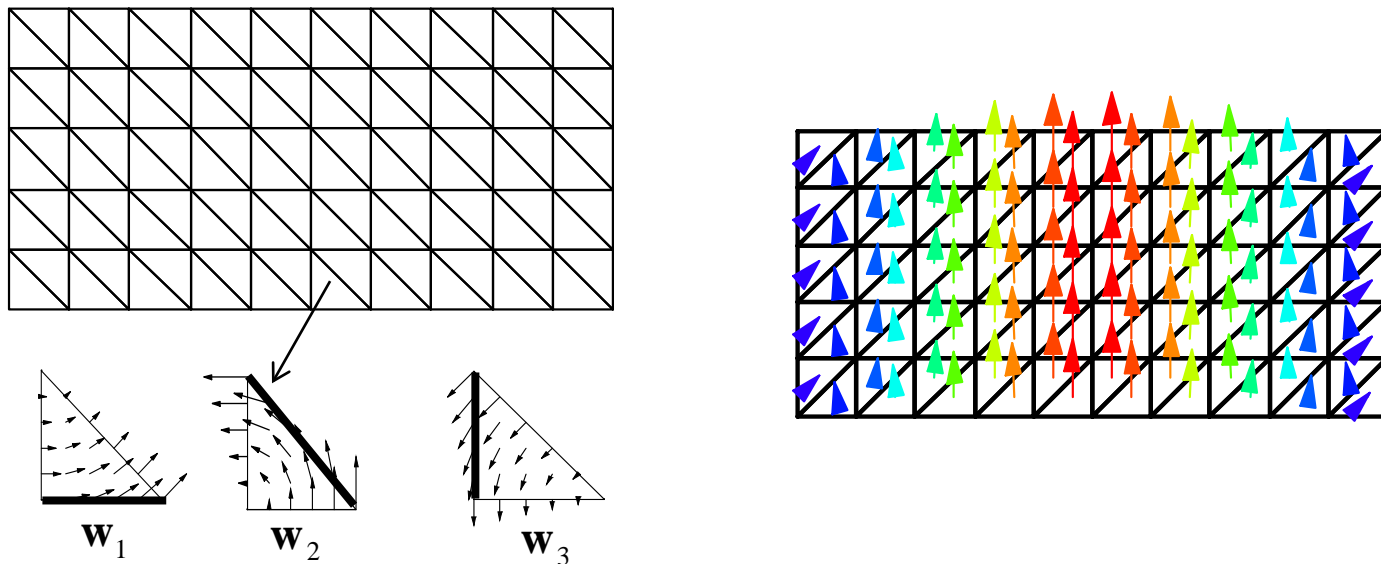


有限要素法による電磁界シミュレーション入門 ～導波管ポート・集中ポート・電磁流源による 励振モデル化とCOMSOLでの解析例～



東京工業大学 環境・社会理工学院
平野 拓一

E-mail: hirano.t.aa@m.titech.ac.jp

内容

有限要素法による電磁界シミュレーション入門

■基礎(ベクトル基底関数)

(2016/1/14)

■プログラム例(導波路モード解析)

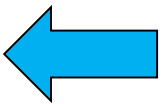
(2016/1/26)

■平面波入射・ビーム入射の励振モデル化

(2016/9/29)

■給電部の励振モデル化(集中定数ポート、導波路モードのポート)

(2016/11/24)



http://www.takuichi.net/em_analysis/fem/fem_j.html



基礎

～ マクスウェルの方程式 ～

微分形

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$$

マクスウェルの方程式と電磁界シミュレータの役割⁴

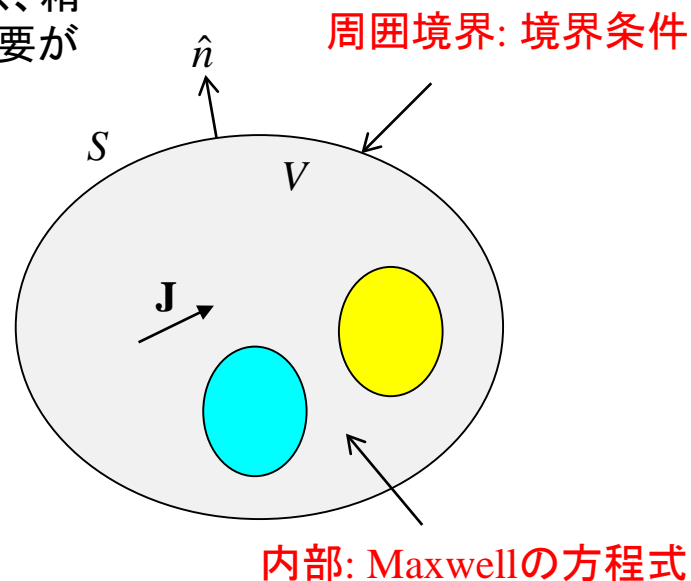
マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \text{ファラデーの法則} & \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{アンペアの法則} & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

電磁界シミュレータの目的は、上のマクスウェルの方程式を速く、精度良く、なるべく一般の構造を解くこと。境界条件を指定する必要がある(→微分方程式論の境界値問題)。

解くために必要な条件(解析の前準備)

1. 構造および媒質(ε, μ, σ)
 2. 境界条件
 3. 励振波源
- 上をまとめて「解析モデル」と呼ぶ



静電界/静磁界/準静電界/準静磁界

マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{逆起電力 (ファラデーの法則)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{変位電流 (アンペアの法則)} \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \cong 0$ 準静電界

変位電流は無視できない (ε : 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

時間変化なし $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
静電界/静磁界

$\frac{\partial}{\partial t} \cong 0$ 準静磁界

独立

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{(静電界)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} & \text{(静磁界)} \end{cases}$$

$V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ (Voltage)
 $I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ (Current)

逆起電力は無視できない (μ : 大)

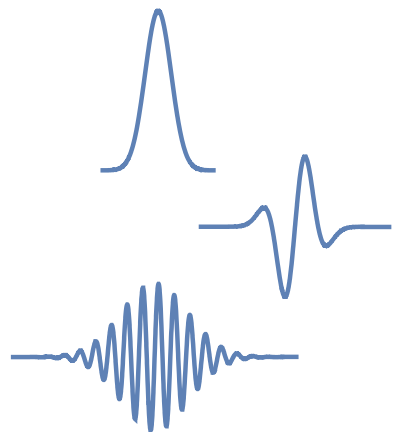
$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \end{cases}$$

コイル・モーター等の解析

時間領域と周波数領域

時間領域

マクスウェルの方程式

境界値問題(空間)
+ 初期値問題(時間)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

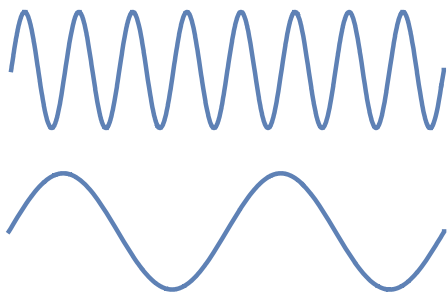
FDTD

周波数領域

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad \text{フーリエ変換}$$

調和振動

境界値問題(空間)



$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

MoM, FEM, FDFD



波動方程式(EまたはHのみの式)

マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} = 0$$

$$\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} + j\omega\mu_0\mathbf{H} = 0 \quad \text{場所の関数}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) + j\omega\mu_0\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

∇ × H を消去

$$-\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}$$

Hを消去してEの方程式を導く

ヘルムホルツの波動方程式
(有限要素法の基礎方程式)

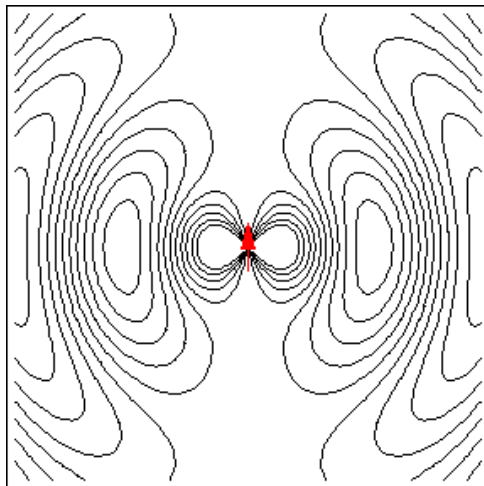
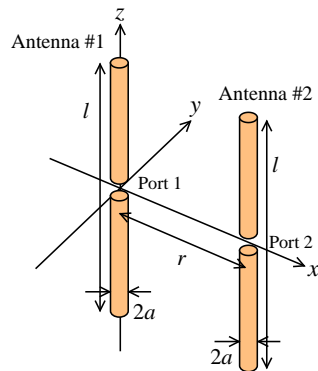
$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = -jk_0\eta_0\mathbf{J}$$

同様に、Eを消去してHの方程式を導くこともできる

励振問題と非励振問題

励振波源あり 行列方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}$$

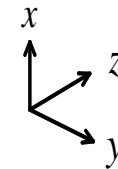


励振波源なし 固有値問題 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

$$\partial / \partial z = -\gamma = -(\alpha + j\beta)$$

導波路, モードの解析

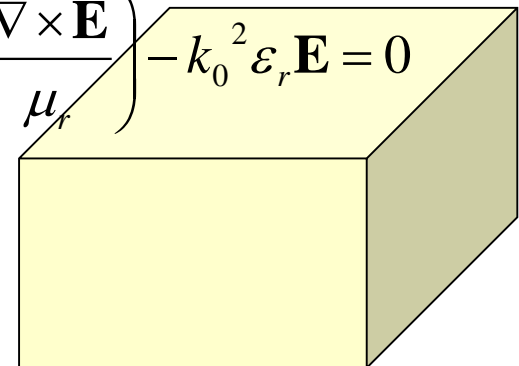
2-D



$$\nabla_t \times \left(\frac{\nabla_t \times \mathbf{E}_t}{\mu_r} \right) - (k_0^2 \varepsilon_r + \Gamma) \mathbf{E}_t = 0$$

共振器 $\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0$

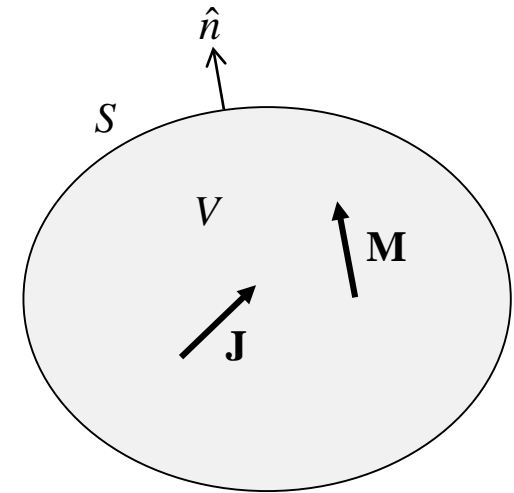
3-D



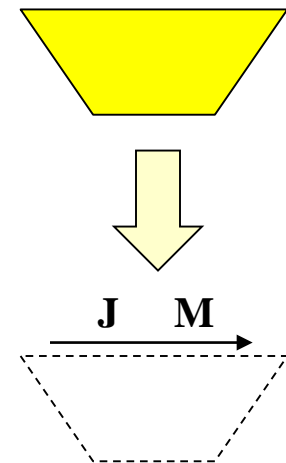
どの周波数でどのような形で共振するのか?

いくつかの励振方法

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$



- マクスウェルの方程式の印加電流および印加磁流は電磁界を生成する。
- 空間に広く(全体にも)分布していても構わないが、実際にはそのような励振方法は現実的でないため、あまり用いられない。
- 開口面アンテナの解析において、開口面から内側を無視するための等価波源としては有用である。

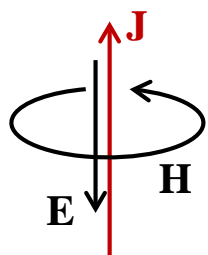


$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

磁流は実際には存在しないが、数式として導入すると界等価定理の表面磁流 $\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ (表面電流: $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$) を扱う上で有益である。

次のように文字を入れ替えると \mathbf{E} , \mathbf{H} が \mathbf{J} による放射の式と同形になる(双対性)ので、 \mathbf{M} からの放射の特性は \mathbf{E} , \mathbf{H} を次のように入れ替えたものと理解できる。

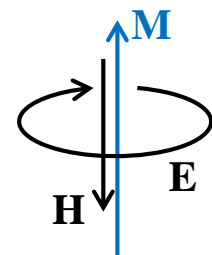
$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{M} \quad \varepsilon \rightarrow \mu \quad \mu \rightarrow \varepsilon$$



$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

文字の置換

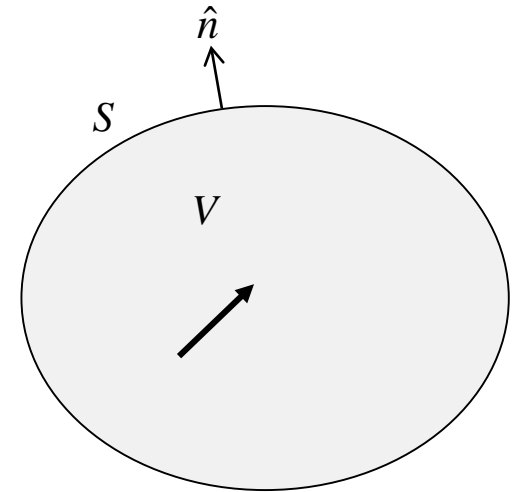
$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ -\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{M} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases}$$



\mathbf{M} が \mathbf{H} , $-\mathbf{E}$ を作るのは μ と ε を交換した上で、 \mathbf{J} が \mathbf{E} , \mathbf{H} を作るのと同様になる。

