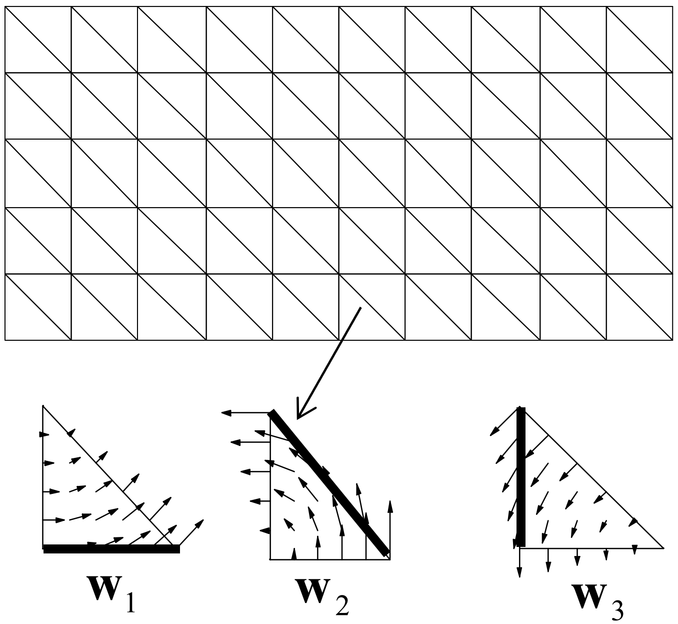
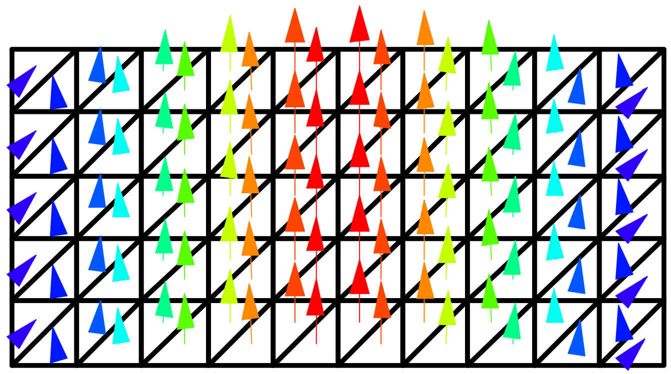
有限要素法による電磁界シミュレーション入門
～平面波入射･ビーム入射の励振モデル化～





東京工業大学 環境･社会理工学院
平野 拓一
E-mail: hirano.t.aa@m.titech.ac.jp

September 29, 2016

内容

有限要素法による電磁界シミュレーション入門

- 基礎(ベクトル基底関数)
  (2016/1/14)
- プログラム例(導波路モード解析)
  (2016/1/26)
- 平面波入射・ビーム入射の励振モデル化
  (2016/9/29)
- 給電部の励振モデル化(集中定数ポート、導波路モードのポート)
  (2016/11/24)

http://www.takuichi.net/em_analysis/fem/fem_j.html

基礎
～ マクスウェルの方程式 ～

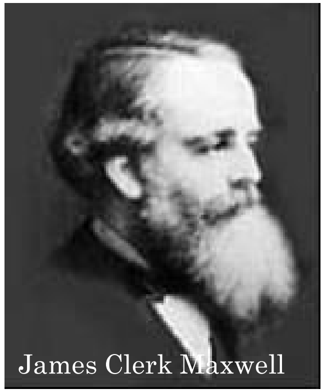
微分形

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \dfrac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$$

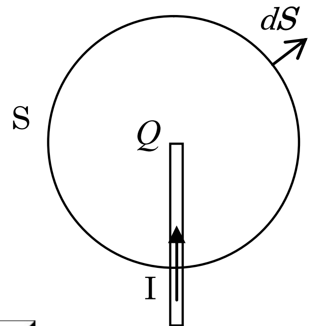
マクスウェルの方程式

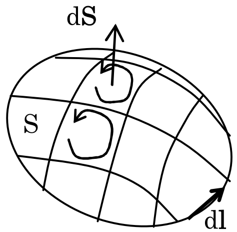


アンペアの法則は無限長電流から導いた不完全なものであった。これが有限長の電流でも成り立つように、電荷保存則（電流連続の式）を組み込んで完成させた。具体的には変位電流をアンペアの法則に組んで修正する。電流連続の式は修正されたアンペアの法則のdivを取ると導かれる。

電流連続の式:

$$I=-\frac{\partial Q}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{i}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$





構成（媒質）方程式

$$\begin{cases}\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\end{cases}$$

