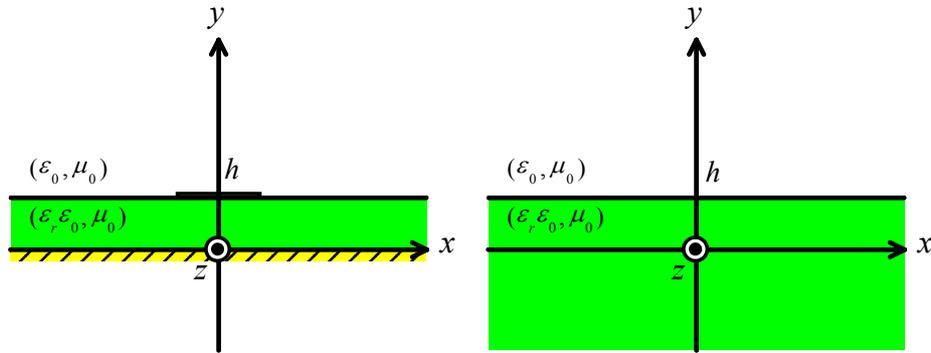


図 24 マイクロストリップ線路

$y = h$  平面での境界条件から図 24 左に示すマイクロストリップ線路では TEM 波が存在しないことを示す (右のモデルで考察)。

$y = h$  平面での境界条件:

$E_x$  と  $H_x$  は連続

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = -j\omega\mu H_x$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x|_{air} = (\nabla \times \mathbf{E})_x|_{dielectric}$$

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)_{air} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)_{dielectric}$$

空気中でも誘電体中でも  $z$  方向の伝搬定数は同一  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{air} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{dielectric} &= -\gamma (E_y|_{air} - E_y|_{dielectric}) \\ &= -\gamma (\epsilon_r E_y|_{dielectric} - E_y|_{dielectric}) \\ &= -\gamma (\epsilon_r - 1) E_y|_{dielectric} \neq 0 \end{aligned}$$

$E_z$  は恒等的に 0 にはなりえない。

同様に  $H_z \neq 0$

よって、TEM 波ではありえない。周波数が低いときは  $z$  成分はすごく小さいので準 TEM 波と呼ばれる。■

## A.6 物理定数

[参考] 理科年表, 丸善, 2002

真空の誘電率(permittivity)  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \cong 10^{-9} / (36\pi) \quad [\text{F} / \text{m}]$

真空の透磁率(permeability)  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad [\text{H} / \text{m}]$

真空の波動インピーダンス  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 376.7 \cong 120\pi \quad [\Omega]$

真空中の光速  $c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2.998 \times 10^8 \quad [\text{m} / \text{s}]$

素電荷  $e = 1.60 \times 10^{-19} \quad [\text{C}]$

電子の質量  $m_e = 9.109 \times 10^{-31} \quad [\text{kg}]$

陽子の質量  $m_p = 1.673 \times 10^{-27} \quad [\text{kg}]$

万有引力定数  $G = 6.673 \times 10^{-11} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]$

プランク定数  $h = 6.626 \times 10^{-34} \quad [\text{J} \cdot \text{s}]$

$$\hbar = h / (2\pi) = 1.0546 \times 10^{-34} \quad [\text{J} \cdot \text{s}]$$

ボルツマン定数  $k = 1.38 \times 10^{-23} \cong 10^{-9} / (36\pi) \quad [\text{J} / \text{K}]$

## A.7 電気媒質定数

[参考] Ansoft HFSS Ver.8

導体

実際には導電率は温度によって変化する。

20°Cの値を下の表に示す。

媒質名	比誘電率 $\epsilon_r$	比透磁率 $\mu_r$	導電率 $\sigma$ ( $\times 10^7$ ) (S/m)
アルミニウム	1	1.000021	3.80
真鍮	1	1	1.50
青銅	1	1	1.00
銅	1	0.999991	5.80
コバルト	1	250	1.00
クロム	1	1	0.76
金	1	0.99996	4.10
グラファイト	1	1	0.007
鉄	1	4000	1.03
鉛	1	0.999983	0.50
ニッケル	1	600	1.45
白金	1	1	0.93
銀	1	0.99998	6.10
はんだ	1	1	0.70
ステンレス	1	1	0.11
チタン	1	1.00018	0.21
タングステン	1	1	1.82
亜鉛	1	1	1.67
パラジウム	1	1.00082	0.93

## 誘電体

実際には誘電率は温度、周波数によって変化する。

また、誘電体の分極は電子分極、原子分極、配向分極、界面分極などの複数の分極によって構成されており、それらの分極が印加電界の周波数に追従できなくなり、急激に誘電率が変化する周波数がある。

媒質名	比誘電率 $\epsilon_r$	比透磁率 $\mu_r$	導電率 $\sigma$ ( $S/m$ )
真空	1	1	0
空気	1.0006	1	0
テフロン	2.2	1	0
ダイヤモンド	16.5	1	$1.00 \times 10^{-13}$
ダイヤモンド(高圧)	5.7	1	0
ガリウムヒ素	12.9	1	0
ガラス	5.5	1	$1.00 \times 10^{-12}$
ゴム(硬い)	3	1	$1.00 \times 10^{-15}$
サファイア	10	1	0
シリコン	11.9	1	0
石英ガラス( $SiO_2$ )	4	1	0