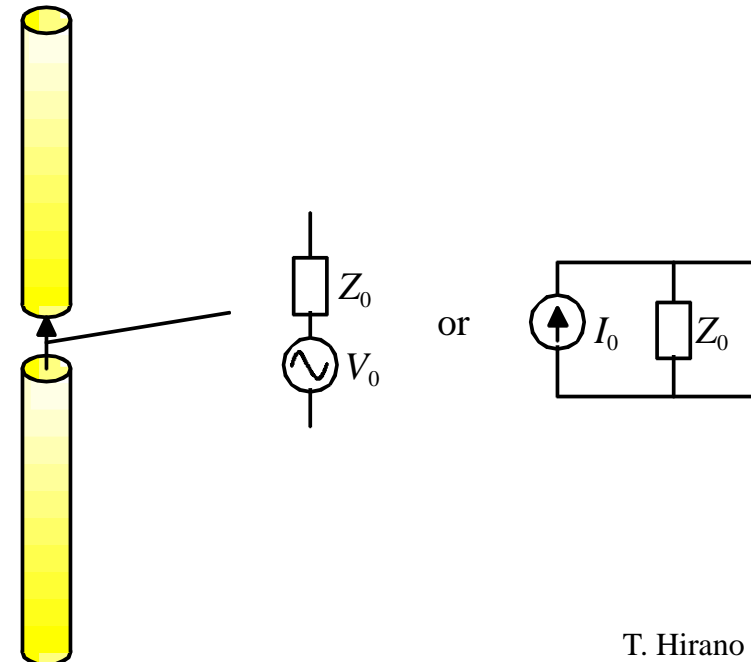
励振方法2: 集中ポート

- 電圧・電流源励振は波長に比して微小（集中定数）であることが基本である。
- 微小なので、集中ポートでは印加電磁界分布の形状にはほとんど依存しない。
- 通常、内部インピーダンスを指定する。つまり、電圧（電界）と電流（磁界）の比を指定する。
- 電磁界解析では、実際には表面インピーダンス上に電界あるいは磁界を印加する。

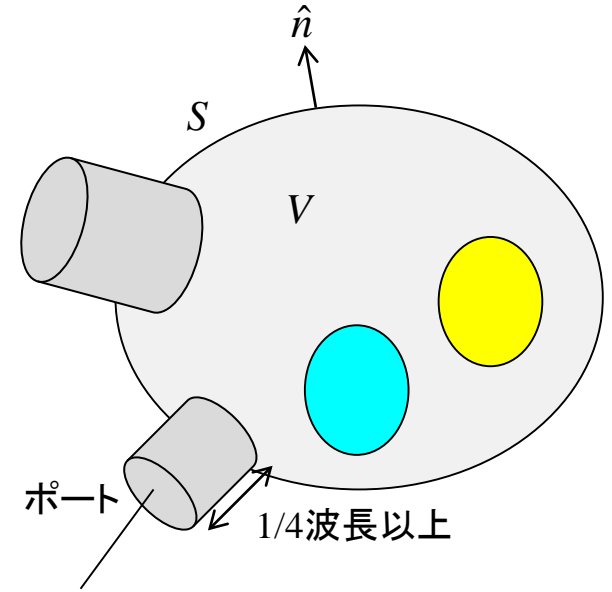


$$Z_0 = V_0 / I_0$$

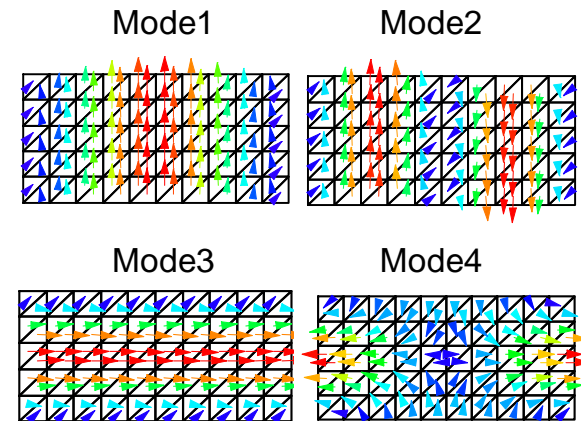
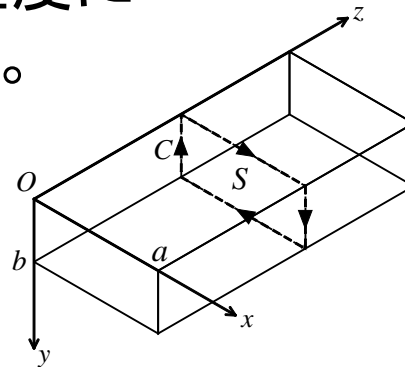
$$\begin{cases} V_0 = -\int_{\Gamma_V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ I_0 = \int_{\Gamma_I} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \end{cases}$$



- 導波路モード励振は境界にて行う。
- 導波路モード給電では、導波路部分は少なくとも1/2波長以上はモデル化する。(不連続部で発生した高次モードが十分減衰するように)
- 単一モード条件であるかどうかを確認する。多モードならば、それらも考慮して解析する。
- 開放型線路の場合には電磁界モードが端で十分減衰する程度に広い面積でポートを定義する。



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1^{(+)} + \sum_u B_u \mathbf{E}_u^{(-)}$$



マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

E_x, H_x は全部で6成分。従って、 E_x, E_y, H_x, H_y の4成分を E_z, H_z で表現することが可能。

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{k_c^2} \left(-j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ E_y &= \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ H_x &= \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_y &= \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

カットオフ(遮断)波数

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\varepsilon\mu}$$

E_z, H_z は独立にヘルムホルツの方程式を満たす。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0$$



E_z	H_z	
0	0	TEM(Transverse electric and magnetic)波
0	Exist	TE(Transverse electric)波, H波
Exist	0	TM(Transverse magnetic)波, E波
Exist	Exist	ハイブリッド波

ヘルツ・ベクトルによる表現

ヘルツ・ベクトルはヘルツが微小ダイポールの放射界の計算で初めて導入し、導波管解析にも便利なのでよく用いられる。

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{\Pi}_h \quad \text{磁気型ヘルツベクトル} \quad \mathbf{A} = j\omega\mu\varepsilon\mathbf{\Pi}_e$$

$$\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\nabla \times \mathbf{\Pi}_e \quad \text{電気型ヘルツベクトル} \quad \mathbf{F} = j\omega\mu\varepsilon\mathbf{\Pi}_h$$

導波路の電磁界は導波管軸成分しか持たない次のヘルツベクトルで表現可能である。

$$\mathbf{\Pi}_h = \hat{z}\psi_h \quad \nabla_t^2 \psi_h + k_c^2 \psi_h = 0$$

$$\mathbf{\Pi}_e = \hat{z}\psi_e \quad \nabla_t^2 \psi_e + k_c^2 \psi_e = 0$$

$$\mathbf{E} = -\hat{z}\nabla_t^2 \psi_e - \gamma\nabla_t \psi_e + j\omega\mu\hat{z} \times \nabla_t \psi_h$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\varepsilon\hat{z} \times \nabla_t \psi_e - \hat{z}\nabla_t^2 \psi_h - \gamma\nabla_t \psi_h$$

これはEz, Hzによる表現と等価

$$\nabla_t = \hat{x}(\partial/\partial x) + \hat{y}(\partial/\partial y)$$

$$\nabla_t = \hat{\rho}(\partial/\partial\rho) + \hat{\phi}(1/\rho)(\partial/\partial\phi)$$



モード関数の表現

導波路内の電磁界はモードの和で表現できる

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \sum_u \left(A_u \mathbf{E}_u^{(+)} + B_u \mathbf{E}_u^{(-)} \right) \\ \mathbf{H} = \sum_u \left(A_u \mathbf{H}_u^{(+)} + B_u \mathbf{H}_u^{(-)} \right) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{モード関数} \\ \text{モード分布} \\ \text{伝搬定数} \end{array} \begin{cases} \mathbf{E}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{tu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z) \\ \mathbf{H}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \{ \pm \mathbf{h}_{tu}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_{lu}(\mathbf{r}) \} \exp(\mp \gamma_u z) \end{cases}$$

u : モードの番号 (TEM, TE_{mn}, TM_{mn})

t : transversal (断面方向) ... xy 成分
 l : longitudinal (軸方向) ... z 成分

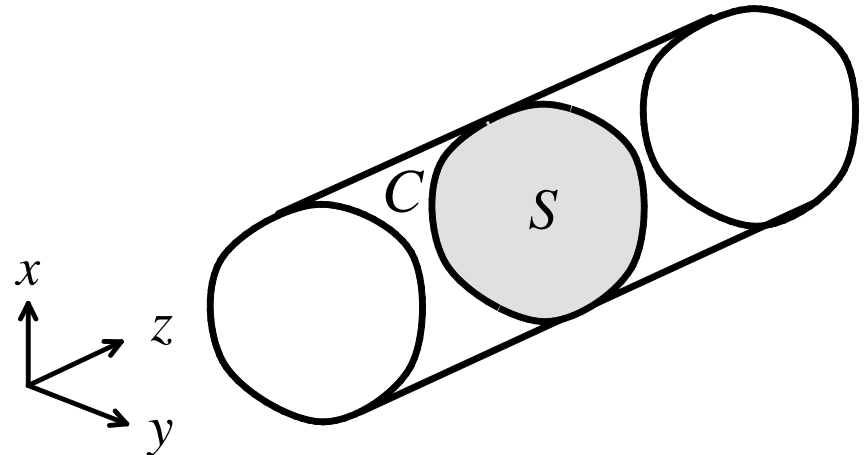
モード関数は導波路問題の固有値問題を解いて得られる。つまり、非励振の問題の解である。モード解析によって、モードの分布とそのモードの伝搬定数が得られる。

モード関数の直交性

$$\iint_S \left(\mathbf{E}_u^{(\pm)} \times \mathbf{H}_v^{(+)} \right) \cdot d\mathbf{S} = +\delta_{uv} e^{(\mp \gamma_u - \gamma_v)z}$$

$$\iint_S \left(\mathbf{E}_u^{(\pm)} \times \mathbf{H}_v^{(-)} \right) \cdot d\mathbf{S} = -\delta_{uv} e^{(\mp \gamma_u + \gamma_v)z}$$

$$\delta_{uv} = 1 (u = v), 0 (u \neq v)$$

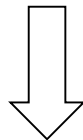


伝搬定数(減衰定数、位相定数)

±z方向に進むモードuの正規化電界モード関数

$$\mathbf{E}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{tu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z)$$

$$\begin{aligned} \exp(-\gamma z) &= \exp(-(\alpha + j\beta)z) \\ &= \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z) \end{aligned}$$



瞬時値表現

$$\text{Re}[\exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z) \exp(j\omega t)]$$

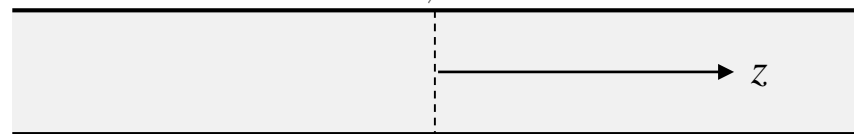
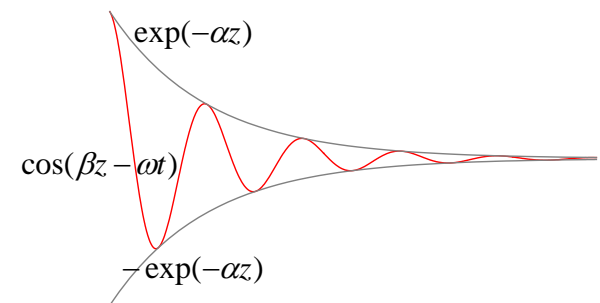
$$= \text{Re}[\exp(-\alpha z) \exp(-j(\beta z - \omega t))]$$

$$= \text{Re}[\exp(-\alpha z) \{\cos(\beta z - \omega t) - j \sin(\beta z - \omega t)\}]$$

$$= \exp(-\alpha z) \cos(\beta z - \omega t)$$

伝搬定数: $\gamma = \alpha + j\beta$

α 減衰定数 $j\beta$ 位相定数

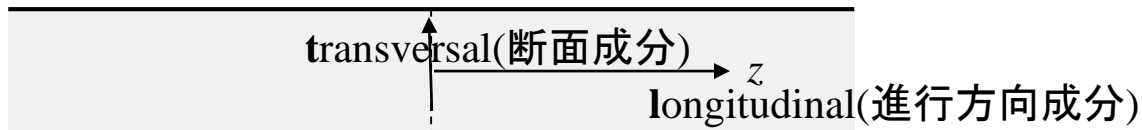


TEモード(H波)

電界の正規化モード関数 磁界の正規化モード関数	$\mathbf{E}_{hu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{hu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z)$ $\mathbf{H}_{hu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \{\pm \mathbf{h}_{hu}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_{hlu}(\mathbf{r})\} \exp(\mp \gamma_u z)$
断面成分	$\mathbf{h}_{hu}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k_{cu}} \sqrt{Y_{hu}} \nabla_t \psi_{hu}(\mathbf{r})$ $\mathbf{e}_{hu}(\mathbf{r}) = -Z_{hu} \hat{z} \times \mathbf{h}_{hu}(\mathbf{r})$
管軸成分	$\mathbf{h}_{hlu}(\mathbf{r}) = \hat{z} \frac{k_{cu}}{\gamma_u} \sqrt{Y_{hu}} \psi_{hu}(\mathbf{r})$
ヘルツ・ポテンシャル カットオフ波数 伝搬定数 特性インピーダンス 管内波長	$\psi_{hu}(\mathbf{r}): \text{断面構造で決まる(固有関数)}$ $k_{cu}: \text{断面構造で決まる(固有値)}$ $\gamma_u^2 = k_{cu}^2 - \mu_r \varepsilon_r k_0^2$ $Z_{hu} = \frac{1}{Y_{hu}} = \frac{j\mu_r k_0 \eta_0}{\gamma_u}$ $\lambda_g = 2\pi / \beta_u, \quad \beta_u = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r k_0^2 - k_{cu}^2}$

TMモード(E波)