電束密度、誘電率、電界、磁束密度、透磁率、磁界

	微分形	積分形
ファラデーの法則	$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$
アンペアの法則	$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\iint_S\mathbf{i}\cdot d\mathbf{S}+\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}}$
	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ 変位電流	$\oiint_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_V\rho dV$ 変位電流
	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\oiint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$

この方程式でマクロな電磁気、電磁波現象の全てが記述可能
（媒質条件、励振条件、境界条件は与える）

解いてみると

① 波になる

$$\mathbf{i}\rightarrow\mathbf{H}\rightarrow\mathbf{E}\rightarrow\mathbf{H}\rightarrow\mathbf{E}\rightarrow\cdots$$

「電磁波」と名付けた

②速度は光速と一致

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=2.998\times10^{8}\ [m/\mathrm{sec}]$$

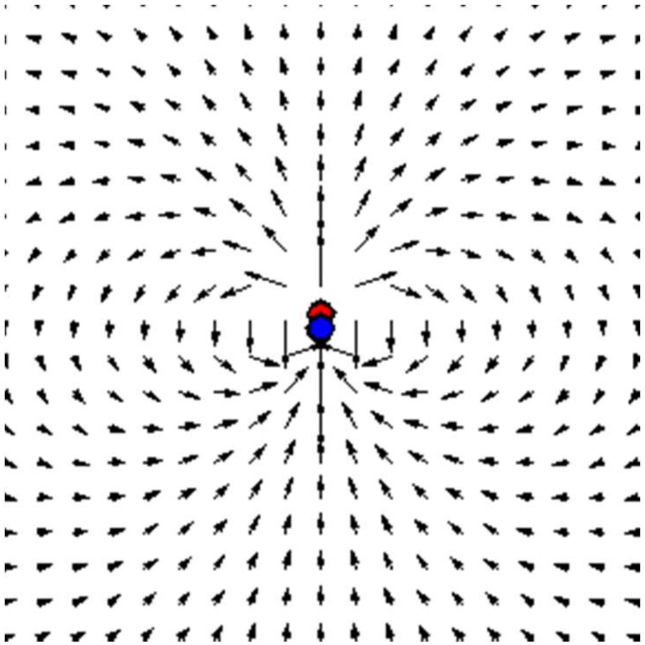
光は電磁波の一部と考えられる

James Clerk Maxwell, “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field,” Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.