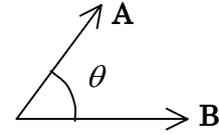
## その他

周波数によって、誘電体と導体のどちらの性質が支配的となるかが変わる。

媒質名	比誘電率 $\epsilon_r$	比透磁率 $\mu_r$	導電率 $\sigma$ ( $S/m$ )
フェライト	12	1000	0.01
蒸留水	81	0.999991	0.0002
水(綺麗)	81	0.999991	0.01
海水	81	0.999991	4

## A.8 ベクトル公式

(1)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$

( $\theta$ :  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の間の角)

(2)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{u}_{AB} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$

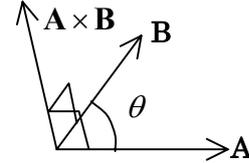
( $\hat{u}_{AB}$ :  $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  の方に回転する右ねじの進む方向の

単位ベクトル)

(3)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(4)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$

(5)  $\hat{u}_A = \mathbf{A} / |\mathbf{A}|$

( $\mathbf{A}$  方向の単位ベクトル)

(6)  $\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$

(7)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(8)  $\nabla \times (\nabla V) = 0$

(9)  $\nabla \cdot (V \mathbf{A}) = V \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

(10)  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

(11)  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

$$\text{ここで、 } (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \mathbf{B} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{A}$$

(12)  $\nabla \times (V \mathbf{A}) = \nabla V \times \mathbf{A} + V \nabla \times \mathbf{A}$

(13)  $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$

(14)  $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$  (ラプラシアン)

(15)  $\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})$  (ベクトル・ラプラシアン)

$$\nabla V = \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z}$$

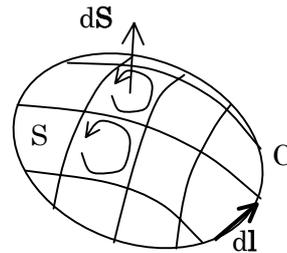
(16)  $= \hat{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z}$

$$= \hat{r} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

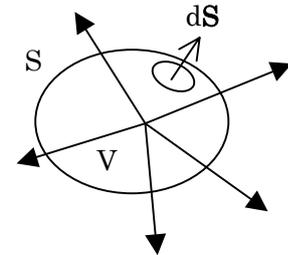
$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 (17) \quad &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
 (18) \quad &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(19) \quad \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{ストークスの定理})$$



$$(20) \quad \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{ガウスの発散定理})$$



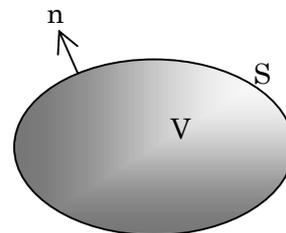
(21) Green の定理

Green の第一公式

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_V \{ \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \} dV$$

Green の第二公式

$$\iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_V \{ \nabla^2 g - g \nabla^2 f \} dV$$



ここで、n は S の内部から外側に向かう S に垂直方向の座標である

## Reference

- [1] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and J. L. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 23, pp. 805-824, 1956.
- [2] M. V. K. Chari and P. P. Silvester, "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems," John Wiley & Sons, 1980.
- [3] 小柴正則、「高周波電磁界における有限要素法の基礎と実用例」、電子情報通信学会、アンテナ・伝播研究専門委員会、ワークショップ第22回、2002年4月26日
- [4] 寺沢寛一、「自然科学者のための数学概論応用編」、岩波書店、1995.
- [5] J. L. Volakis, "Finite Element Method for Electromagnetics", IEEE Press
- [6] M. Salazar-Palma, et al., "Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling", Artech House, 1998.
- [7] 中島将光、「マイクロ波工学 基礎と原理」、森北出版、1998.
- [8] 杉田勝実、岡本良夫、関根松夫、「経路積分と量子電磁気学」、森北出版、1998.
- [9] N. Inagaki, "An Improved Circuit Theory of a Multielement Antenna," *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. AP-17, No. 2, Mar. 1969.
- [10] S. M. Rao, D. R. Wilton, A. W. Glisson, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape," *IEEE Trans on Antennas and Propagation*, Vol. AP-30, No. 3, May. 1982.
- [11] T. Hirano, J. Hirokawa, M. Ando, "Method of moments analysis of a waveguide crossed slot by using the eigenmode basis functions derived by the edge-based finite-element method", *IEE Proceedings Microwave Antennas and Propagation*. Vol. 147, no. 5, pp.349-353, Oct. 2000.
- [12] 寺田 文行、「線形代数」、サイエンスライブラリ理工系の数学〈23〉
- [13] 笠原 皓司、「線形代数学」、サイエンスライブラリ
- [14] ギルバート・ストラング (著)、井上 昭 (翻訳)、「線形代数とその応用」, 産業図書
- [15] Guiseppe Pelosi, Roberto Coccioli, Stefano Selleri, "Quick Finite Elements for Electromagnetic Waves," Artech House Antenna Library