電界の正規化モード関数 磁界の正規化モード関数	$\mathbf{E}_{eu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \{\mathbf{e}_{etu}(\mathbf{r}) \pm \mathbf{e}_{e\ell u}(\mathbf{r})\} \exp(\mp \gamma_u z)$ $\mathbf{H}_{eu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \pm \mathbf{h}_{etu}(\mathbf{r}) \exp(\mp \gamma_u z)$
断面成分	$\mathbf{e}_{etu}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k_{cu}} \sqrt{Z_{eu}} \nabla_t \psi_{eu}(\mathbf{r})$ $\mathbf{h}_{etu}(\mathbf{r}) = Y_{eu} \hat{z} \times \mathbf{e}_{etu}(\mathbf{r})$
管軸成分	$\mathbf{e}_{e\ell u}(\mathbf{r}) = \hat{z} \frac{k_{cu}}{\gamma_u} \sqrt{Z_{eu}} \psi_{eu}(\mathbf{r})$
ヘルツ・ポテンシャル カットオフ波数 伝搬定数 特性インピーダンス 管内波長	$\psi_{eu}(\mathbf{r}): \text{断面構造で決まる(固有関数)}$ $k_{cu}^2: \text{断面構造で決まる(固有値)}$ $\gamma_u^2 = k_{cu}^2 - \mu_r \varepsilon_r k_0^2$ $Z_{eu} = \frac{1}{Y_{eu}} = \frac{\gamma_u \eta_0}{j\varepsilon_r k_0}$ $\lambda_g = 2\pi / \beta_u, \quad \beta_u = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r k_0^2 - k_{cu}^2}$



インデックスの意味



速度(位相速度と群速度)

位相速度

$$v_{pu} = \frac{\omega}{\beta_u} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_{cu}^2}}$$

エネルギー伝送速度

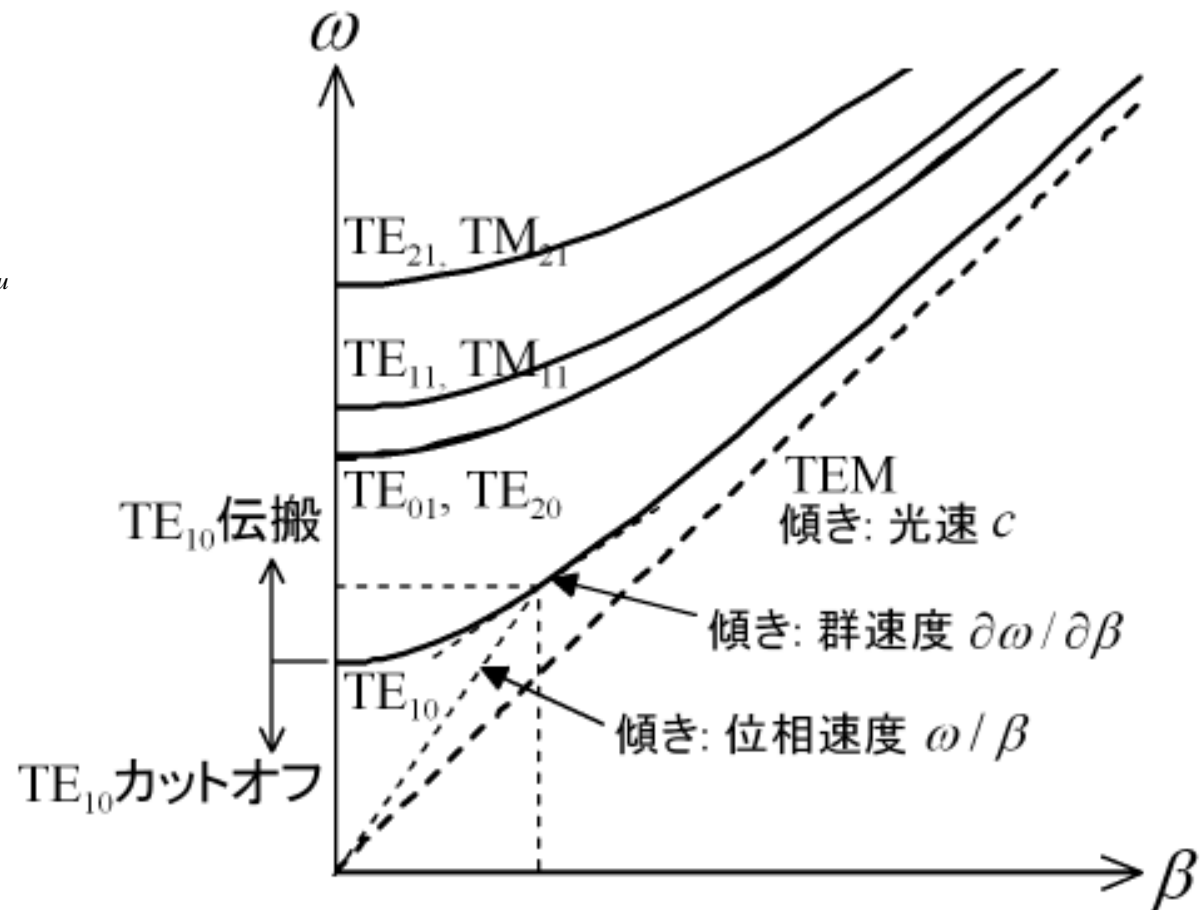
$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon |\mathbf{E}_u|^2 dv + \frac{1}{2} \iiint_V \mu |\mathbf{H}_u|^2 dv$$

$$v_{eu} = \frac{P}{W}$$

群速度

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}$$

$$v_p v_g = c^2$$



電力

$$P = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S}\right]$$

$$P = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \iint_S \left(\sum_u A_u \mathbf{E}_{tu}^{(+)} \right) \times \left(- \sum_u A_u^* \mathbf{H}_{tu}^{(-)} \right) \cdot d\mathbf{S}\right]$$

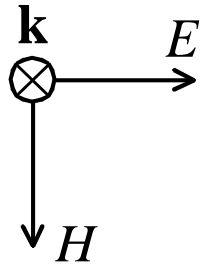
$$= \frac{1}{2} \sum_u |A_u|^2 \quad [\text{W}]$$



直交性

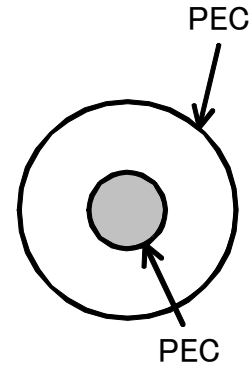
様々な伝送線路

波数ベクトル

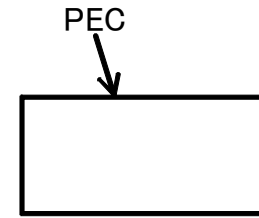


(a) 自由空間

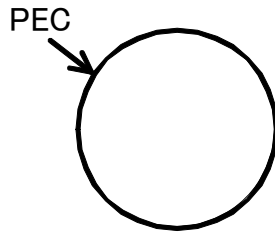
PEC(金属)

(b) 平行二本線路
(レッヘル線路)

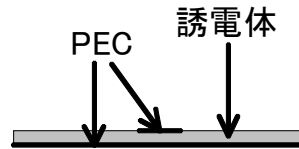
(c) 同軸線路



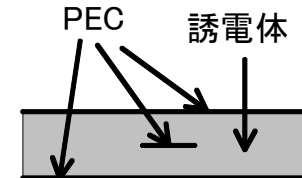
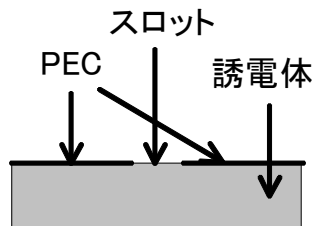
(d) 方形導波管



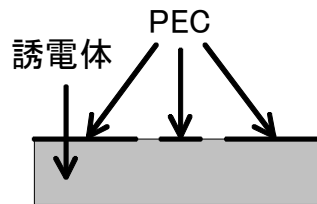
(e) 円形導波管



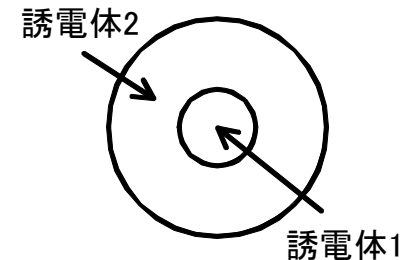
(f) マイクロストリップ線路

(g) ストリップ線路
(トリプレート線路)

(h) スロット線路



(i) コプレーナガイド

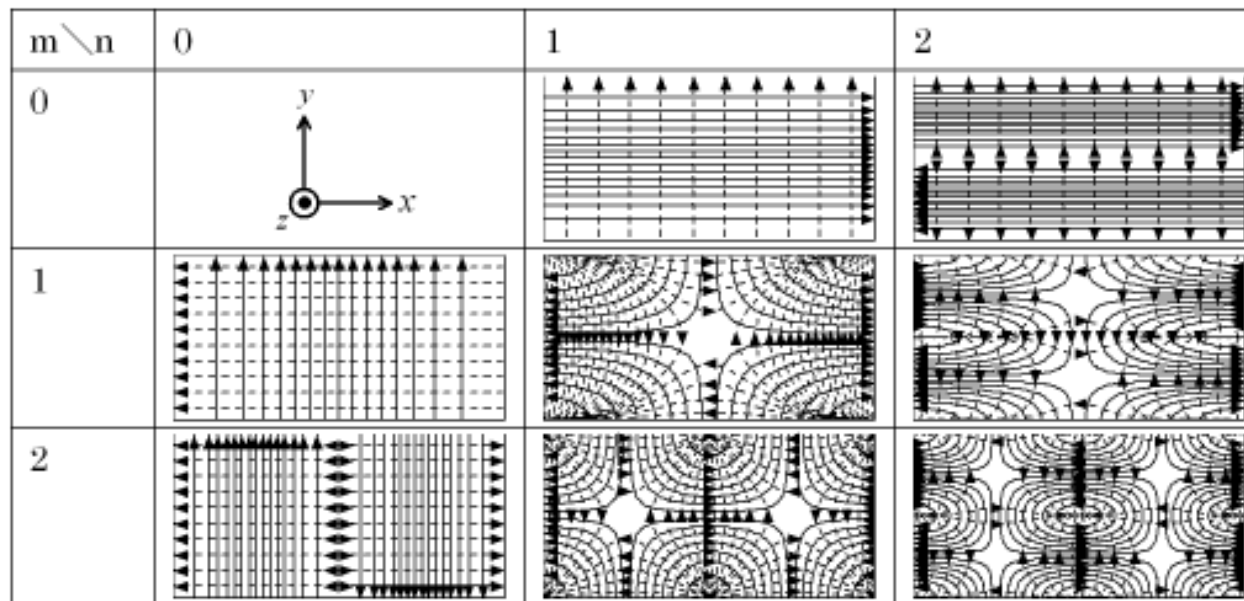


(j) 光ファイバ

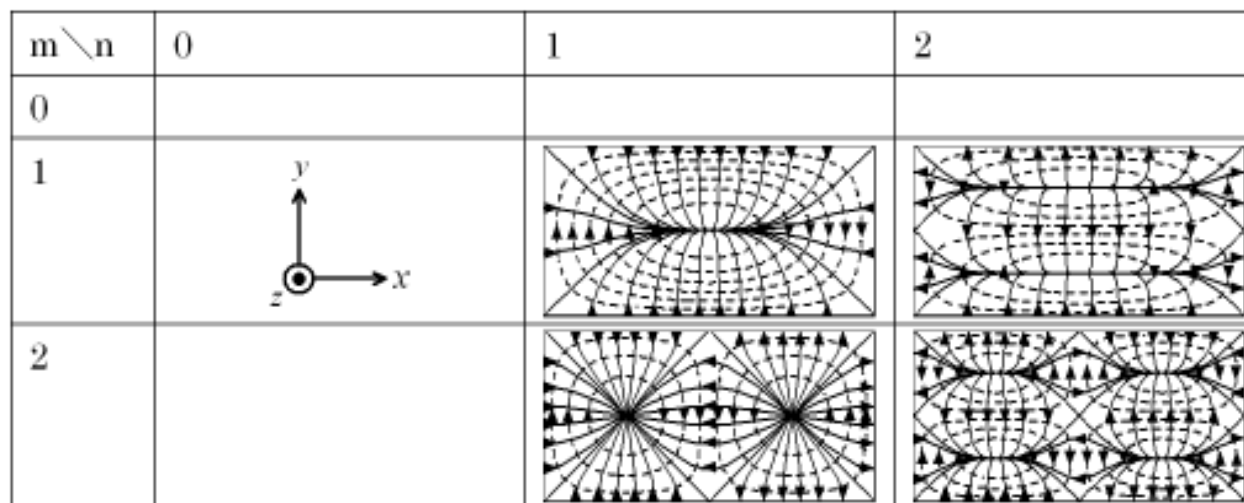
方形導波管の断面内のモード関数分布

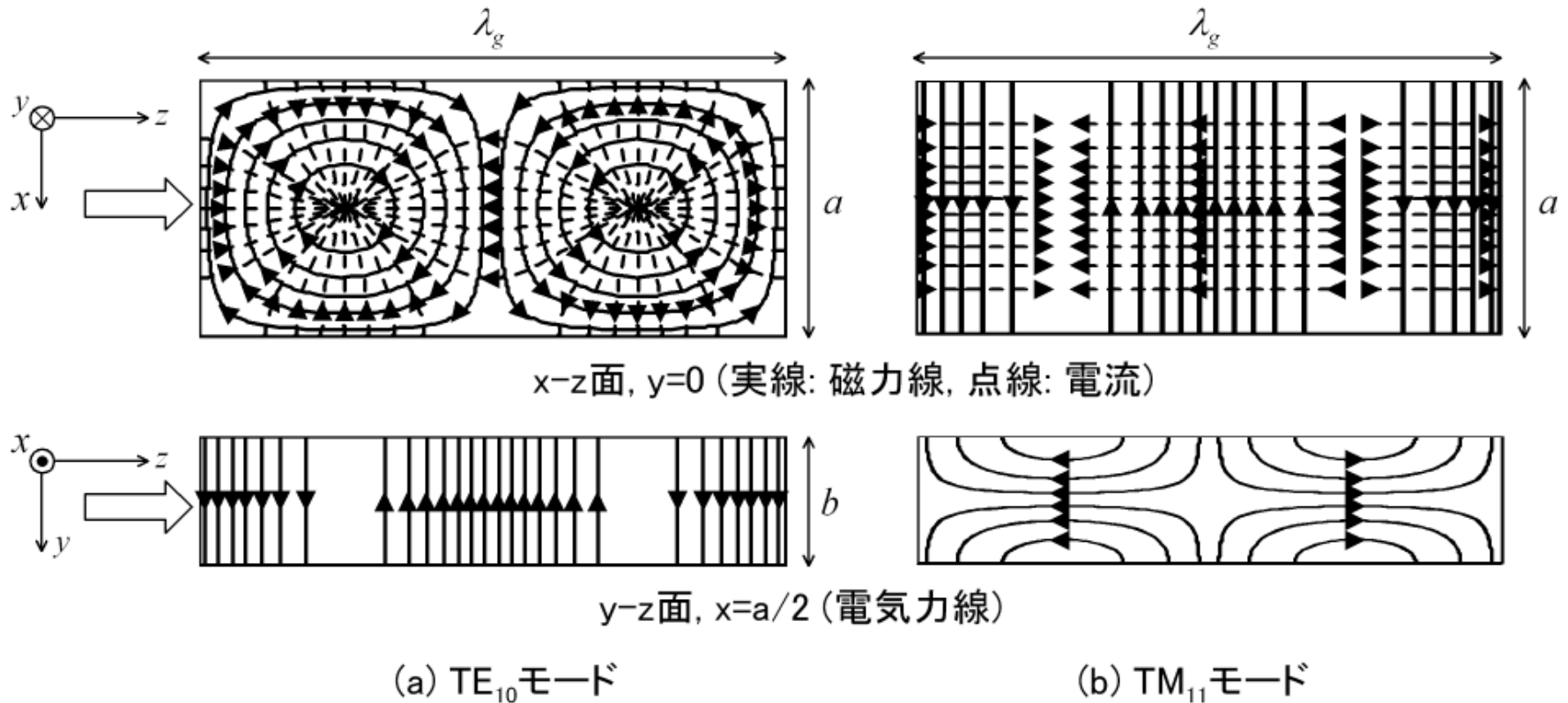
(実線: 電気力線, 点線: 磁力線)