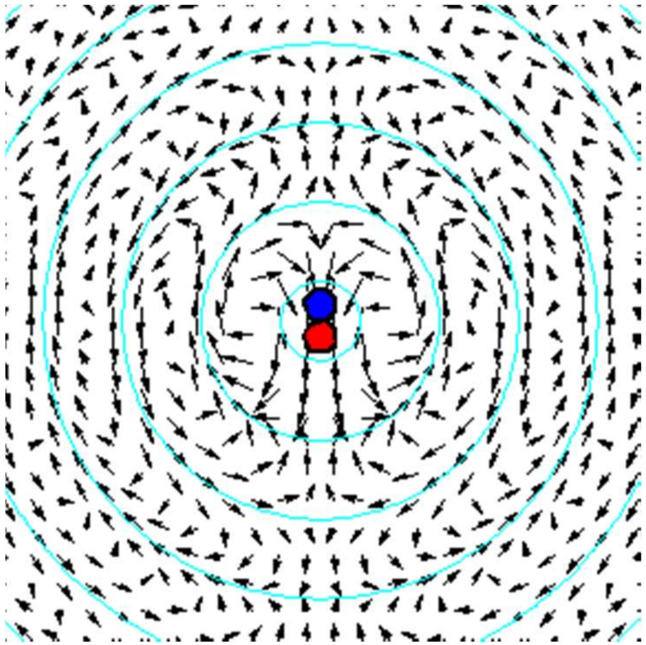
振動する電気双極子、電磁波の予言

変位電流なし	変位電流あり

電界



伝搬速度が無限大の場合



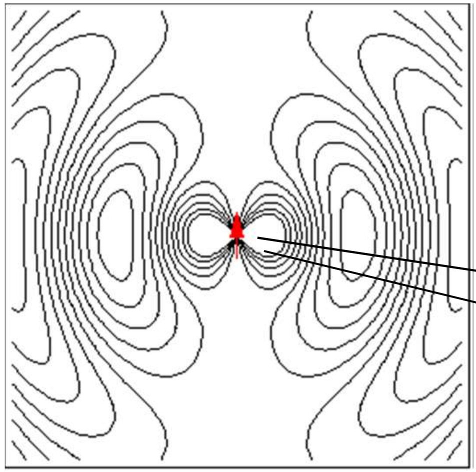
伝搬速度が有限の場合

このように飛んでいく電界(と磁界)が「電磁波」

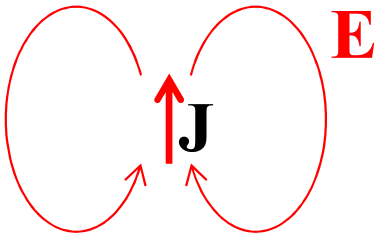
時間的に変化する電流(加速運動する電荷)は電磁波を放射する

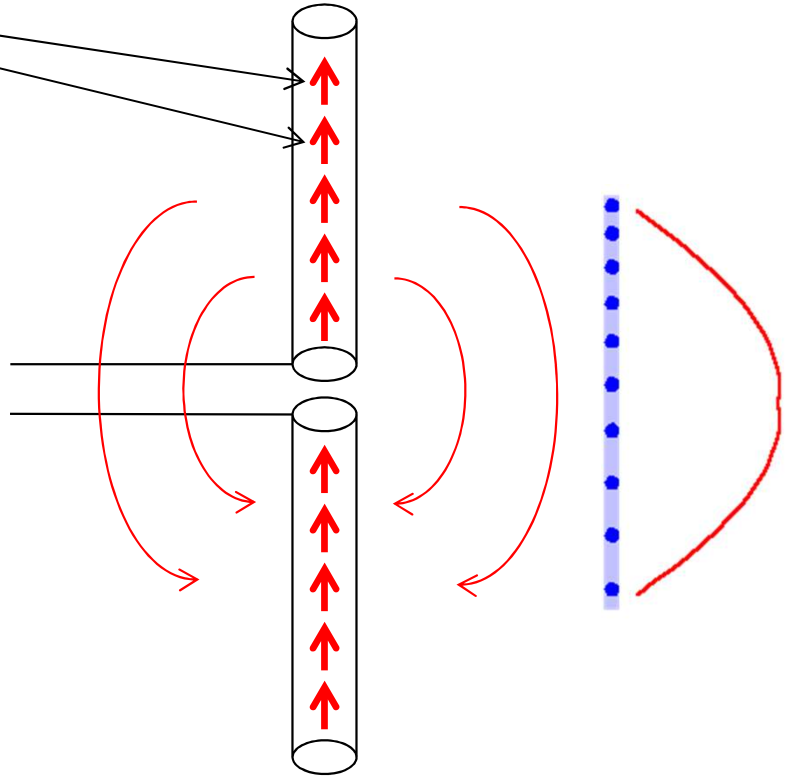
1864年、イギリス人のマクスウェルは時間的に変化する電流(加速する電荷)について思考実験し、電磁波の存在を予言した(電気現象と磁気現象がリンクする。矛盾も解決)。しかもその式を解くと速度は光速と一致するので、光は電磁波であると予言した。