TE_{mn} モード



TM_{mn} モード





導波路モードの考え方



- ✳️線路は各ブロックの信号伝送に用いられる。
- ✳️不連続部では電磁界の境界条件を満たすように高次モードが発生する。減衰モードはその場所を離れると指数関数的に減衰する。
- ✳️線路は普通、シングルモード(単一モード)で用いる。同軸ケーブルも高周波になるほど細くなるのはこのため。マルチモード(多モード)では線路の曲げ方等によって特性は大きく変化するので安定動作しない。
- ✳️線路は断面形状が無限に続くものとしてモードを計算しているので、不連続部やコーナ一部では予期しない放射などが生じ得る。
- ✳️線路の断面は理想的には2次元の無限に広い面を必要とするので(導波管のような閉構造は別)、線路を近づけると予期しない線路間の結合が起こる。

カットオフ周波数

fcu (GHz)

Analytic

FEM

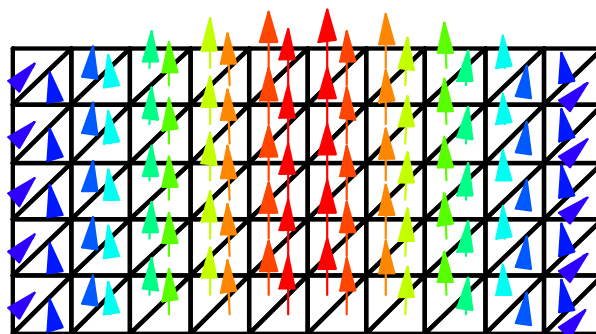
(1,0): 2.58 Mode1: 2.58

(0,1): 5.15 Mode2: 5.13

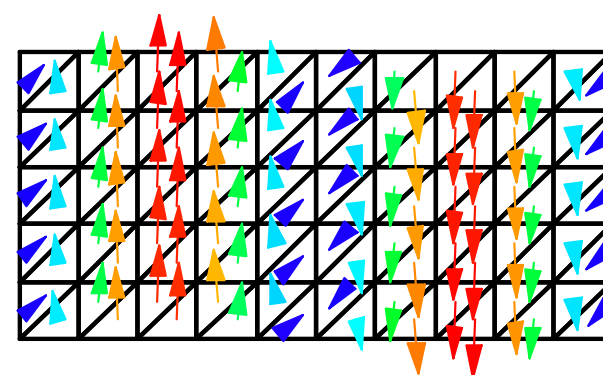
(2,0): 5.16 Mode3: 5.30

(1,1): 5.76 Mode4: 5.92

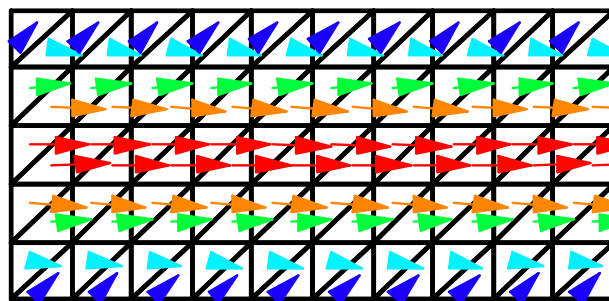
Mode1



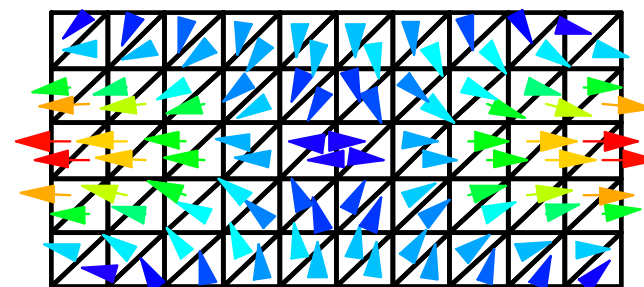
Mode2



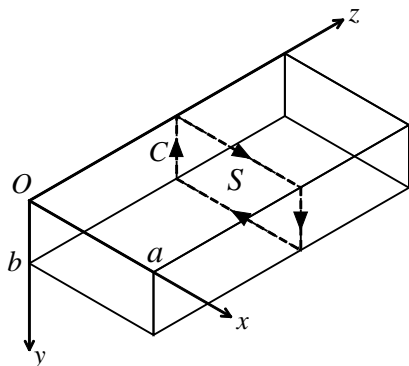
Mode3



Mode4

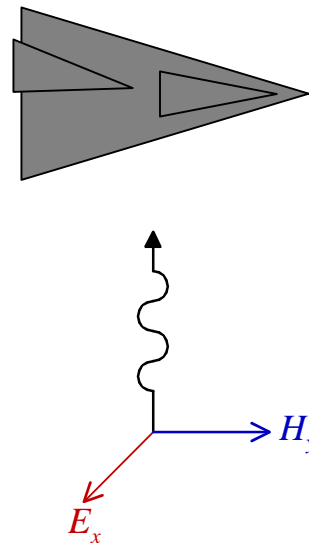


高次モードではより多くのメッシュ分割が必要

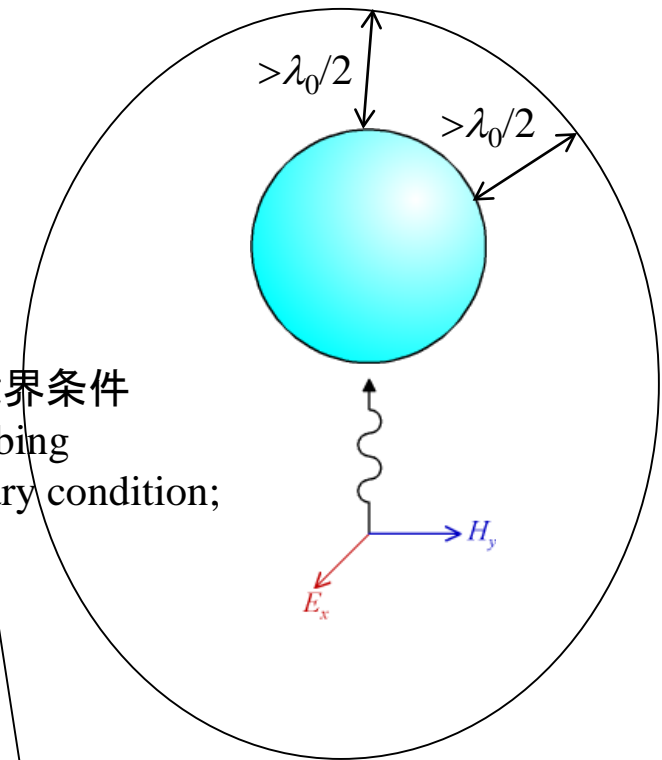


励振方法4: 平面波入射

- 平面波入射の場合は、物体から吸収境界壁までの距離は1/2波長程度以上離す。
- RCS (Radar Cross Section)解析に使われる。



吸収境界条件
(Absorbing
boundary condition;
ABC)



COMSOL: 散乱境界条件 or PML
HFSS: 放射境界 or PML
CST: Open Boundary or PML

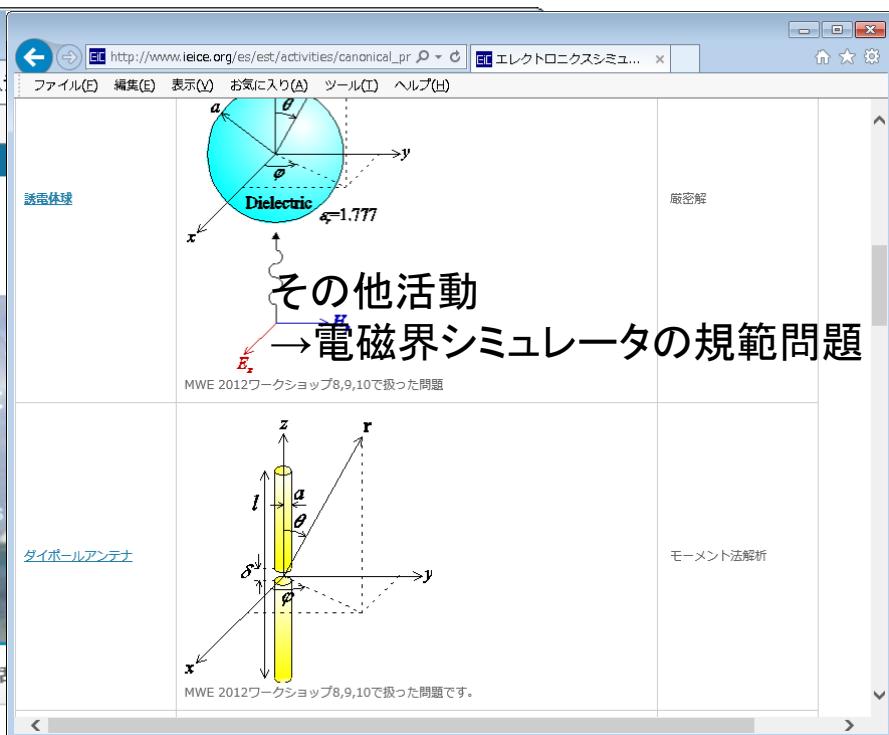
励振モデルに対する 規範問題

エレクトロニクスシミュレーション研究会の規範問題^{No.29}

電子情報通信学会エレクトロニクスシミュレーション研究専門委員会



The screenshot shows the homepage of the EST (Electronics Simulation Technology) website. The browser address bar displays <http://www.ieice.org/es/est/>. The page features the EST logo and the text "電子情報通信学会エレクトロニクスソサイエティ エレクトロニクスシミュレーション研究会". Below this, a blue banner reads "マイクロ波シミュレータ(電磁界解析)、熱解析、流体解およびエレクトロニクス全般のシミュレーション技術を研". Further down, it says "Microwave Simulators (EM Analysis), Thermal Analysis, Fluid Analysis and All Simulation Technologies in Electronics Field". At the bottom, there are navigation links: "トップページ", "EST研について", "研究会", "ワークショップ", "講習会", and "その他".



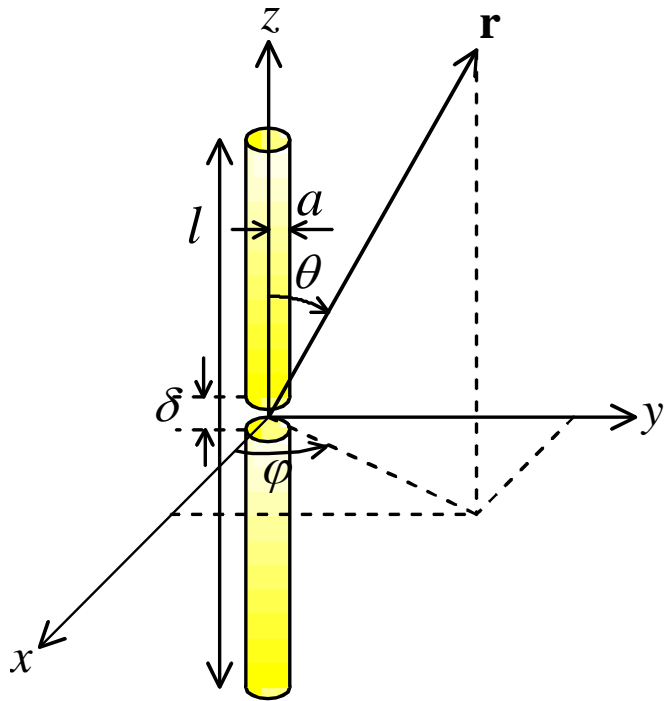
The screenshot shows a webpage with two diagrams and text. The top diagram, titled "誘電体球" (Dielectric Sphere), shows a sphere of radius a with a dielectric constant $\epsilon_r = 1.777$. It includes a coordinate system with x , y , and z axes, and a vector \mathbf{r} from the center. The text below it says "その他活動" and "電磁界シミュレータの規範問題", with a reference to "MWE 2012ワークショップ8,9,10で扱った問題". The bottom diagram, titled "ダイポールアンテナ" (Dipole Antenna), shows a vertical dipole antenna of length $2a$ with a current I flowing upwards. It includes a coordinate system with x , y , and z axes, and a vector \mathbf{r} from the center. The text below it says "MWE 2012ワークショップ8,9,10で扱った問題です".

NEWS新着情報

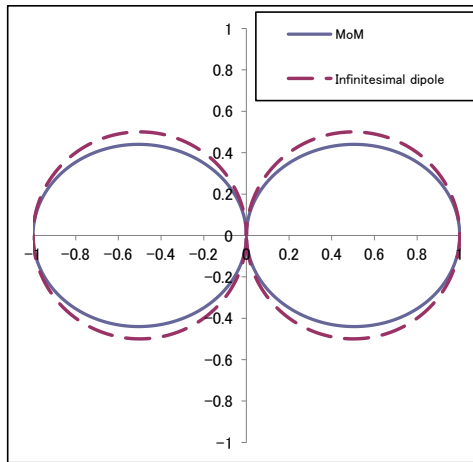
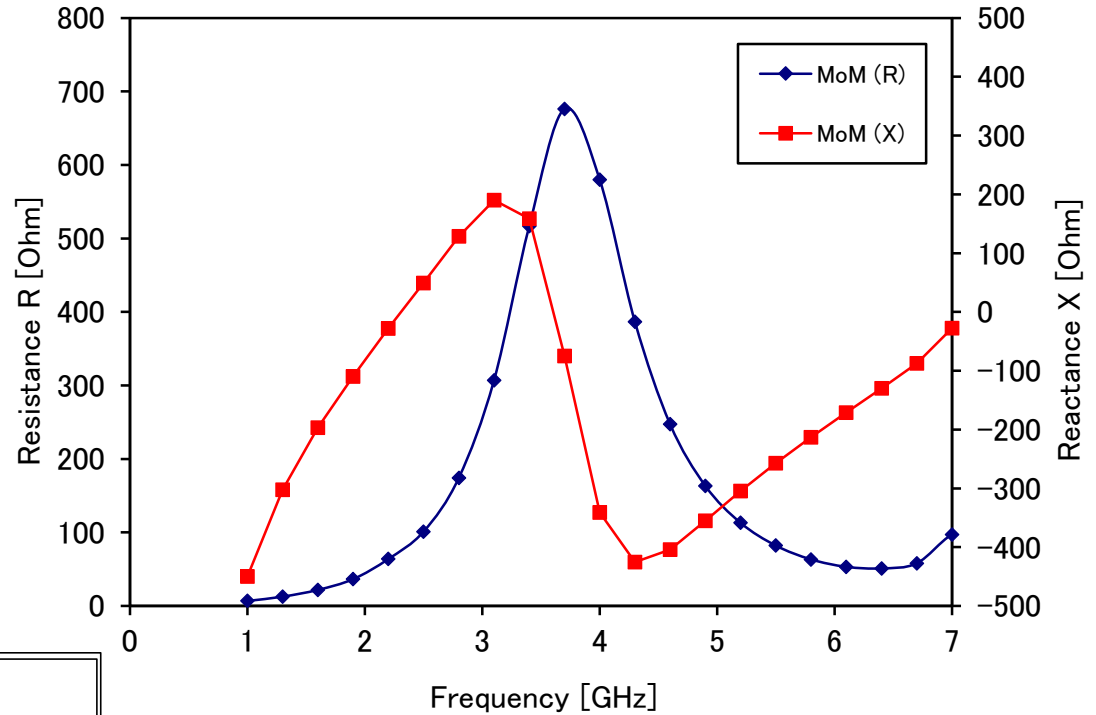
- 2015年6月17日 [英文論文誌\(C\)特集号「エレクトロニクス分野におけるシミュレーション技術とその応用の進展」\(2016年7月発行予定\)投稿のご案内\(投稿締切: 2015年9月16日\)](#) **NEW**
- 2015年6月15日 [2015年ソサイエティ大会のご案内・ESTセッション案内\(申込〆切: 2015年7月1日\(水\)\)](#) **NEW**
- 2015年6月15日 [和文論文誌\(C\)特集号「エレクトロニクス分野におけるシミュレーション技術の進展」\(2016年5月発行予定\)投稿のご案内\(投稿締切: 2015年8月10日\)](#) **NEW**
- 2015年5月26日 2015年度 [研究専門委員及び委員会内組織](#)の名簿を公開しました。 **NEW**
- 2015年5月22日 現在 2015年9月研究会(石垣島)の発表申込受付中です。お申込みは[こちら](#)からお願いいたします(締切7月14日)。 **NEW**



集中ポートの例: ダイポールアンテナ



Input Impedance of Dipole Antenna ($h=30\text{mm}$, $a=0.5\text{mm}$, $d=0.5\text{mm}$)



dipole.mph - COMSOL Multiphysics (トライアルバージョン)

ファイル ホーム 定義 ジオメトリ 材料 フィジックス メッシュ スタディ 結果

モデルビルダ

- dipole.mph (root)
 - グローバル定義
 - パラメーター
 - 材料
 - Dipole (comp1)
 - 定義
 - 境界系 1 (sys1)
 - PML 1 (pml1)
 - ビュー 1
 - ジオメトリ 1
 - 球 1 (sph1)
 - 円筒 1 (cyl1)
 - 円筒 2 (cyl2)
 - ブロック 1 (blk1)
 - 一体化モデルで完成 (fin)
 - 材料
 - 電磁波 (周波数領域) (emw)
 - 波動方程式 (電場) 1
 - 電気壁 (PEC) 1
 - 初期値 1
 - インピーダンス境界条件 1
 - 遠方場ドメイン 1
 - 集中ポート 1
 - メッシュ 1
 - スタディ 1
 - 結果
 - データセット
 - ビュー
 - 計算値
 - テーブル
 - 電場 (emw)
 - 2D 遠方場 (emw)
 - 遠方場 1

設定 特性

集中ポート

ラベル: 集中ポート 1

境界選択

選択: マニュアル

22

アクティブ

優先関係および寄与

方程式

集中ポート特性

集中ポート名: 1

集中ポートタイプ: ユーザー定義

集中ポート高さ: h_{port} d m

集中ポート幅: w_{port} a m

集中ポートターミナル間の方向:

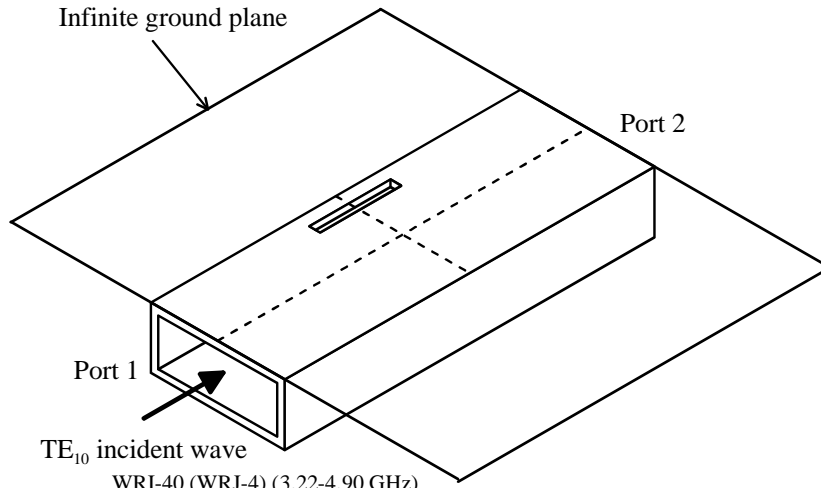
0	x	
0	y	1
1	z	

グラフィックス

メッセージ 進捗 ログ Evaluation 3D

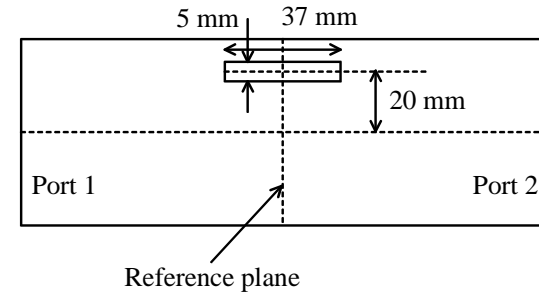
COMSOL Multiphysics 5.2.1.229
ライセンスは11日で失効します
開かれたファイル: dipole.mph

895 MB | 1067 MB

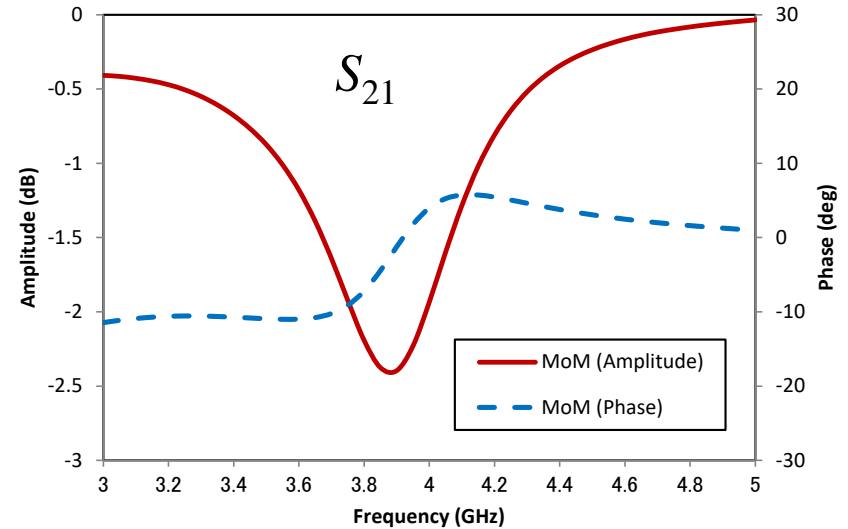
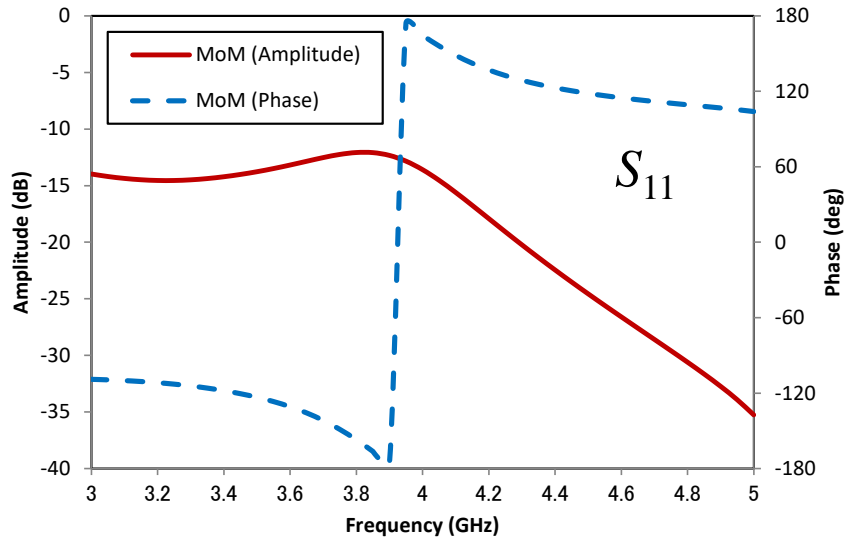


WRI-40 (WRJ-4) (3.22-4.90 GHz)
 58.1 mm x 29.1 mm
 Thickness: 1.6 mm
 Material: Copper (PEC in MoM)

(a) Bird's eye view



(b) Top view

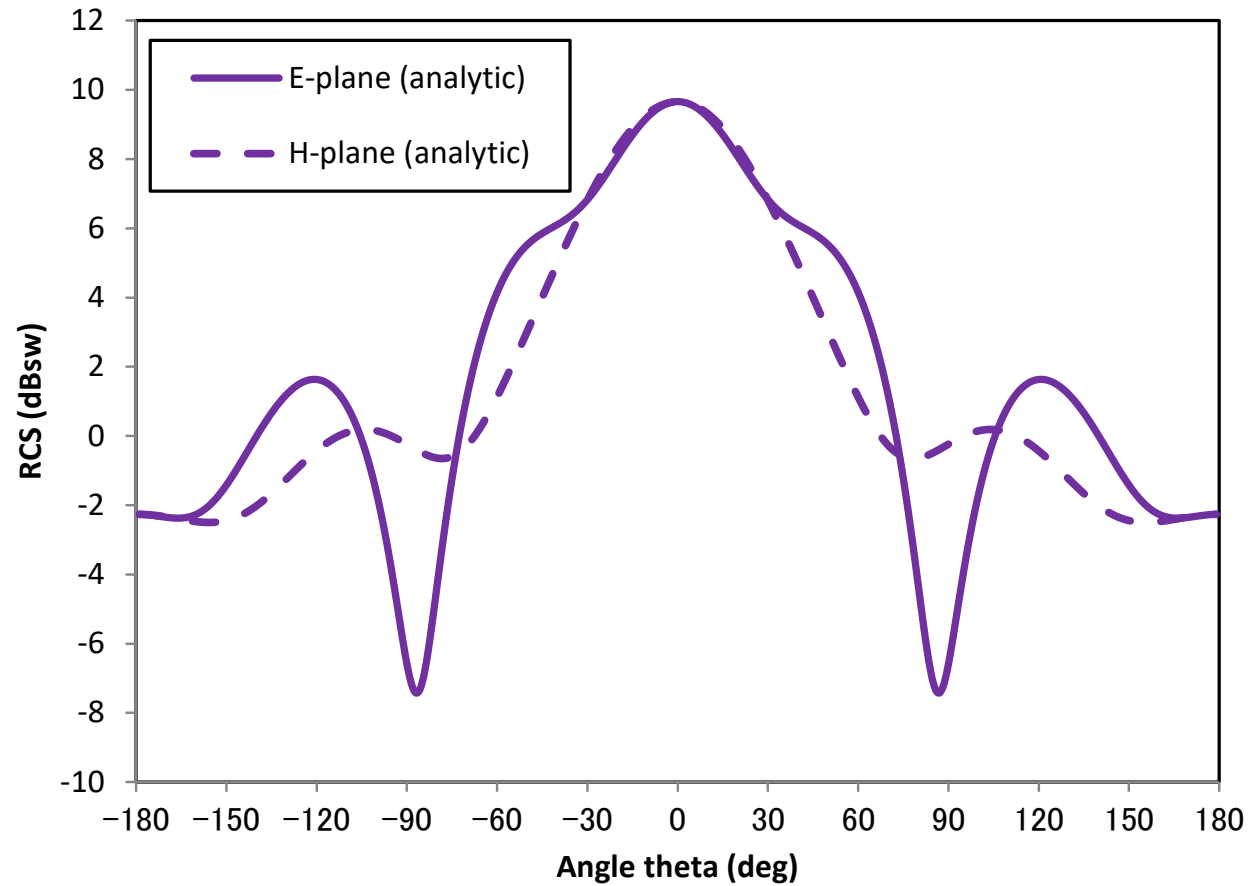
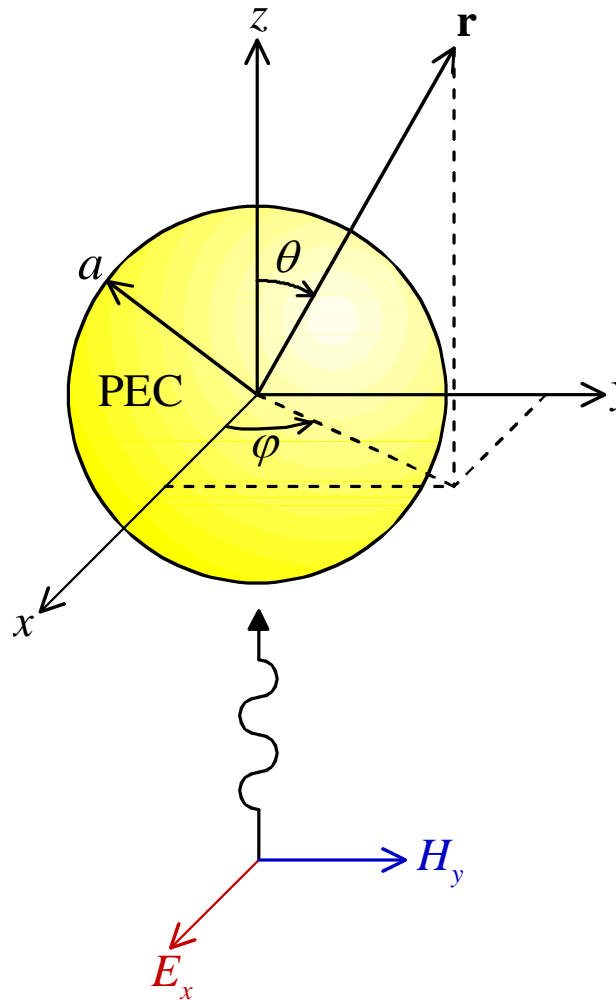