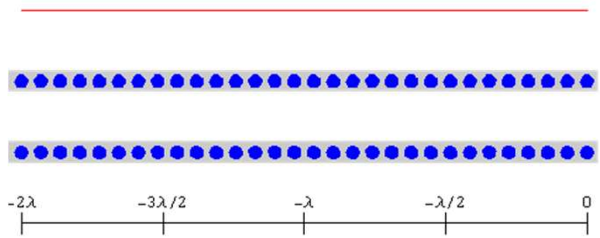
線路とアンテナの違い（参考）

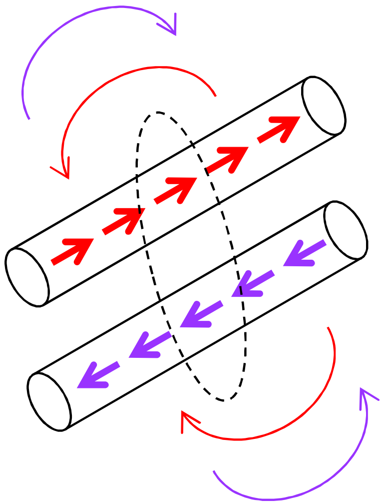


任意の電流分布は微小電流素（微小ダイポール）の和と考えると理解しやすい。









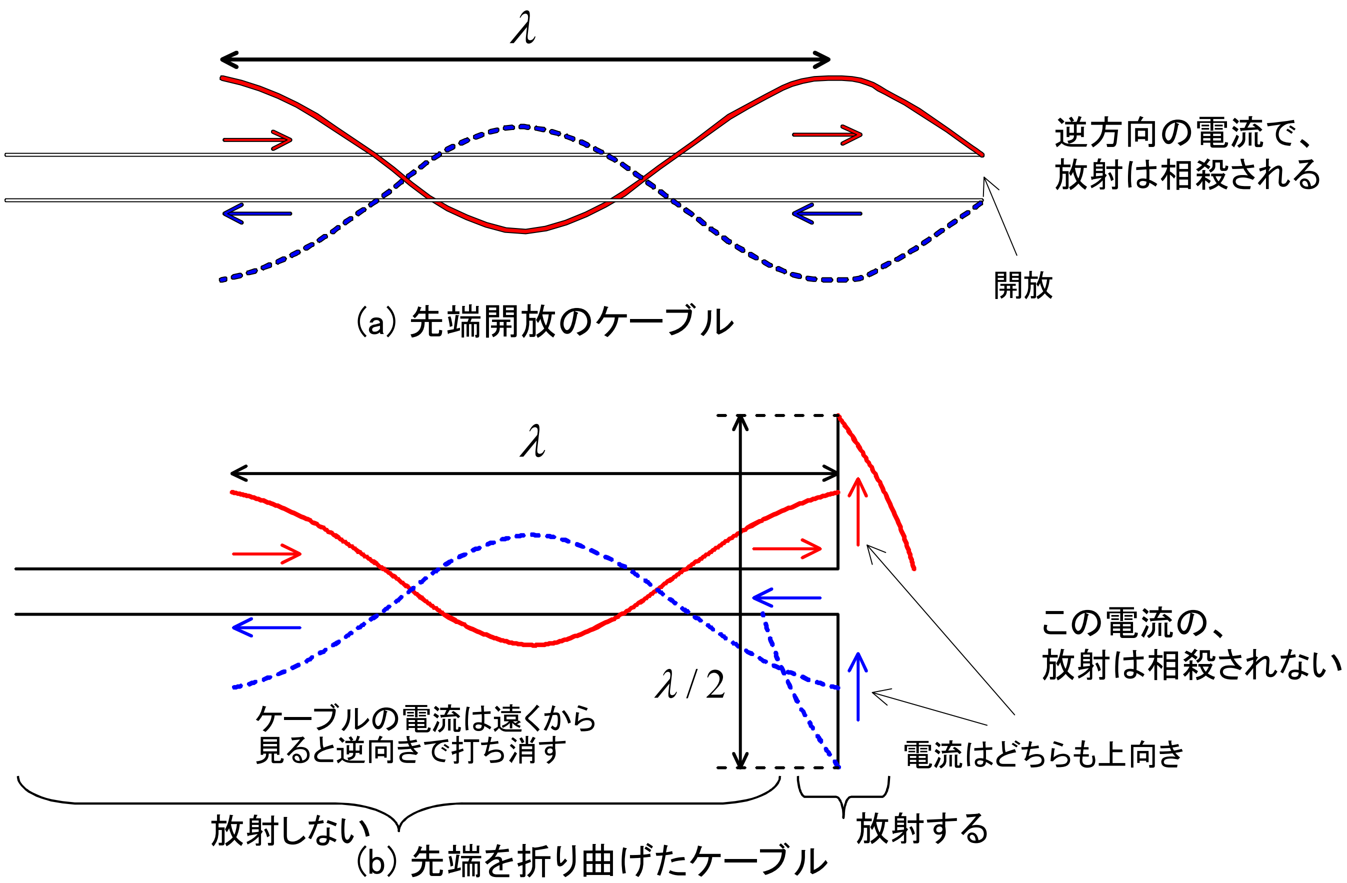
アンテナ

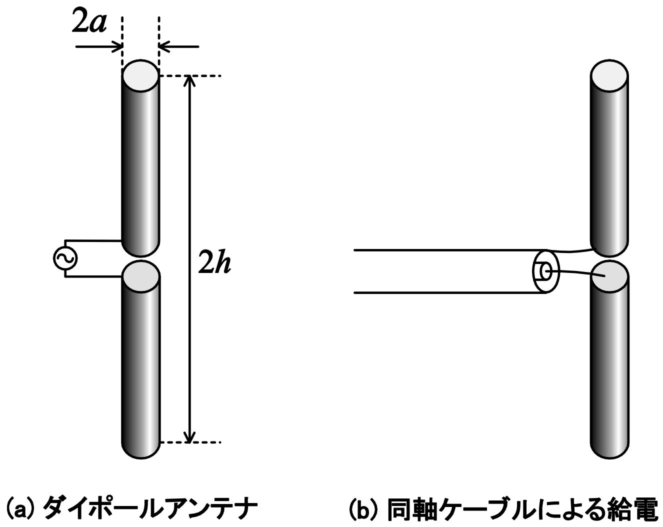
放射は打消し合わない

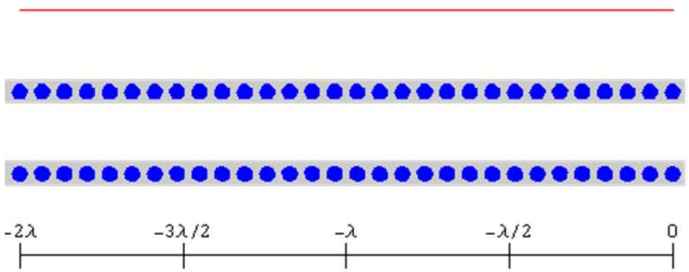
線路

放射は打消しあう

ダイポールアンテナの動作原理







- 交流電流があれば、普通は放射する。(物理現象)
- 電線から電波が放射しにくいのは打ち消すから。
- 電流が波長に比して短いと放射効率は悪い。

マクスウェルの方程式と電磁界シミュレータの役割

マクスウェルの方程式

ファラデーの法則　$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$

アンペアの法則　$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

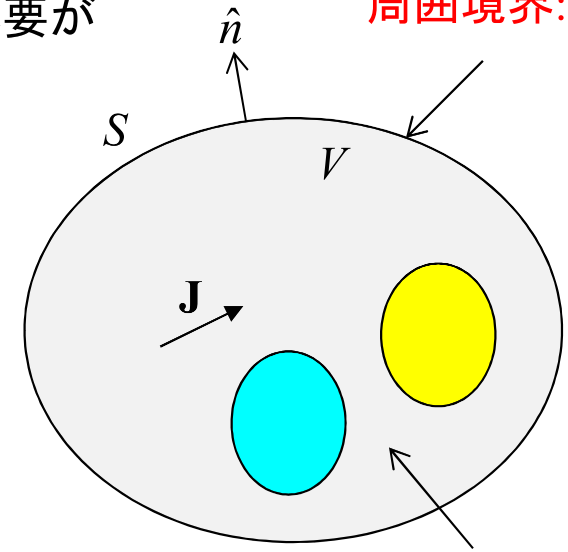
電磁界シミュレータの目的は、上のマクスウェルの方程式を速く、精度良く、なるべく一般の構造を解くこと。境界条件を指定する必要がある(→微分方程式論の境界値問題)。

解くために必要な条件(解析の前準備)

1. 構造および媒質(ε, μ, σ)
2. 境界条件
3. 励振波源

上をまとめて「解析モデル」と呼ぶ

周囲境界: 境界条件



内部: Maxwellの方程式

静電界/静磁界/準静電界/準静磁界

マクスウェルの方程式

逆起電力

変位電流