The screenshot displays the COMSOL Multiphysics software interface for a file named "wg_slot_antenna.mph". The interface is divided into several main sections:

- モデルビルダ (Model Builder):** Located on the left, it shows a hierarchical tree of the model's components. The selected component is "ポート 1" (Port 1) under the "電磁波 (周波数領域) (emw)" (Electromagnetic (Frequency Domain)) physics interface.
- 設定 (Settings):** The central panel shows the configuration for the selected port. The "境界選択" (Boundary Selection) section is active, with "マニユアル" (Manual) selected. A list of boundaries is shown, with boundary 7 highlighted. The "ポート特性" (Port Properties) section is expanded, showing:
 - ポート名 (Port Name): 1
 - ポートタイプ (Port Type): 矩形 (Rectangular)
 - 波動励起 (Wave Excitation): オン (On)
 - 印加パワー指定 (Specify Applied Power):
 - ポート入力パワー (Port Input Power): P_{in} [W], with a value of 1 W.
 - 内部ポート境界でスリット条件をアクティベート (Activate Slit Conditions at Internal Port Boundaries):
- グラフィックス (Graphics):** The right-hand side shows a 3D wireframe view of the slot antenna structure. The port is highlighted in blue. The coordinate system (x, y, z) is visible at the bottom left of the graphics area.
- メッセージ (Messages):** A message window at the bottom right displays the following text:

```
COMSOL Multiphysics 5.2.1.229  
ライセンスは11日で失効します  
開かれたファイル: wg_slot_antenna.mph
```

At the bottom of the window, the memory usage is indicated as "870 MB | 1085 MB".



The screenshot displays the COMSOL Multiphysics interface for a simulation titled "sphere.mph". The left sidebar shows the model tree with the following structure:

- sphere.mph (root)
 - グローバル定義
 - パラメーター
 - 材料
 - コンポーネント 1 (comp1)
 - 定義
 - Sphere
 - 球 1 (sph1)
 - 一体化モデルで完成 (fin)
 - 材料
 - 電磁波 (周波数領域) (emw)
 - 波動方程式 (電場) 1
 - 電気壁 (PEC) 1
 - 初期値 1
 - 散乱境界条件 1
 - 遠方場ドメイン 1
 - メッシュ 1
 - スタディ 1
 - ステップ 1: 周波数領域
 - ソルバーコンフィギュレーション
 - 結果

The central panel shows the "設定" (Settings) for the "電磁波 (周波数領域)" (Electromagnetic (Frequency Domain)) component. Key settings include:

- ラベル: 電磁波 (周波数領域)
- 名前: emw
- ドメイン選択: 全ドメイン
- アクティブ: 1 (pml), 2 (pml), 3 (pml), 4 (pml), 5, 6
- 方程式: 散乱場
- 計算対象: 散乱場
- 背景波動タイプ: ユーザー定義
- 背景電場:

$\exp(-j * emw.k0 * z)$	x	V/m
0	y	
0	z	
- ポートスイープ設定:
 - ポートスイープをアクティベート

The right panel shows a 3D visualization of a sphere within a coordinate system (x, y, z). The sphere is centered at the origin and is surrounded by a grid representing the far-field domain. The axes are labeled with values 1, 0, and -1.

Below the 3D model is a 2D plot titled "遠方場: バイスタティックレーダ断面積 (m²)" (Far Field: Bistatic Radar Cross Section (m²)). The plot shows the bistatic radar cross-section as a function of the angle (φ角度 (deg)). The x-axis ranges from -150 to 150 degrees, and the y-axis ranges from 0.2 to 10 m². Two curves are shown: a blue curve and a green curve, both exhibiting a main peak at 0 degrees and smaller side lobes.

At the bottom of the interface, a message box indicates: "COMSOL Multiphysics 5.2.1.229 ライセンスは11日で失効します 開かれたファイル: sphere.mph". The status bar shows "920 MB | 1079 MB".

付録

有限要素法(FEM)

有限要素法 (FEM, Finite Element Method)

歴史

1955-1956 航空

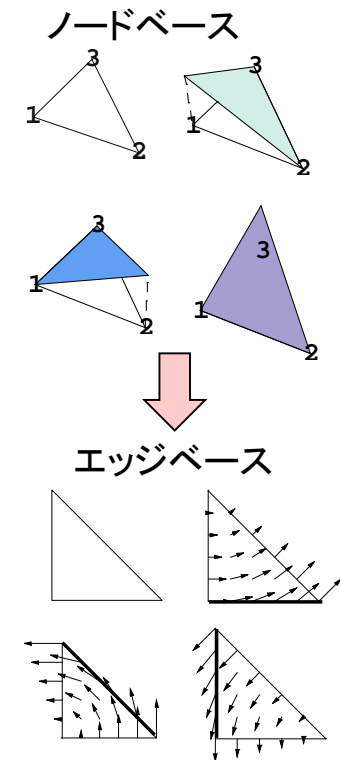
- M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and J. L. Topp, “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 23, pp. 805-824, 1956.
- J.H. Argyris, “Energy theorems and structural analysis. Part I general theory,” *Aircraft Engineering*, vol.26, pp.347-356, 1954.

1960 土木・建築

- R.W. Clough, “The finite element method in plane stress analysis,” *2nd American Society of Civil Engineering (ASCE) Conf. on Electronic Computation*, 1960.

1980 電気

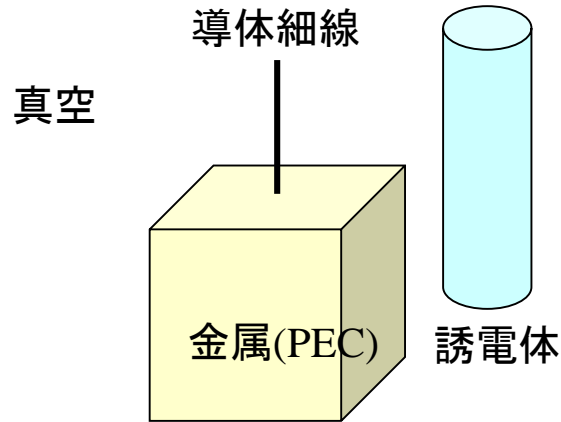
- Z.J. Csendes et al., “Numerical Solution of Dielectric Loaded Waveguides: I-Finite-Element Analysis,” *IEEE Trans. MTT*, vol.18, no.12, pp.1124,1131, Dec. 1970.
- M. V. K. Chari and P. P. Silvester, “Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems”, John Wiley & Sons, 1980.



電磁波問題への応用はスプリース(非物理)解の問題(1970)があり、なかなか進まなかった。原因が解明されていき(1984)、ペナルティー法を用いて解決(1984)されたが、エッジ要素(ベクトル基底関数) (1957)の採用により、スプリース解の問題が自動的に解決(~1980-85)して発展した。

有限要素法の解析手順

(1) 解析モデルを決める



(2) 波動方程式から重み付き残差法で弱形式を導出(昔は変分法)

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) = 0$$

Eの波動方程式

重み

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left(\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) dv = 0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形(次のスライド参照)

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{W} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{W} \cdot \left(jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) \right] dv$$

$$- \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\hat{n} \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dS = 0 \quad (\text{弱形式})$$

この弱形式はEに対する線形方程式なので、MoMと同様に行列方程式を得ればよい。ただし、体積積分があるので基底関数は空間に分布する3-D版を用いる。

ベクトル公式を使った式変形

重み

Eの波動方程式

前のスライドの第1項の式変形

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left(\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) dv = 0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形

第1項の計算

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left\{ \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \times \mathbf{W} \right\} \right] dv$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) dv + \oint_{\partial\Omega} \left\{ \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \times \mathbf{W} \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) dv - \oint_{\partial\Omega} \left\{ (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{W}) \cdot \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

公式: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \rightarrow \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{W}$$

公式: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

$$\mathbf{A} \rightarrow \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{B} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E}, \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{W}$$



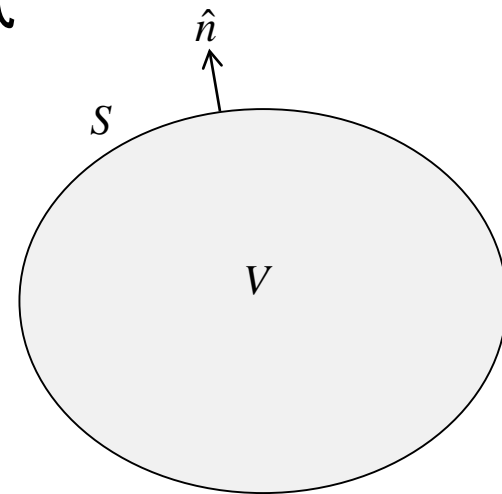
定式化 (1)

マクスウェルの方程式から磁界 \mathbf{H} を消去した波動方程式

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = - \underbrace{\left[jk_0 Z_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \mathbf{M} \right) \right]}_{=\mathbf{f}}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + \mathbf{f} = 0$$

=R



重み付き残差法 ベクトル公式を駆使して変形されている

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}, \mathbf{W} \rangle &= \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} \right] dv + \iiint_V \mathbf{W} \cdot \mathbf{f} dv \\ &+ jk_0 Z_0 \underbrace{\iint_{S_K} \frac{1}{K} (\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{W}) dS}_{\text{表面インピーダンス}} + \underbrace{\iint_{S_{PEC}} [\mathbf{W} \cdot (\hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}))]}_{\text{完全導体}} dS \end{aligned}$$

→ そして、メッシュ分割してエッジ基底関数で電界 \mathbf{E} を展開し、重み関数 \mathbf{W} としては全展開関数 \mathbf{E}_i で重み付けして連立一次方程式の問題に帰着させ、行列方程式を解く。



定式化 (2)

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j$$

磁界を知りたいとき $\mathbf{H} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{j\omega\mu}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}, \mathbf{E}_i \rangle = & \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_i) - k_0^2 \varepsilon_r \left(\sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot \mathbf{E}_i \right] dv + \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv \\ & + jk_0 Z_0 \iint_{S_K} \frac{1}{K} \left(\hat{n} \times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_i) dS + \iint_{S_{PEC}} \left[\mathbf{E}_i \cdot \left(\hat{n} \times \left(\nabla \times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \right) \right] dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}, \mathbf{E}_i \rangle = & \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \left[\iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}_j) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_i) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_i \right] dv \right. \\ & + jk_0 Z_0 \iint_{S_K} \frac{1}{K} (\hat{n} \times \mathbf{E}_j) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_i) dS + \iint_{S_{PEC}} \left[\mathbf{E}_i \cdot (\hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_j)) \right] dS \left. \right] \\ & + \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv \end{aligned} \quad (i=1, \dots, N_{basis})$$

上の体積積分、面積分は各要素j内での積分のみ値を持つ。なぜならば、基底関数同士の積になっており、それらは要素内でしかオーバーラップしないからである。結局 $V \rightarrow V_i$ とすることができる。

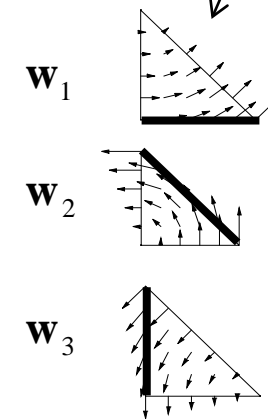
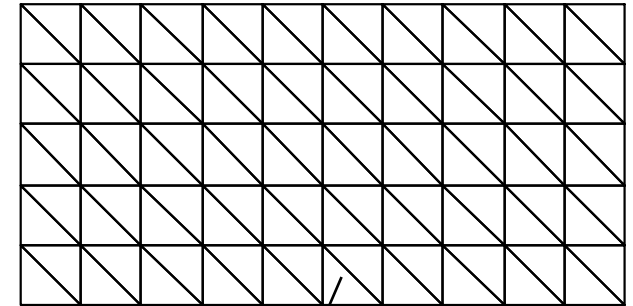