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \boxed{-\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} & \text{(ファラデーの法則)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \boxed{\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} & \text{(アンペアの法則)} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} \simeq 0$ 準静電界

変位電流は無視できない (ε: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

時間変化なし $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

静電界／静磁界

独立

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \text{(静電界)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} & \text{(静磁界)} \end{cases}$$

$V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ (Voltage)

$I = \oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ (Current)

$\dfrac{\partial}{\partial t} \simeq 0$ 準静磁界

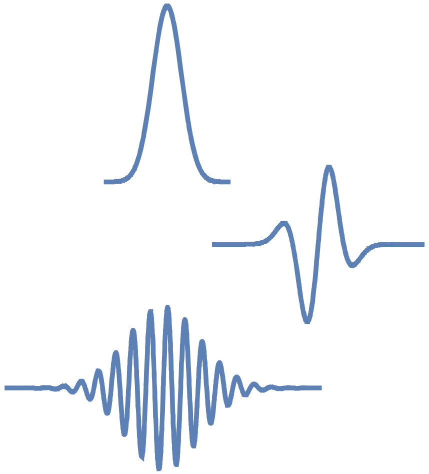
逆起電力は無視できない(μ: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \end{cases}$$

コイル・モーター等の解析

時間領域と周波数領域

時間領域

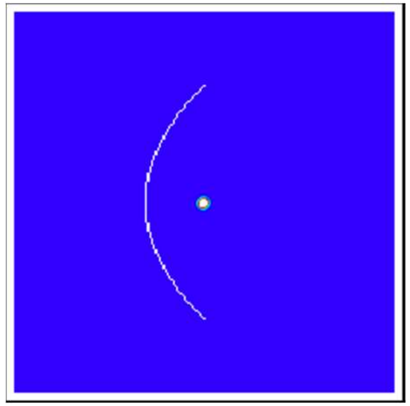


マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

境界値問題(空間)
＋初期値問題(時間)

FDTD

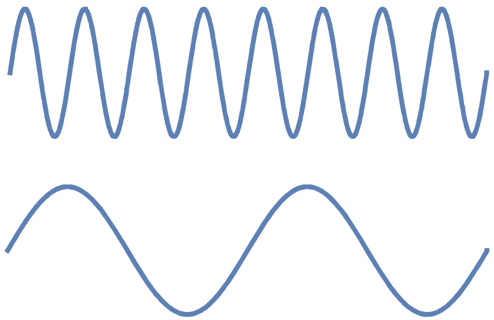


$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

調和振動

フーリエ変換

周波数領域



$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

境界値問題(空間)

MoM, FEM, FDFD

波動方程式(EまたはHのみの式)

マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = 0 \\ \nabla\times\mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \end{cases}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} + j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} = 0$$

場所の関数

$$\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r} + j\omega\mu_0\mathbf{H} = 0$$

$\nabla\times$

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right) + j\omega\mu_0\nabla\times\mathbf{H} = 0$$

$\nabla\times\mathbf{H}$ を消去

$$-\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right) - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}$$

Hを消去して**E**の方程式を導く

ヘルムホルツの波動方程式

（有限要素法の基礎方程式）

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right) - k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E} = -jk_0\eta_0\mathbf{J}$$

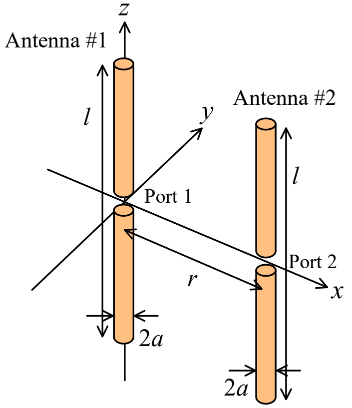
同様に、**E**を消去して**H**の方程式を導くこともできる

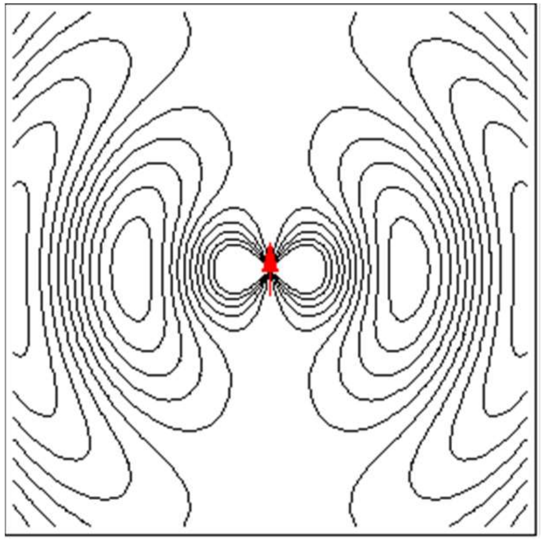
励振問題と非励振問題

励振波源あり

行列方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^{\ 2} \varepsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}$$