定式化 (3)

$$\sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j [A_{ij} - B_{ij} + C_{ij} + D_{ij}] = -F_i \quad (i=1, \dots, N_{basis})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij} = \iiint_V \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}_j) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_i) dv \\ B_{ij} = \iiint_V k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_i dv \\ C_{ij} = jk_0 Z_0 \oiint_{S_K} \frac{1}{K} (\hat{n} \times \mathbf{E}_j) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_i) dS \\ D_{ij} = \oiint_{S_{PEC}} [\mathbf{E}_i \cdot (\hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}_j))] dS \\ F_i = \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{i,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},j} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_i \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}} \end{bmatrix}$$

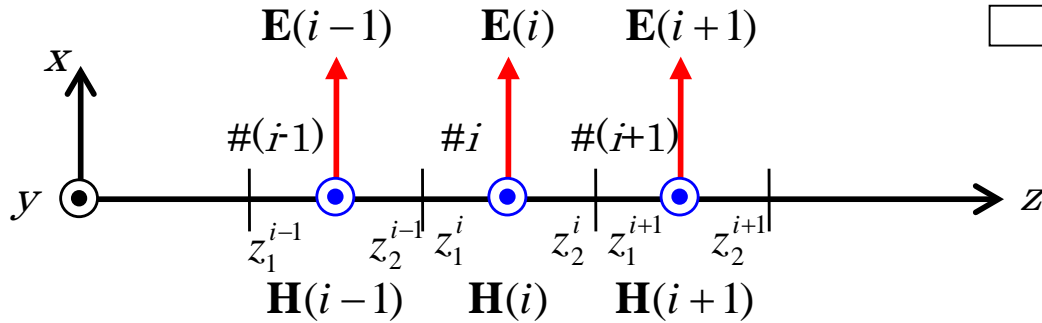


これらの積分は結構簡単に評価することができる。なぜならば、モーメント法の場合の用に特異点はなく、かつ、基底関数は多項式で表現されているので簡単な積分公式に帰着できる。

行列は非常に疎なので、専用のソルバーを使うとメモリを節約し、高速に解くことができる。

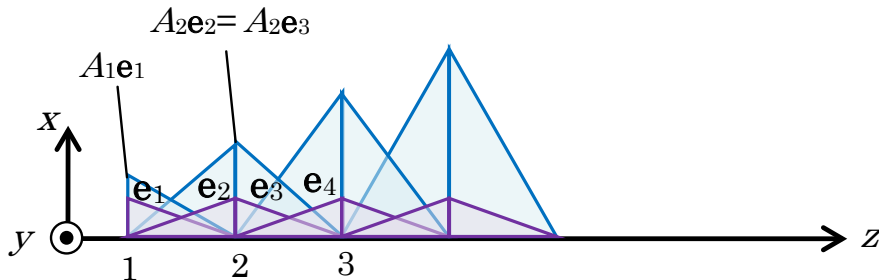
1-Dの例: FEM (基底関数)

周波数領域



基底関数...この既知の関数と重みで任意の分布を表現

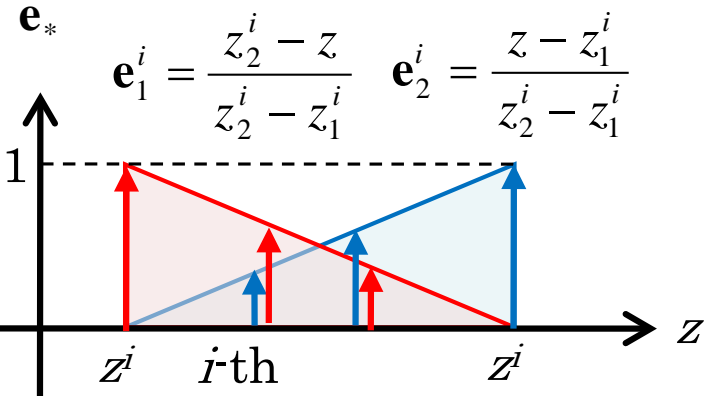
$$A_2^i = A_1^{i+1} = C^{i+1}$$



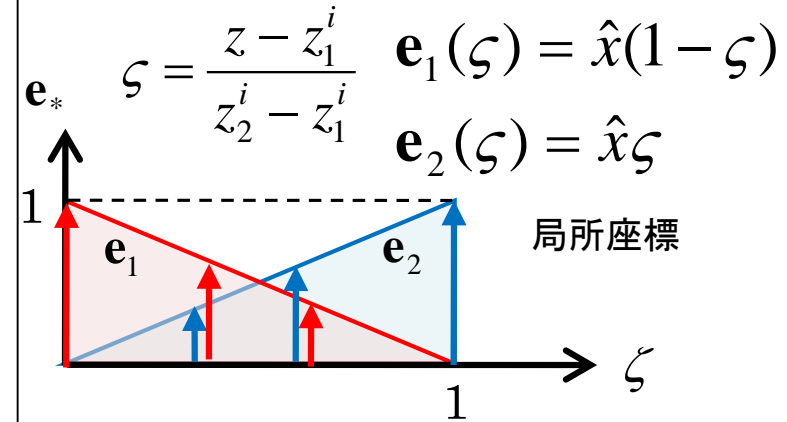
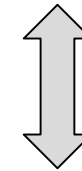
全空間の電界は基底関数とその重みで表現

$$E_x = \sum_{i=1}^{N_e} (A_1^i e_{1x}^i(z) + A_2^i e_{2x}^i(z))$$

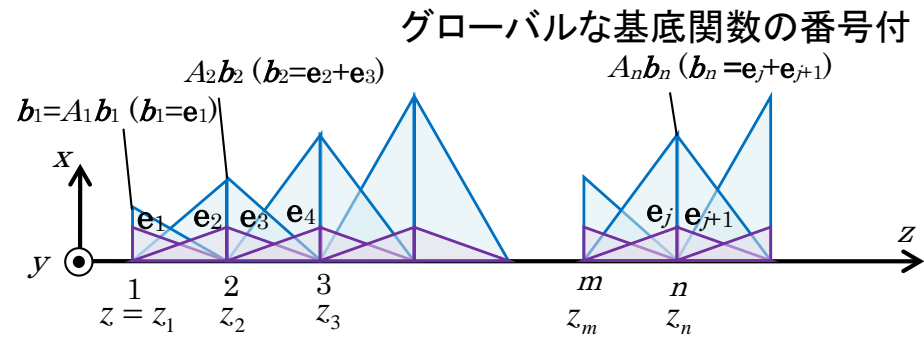
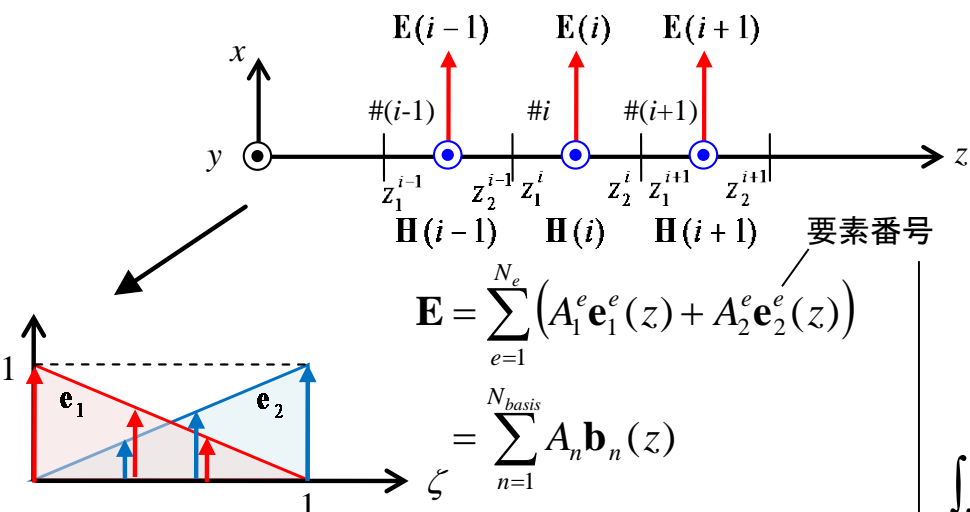
基底関数で展開



$$z = z_1^i + (z_2^i - z_1^i)\zeta$$



1-Dの例: FEM (波動方程式, 重み付け残差法、弱形式)



マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \end{cases}$$

Hを消去

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) = 0$$

Eの波動方程式

重み

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left(\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) dv = 0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{W} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{W} \cdot \left(jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right) \right] dv$$

$$- \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\hat{n} \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dS = 0 \quad \text{(弱形式)}$$

今の1次元の問題の場合

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial W_x}{\partial z} \frac{\partial E_x}{\partial z} - k_0^2 \varepsilon_r W_x E_x + W_x \left(jk_0 \eta_0 J_x - \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right] dz - \left[\frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z} \right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}} = 0$$

1-Dの例: FEM (離散化, 行列方程式)

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial W_x}{\partial z} \frac{\partial E_x}{\partial z} - k_0^2 \epsilon_r W_x E_x \right] dz + W_x \left(jk_0 \eta_0 J_x + \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) dz - \left[\frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z} \right]_{z=z_1}^{z=z_{N_e+1}} = 0$$

=[boundary]

$$E_x = \sum_{n=1}^{N_{basis}} A_n b_n(z)$$

$$W_x = b_m(z) \quad (m = 1, \dots, N_{basis})$$

W_x は何でも良いのだが、このように選ぶ。

ガラーキン法



$$\sum_{n=1}^{N_{basis}} \left(\frac{1}{\mu_r} \int_z \frac{\partial b_m}{\partial z} \frac{\partial b_n}{\partial z} dz - k_0^2 \epsilon_r \int_z b_m b_n dz \right) A_n + [\text{boundary}] = -F_m$$

= K_{mn}

$$= - \int_z b_m \left(jk_0 \eta_0 \frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) dz$$

= F_m

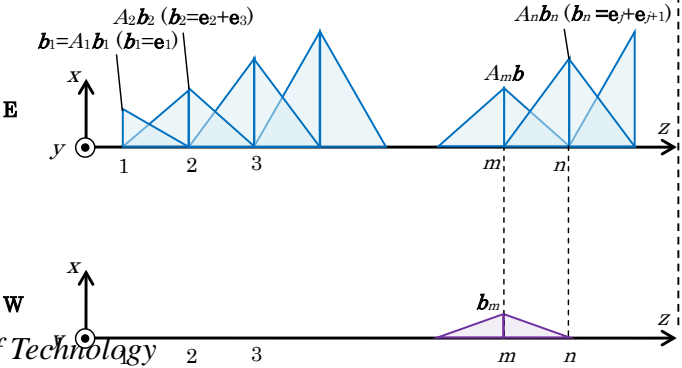
$$\sum_{n=1}^{N_{basis}} K_{mn} A_n + [\text{boundary}] = -F_n$$

[boundary]は無視して行列方程式を作ると

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} & \dots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & \dots & K_{mn} & \dots & K_{m,N_{basis}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \dots & K_{N_{basis},n} & \dots & K_{N_{basis},N_{basis}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}} \end{bmatrix}$$

ここで、

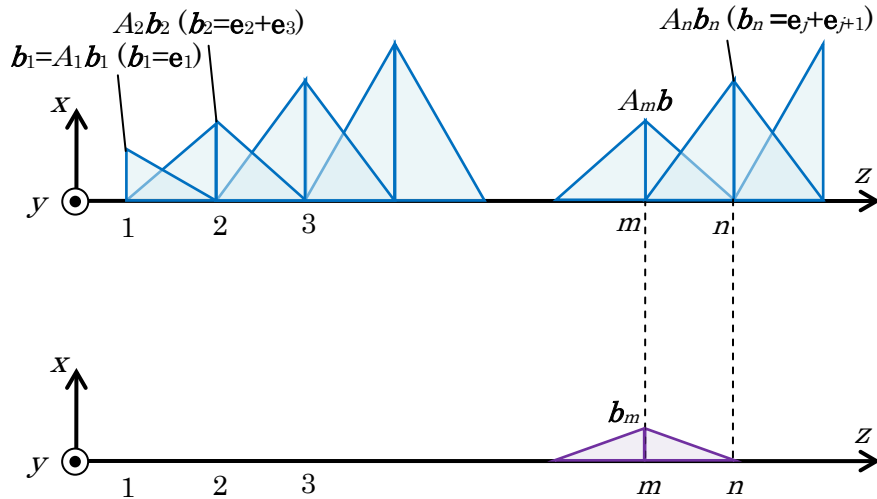
$$\begin{cases} K_{mn} = \frac{1}{\mu_r} \int_z \frac{\partial b_m}{\partial z} \frac{\partial b_n}{\partial z} dz - k_0^2 \epsilon_r \int_z b_m b_n dz \\ F_m = \int_z b_m \left(jk_0 \eta_0 \frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) dz \end{cases}$$



1-Dの例: FEM (行列要素の計算)

$$\text{ここで、} K_{mn} = \frac{1}{\mu_r} \int_z \frac{\partial b_m}{\partial z} \frac{\partial b_n}{\partial z} dz - k_0^2 \varepsilon_r \int_z b_m b_n dz$$

の計算は次の図を見てわかるように、 i, j とも同一、あるいは隣接する要素の基底関数のときしか値を持たない。
→行列は疎になる。



よって、要素ごとに基底関数同士の積分を評価して、行列に埋め込んでいくと効率的である。全体の行列方程式における基底関数としては、要素内の基底関数を用いて、上図のように各エッジで重みが定義された基底関数を用いる。このために(要素番号, 基底関数番号1or2)からグローバルの基底関数番号に対応させる変換表を準備しておく。