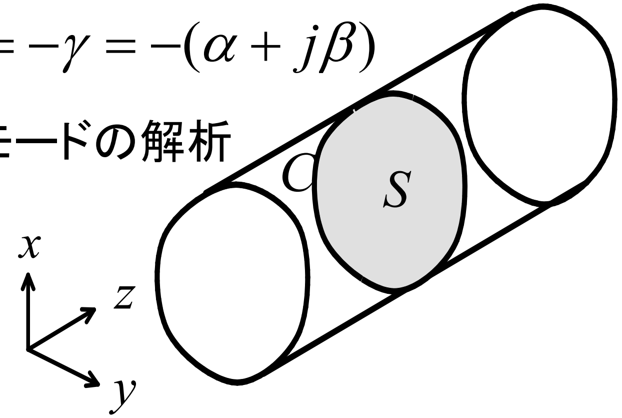
励振波源なし

固有値問題 $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$

$$\partial / \partial z = -\gamma = -(\alpha + j\beta)$$

導波路, モードの解析

2-D

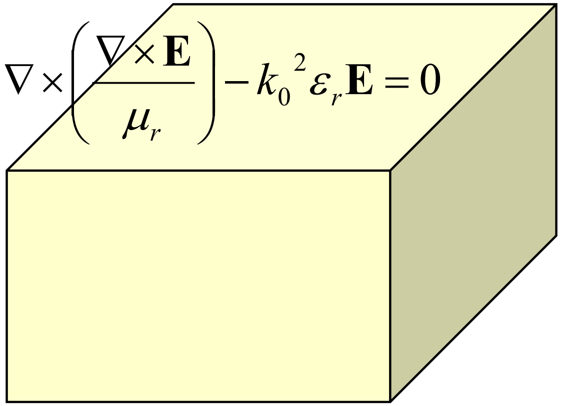


$$\nabla_t \times \left(\frac{\nabla_t \times \mathbf{E}_t}{\mu_r} \right) - \left(k_0^{\ 2} \varepsilon_r + \Gamma \right) \mathbf{E}_t = 0$$

共振器

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^{\ 2} \varepsilon_r \mathbf{E} = 0$$

3-D



どの周波数でどのような形で共振するのか?

有限要素法(FEM)

有限要素法 (FEM, Finite Element Method)

歴史

1955-1956 航空

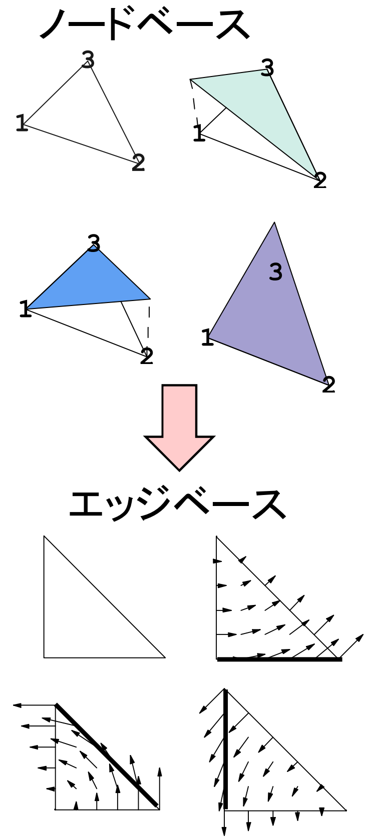
・M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and J. L. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", Journal of Aeronautical Sciences, vol. 23, pp. 805-824, 1956.
・J.H. Argyris, "Energy theorems and structural analysis. Part I general theory," Aircraft Engineering, vol.26, pp.347-356, 1954.

1960 土木・建築

R.W. Clough, "The finite element method in plane stress analysis," 2nd American Society of Civil Engineering (ASCE) Conf. on Electronic Computation, 1960.

1980 電気

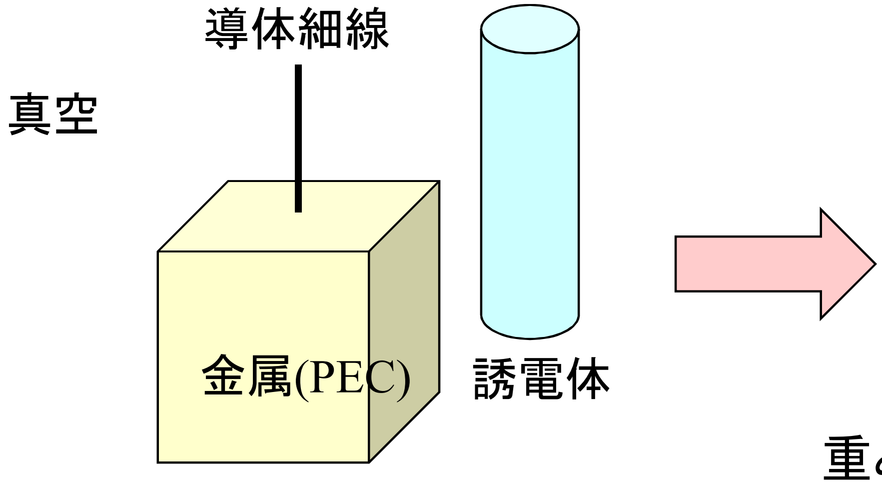
- Z.J. Csendes et al., "Numerical Solution of Dielectric Loaded Waveguides: I-Finite-Element Analysis," IEEE Trans. MTT, vol.18, no.12, pp.1124,1131, Dec. 1970.
- M. V. K. Chari and P. P. Silvester, "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems", John Wiley & Sons, 1980.