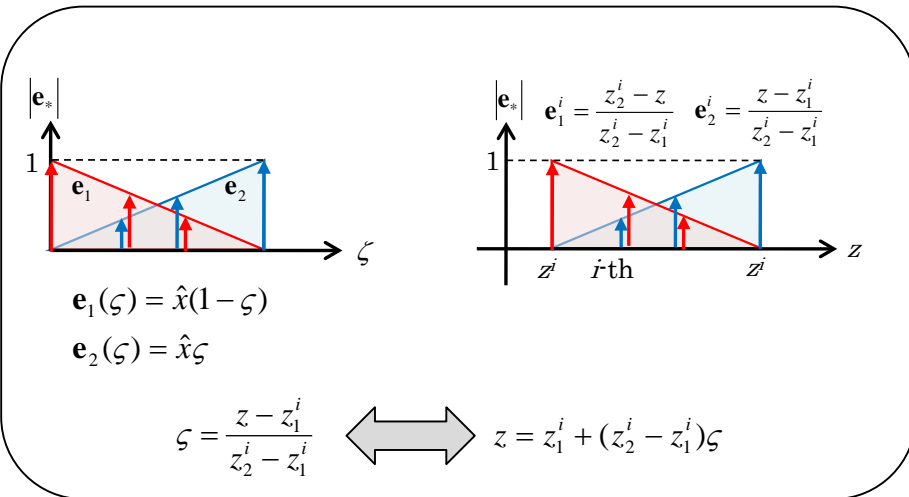
$$\text{また、} K_{mn} = \frac{1}{\mu_r} \int_z \frac{\partial b_m}{\partial z} \frac{\partial b_n}{\partial z} dz - k_0^2 \varepsilon_r \int_z b_m b_n dz$$

の計算は

$$b_m(z) = e_2^{e-1}(z) + e_1^e(z)$$

なので、次の計算に帰着される。

$$\begin{cases} E_{ij} = \int_{z_1^e}^{z_2^e} e_i^e(z) e_j^e(z) dz = \begin{cases} (z_2^e - z_1^e)/3 & (i = j) \\ (z_2^e - z_1^e)/6 & (i \neq j) \end{cases} \\ F_{ij} = \int_{z_1^e}^{z_2^e} \frac{\partial e_i^e(z)}{\partial z} \frac{\partial e_j^e(z)}{\partial z} dz = \begin{cases} 1/(z_2^e - z_1^e) & (i = j) \\ 1/(z_1^e - z_2^e) & (i \neq j) \end{cases} \end{cases}$$



1-Dの例: FEM (波源: 電流源)

$$m = M_J \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{m1} & \cdots & K_{mm} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}} \end{bmatrix}$$

$-jk_0\eta_0 J_0 / 2$

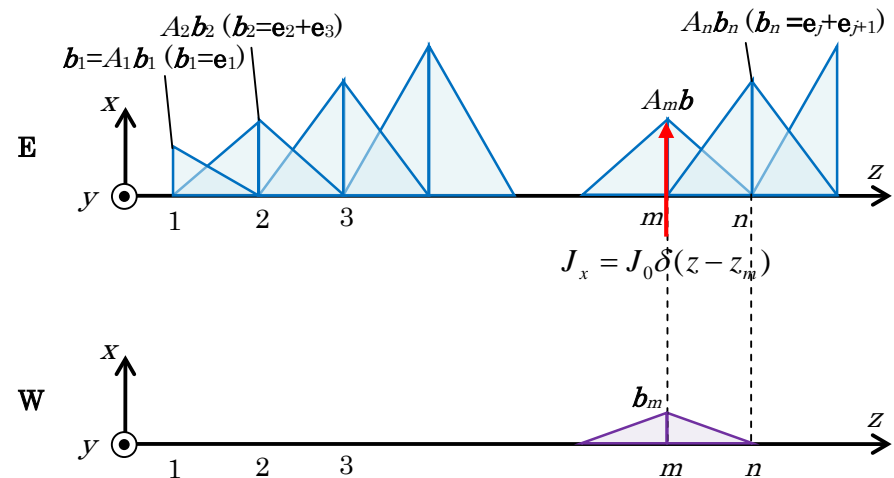
$$F_m = \int_z b_m \left(jk_0\eta_0 \frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) dz$$

$m=M_J$ の基底関数の中央に線電流

$$J_x = J_0 \delta(z - z_m) \quad M_y = 0$$

で励振されているとすると

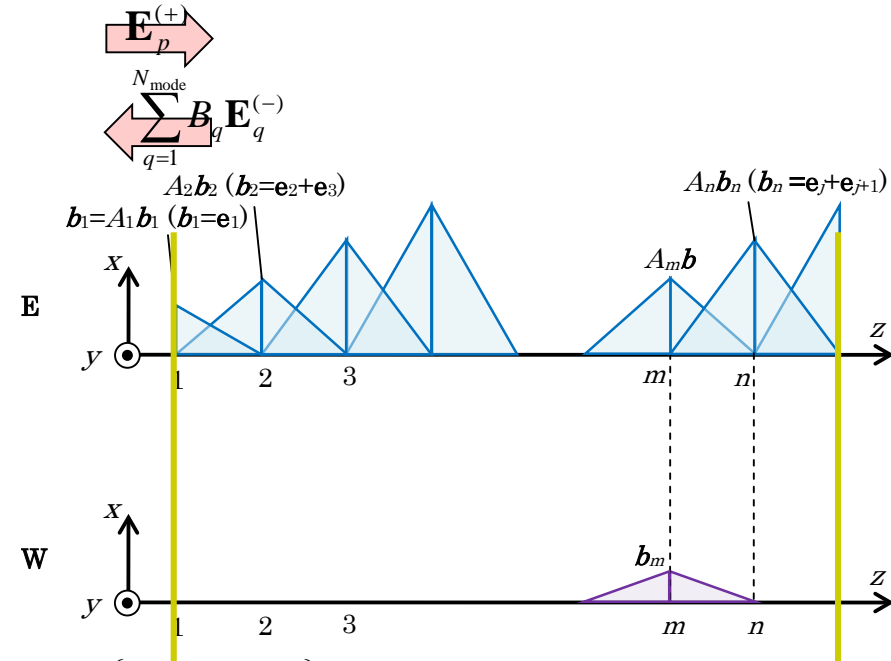
$$F_{M_J} = jk_0\eta_0 J_0 / 2$$



1-Dの例: FEM (波源: 導波管モード)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p^{(+)} + \sum_{q=1}^{N_{\text{mode}}} B_q \mathbf{E}_q^{(-)}$$

$$= \mathbf{e}_p \exp(-\gamma_p z) + \sum_{q=1}^{N_{\text{mode}}} B_q \mathbf{e}_q \exp(+\gamma_q z)$$



$$\left\{ \begin{aligned} \iint_S \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_j \cdot d\mathbf{S} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \iint_S \mathbf{E}_i \times \frac{\nabla \times \mathbf{E}_j}{\mu_r} \cdot d\mathbf{S} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & (\text{伝搬モード}) \\ j = \sqrt{-1} & (\text{減衰モード}) \end{cases} \\ -\frac{1}{\mu_r} \iint_S \mathbf{E}_i \times \nabla \times \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S} &= \delta_{ij} j\omega\mu_0 \begin{cases} 1 & (\text{伝搬モード}) \\ j = \sqrt{-1} & (\text{減衰モード}) \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{W} \cdot \mathbf{E} \right] dv - \iint_{\partial\Omega_{WP}} \left\{ \mathbf{W} \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\partial\Omega_{WP}} \left\{ \mathbf{W} \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= - \iint_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left[jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right] dv$$

=[current source]

普通に体積内部を基底関数の和で表現

境界のポート上の電界を電界モードの和で表現

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}^{(\text{inside})} &= \sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})} \\ \mathbf{E}^{(\text{port})} &= \sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j \mathbf{e}_j^{(\text{port})} \end{aligned} \right. \begin{matrix} \text{体積内部} \\ \text{ポート} \end{matrix}$$

$$\left[\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{e}_i^{(\text{inside})}) \cdot \left(\nabla \times \sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})} \right) dv \\ &- \iint_{\Omega} k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{e}_i^{(\text{inside})} \cdot \sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})} dv \\ &- \iint_{\partial\Omega} \left\{ \mathbf{e}_i^{(\text{port})} \times \left(\frac{\nabla \times \sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} \\ &- \iint_{\partial\Omega} \left\{ \mathbf{e}_i^{(\text{port})} \times \left(\frac{\nabla \times \sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j \mathbf{e}_j^{(\text{port})}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \right] \begin{bmatrix} \{A_i\} \\ \{B_i\} \end{bmatrix} = [\text{current source}] + [\text{modal ex.}]$$

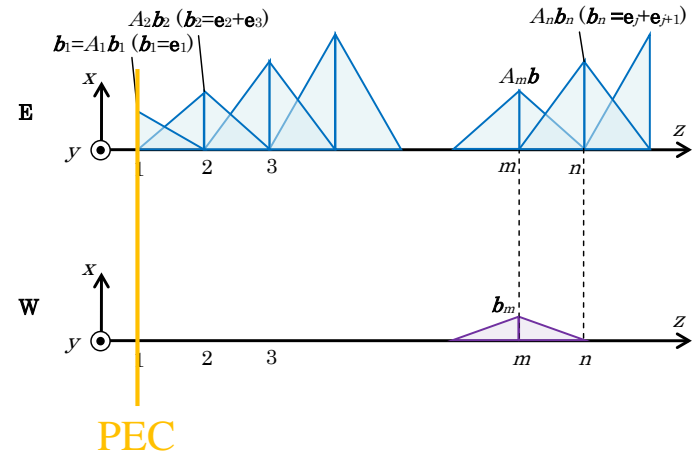


1-Dの例: FEM (境界条件: PEC)

左の壁が電気壁(PEC)の場合

$$E_x = 0 \quad \text{なので、} \quad A_1 = 0$$

とする。これは元々既知であったと考えるので
行列方程式に $A_1 = 0$
を代入し、未知数からも消去する。



$$\begin{bmatrix}
 \cancel{K_{11}} & \dots & \cancel{K_{1n}} & \dots & \cancel{K_{1,N_{basis}}} \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 K_{m1} & \dots & K_{mn} & \dots & K_{m,N_{basis}} \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 K_{N_{basis},1} & \dots & K_{N_{basis},n} & \dots & K_{N_{basis},N_{basis}}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \cancel{A_1} \\
 \vdots \\
 A_m \\
 \vdots \\
 A_{N_{basis}}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \cancel{F_1} \\
 \vdots \\
 -F_m \\
 \vdots \\
 -F_{N_{basis}}
 \end{bmatrix}$$



1-Dの例: FEM (境界条件: 表面インピーダンス Z_s)^{No. 51}

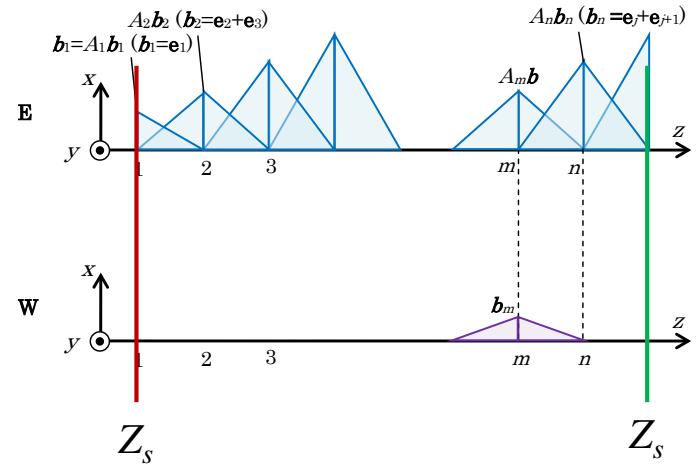
$$\partial E_x / \partial z + \alpha E_x = \beta$$

表面インピーダンス

$$\begin{aligned}
 [\text{boundary}] &= - \left[\frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z} \right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}} = - \left[\frac{1}{\mu_r} W_x(z_{N_e+1}) \frac{\partial E_x(z_{N_e+1})}{\partial z} - \frac{1}{\mu_r} W_x(z_1) \frac{\partial E_x(z_1)}{\partial z} \right] \\
 &= - \frac{1}{\mu_r(N_e)} \left(\beta_{N_e} - \alpha_{N_e} A_{N_{\text{basis}}} e_{2x}^{N_e}(z_{N_e+1}) \right) + \frac{1}{\mu_r(1)} \left(\beta_1 - \alpha_1 A_1 e_{1x}^1(z_1) \right) \\
 &= - \frac{1}{\mu_r(N_e)} \left(\beta_{N_e} - \alpha_{N_e} A_{N_{\text{basis}}} \right) + \frac{1}{\mu_r(1)} \left(\beta_1 - \alpha_1 A_1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{\text{basis}}} \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{\text{basis}}} \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 K_{N_{\text{basis}},1} & \cdots & K_{N_{\text{basis}},n} & \cdots & K_{N_{\text{basis}},N_{\text{basis}}}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 \vdots \\
 A_m \\
 \vdots \\
 A_{N_{\text{basis}}}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -F_1 \\
 \vdots \\
 -F_m \\
 \vdots \\
 -F_{N_{\text{basis}}}
 \end{bmatrix}$$

足す $-\frac{\alpha_1}{\mu_r(1)}$ (pointing to K_{11})
 足す $-\frac{\beta_1}{\mu_r(1)}$ (pointing to $-F_1$)
 足す $+\frac{\alpha_{N_e}}{\mu_r(N_e)}$ (pointing to $K_{N_{\text{basis}},N_{\text{basis}}}$)
 足す $+\frac{\beta_{N_e}}{\mu_r(N_e)}$ (pointing to $-F_{N_{\text{basis}}}$)



1-Dの例: FEM (境界条件: 吸収境界条件)

進行波の表現: $E_x = E_0 e^{\mp jkz}$

上側: +z方向, 下側 -z方向

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mp jk E_0 e^{\mp jkz} = \mp jk E_x$$

表面インピーダンス

$$\partial E_x / \partial z + \alpha E_x = \beta$$

$$\begin{array}{l} z = z_1 \\ \partial E_x / \partial z - jk E_x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} z = z_{N_e} \\ \partial E_x / \partial z + jk E_x = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -jk \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{N_e} = +jk \\ \beta_{N_e} = 0 \end{cases}$$

$$E_x(z_1) = E_0(z_1) e^{+jkz} \quad E_x(z_{N_e}) = E_0(z_{N_e}) e^{-jkz}$$

表面インピーダンスと考えればよい