電磁波問題への応用はスプリアス（非物理）解の問題(1970)があり、なかなか進まなかった。原因が解明されていき(1984)、ペナルティー法を用いて解決(1984)されたが、エッジ要素(ベクトル基底関数) (1957)の採用により、スプリアス解の問題が自動的に解決(～1980-85)して発展した。

有限要素法の解析手順

(1) 解析モデルを決める



(2) 波動方程式から重み付き残差法で弱形式を導出(昔は変分法)

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}+jk_0\eta_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)=0$$

重み

Eの波動方程式

$$\iiint_\Omega \mathbf{W}\cdot\boxed{\left(\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}+jk_0\eta_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right)}dv=0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形(次のスライド参照)

$$\iiint_\Omega\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{W})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{W}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{W}\cdot\left(jk_0\eta_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right)\right]dv$$

$$-\oiint_{\partial\Omega}\frac{1}{\mu_r}(\hat{n}\times\mathbf{W})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})dS=0$$ **(弱形式)**

この弱形式はEに対する線形方程式なので、MoMと同様に行列方程式を得ればよい。ただし、体積積分があるので基底関数は空間に分布する3-D版を用いる。

ベクトル公式を使った式変形

前のスライドの第1項の式変形

Eの波動方程式

重み

$$\iiint_\Omega \mathbf{W}\cdot\boxed{\left(\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)-k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E}+jk_0\eta_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right)}dv=0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形

第1項の計算

$$\iiint_\Omega \mathbf{W}\cdot\left\{\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)\right\}dv$$

公式: $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$

$\mathbf{A}\to\dfrac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r},\ \mathbf{B}\to\mathbf{W}$

$$=\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})+\nabla\cdot\left\{\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)\times\mathbf{W}\right\}\right]dv$$

$$=\iiint_\Omega\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})dv+\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}\left\{\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)\times\mathbf{W}\right\}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

公式: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$\mathbf{A}\to\hat{\mathbf{n}},\ \mathbf{B}\to\nabla\times\mathbf{E},\ \mathbf{C}\to\mathbf{W}$

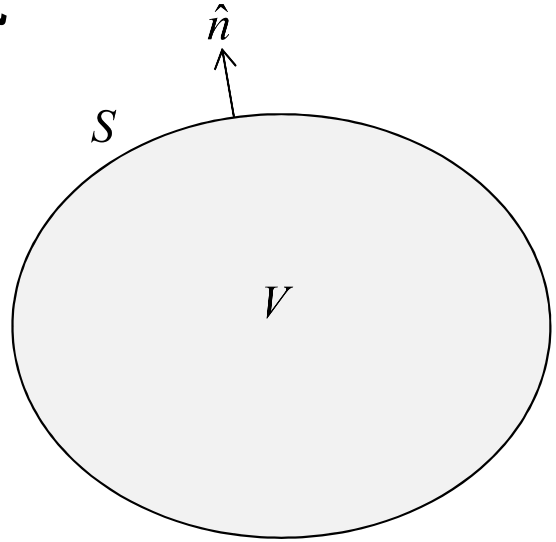
$$=\iiint_\Omega\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})dv-\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}\left\{(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{W})\cdot\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right)\right\}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

定式化 (1)

マクスウェルの方程式から磁界Hを消去した波動方程式

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}=\underbrace{-\left[jk_0Z_0\mathbf{J}+\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_r}\mathbf{M}\right)\right]}_{=\mathbf{f}}$$

$$\underbrace{\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\mathbf{E}\right)-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}+\mathbf{f}}_{=\mathbf{R}}=0$$



重み付き残差法　　ベクトル公式を駆使して変形されている

$$\langle\mathbf{R},\mathbf{W}\rangle=\iiint_V\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})-k_0{}^2\varepsilon_r\mathbf{E}\cdot\mathbf{W}\right]dv+\iiint_V\mathbf{W}\cdot\mathbf{f}dv$$

$$+\,jk_0Z_0\underbrace{\oiint_{S_K}\frac{1}{K}(\hat{n}\times\mathbf{E})\cdot(\hat{n}\times\mathbf{W})dS}_{\text{表面インピーダンス}}+\underbrace{\oiint_{S_{PEC}}\left[\mathbf{W}\cdot(\hat{n}\times(\nabla\times\mathbf{E}))\right]dS}_{\text{完全導体}}$$

→ そして、メッシュ分割してエッジ基底関数で電界Eを展開し、重み関数Wとしては全展開関数$\mathbf{E}_i$で重み付けして連立一次方程式の問題に帰着させ、行列方程式を解く。

定式化 (2)

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j$$

磁界を知りたいとき $\mathbf{H} = -\dfrac{\nabla\times\mathbf{E}}{j\omega\mu}$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{R}, \mathbf{E}_i \rangle = & \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\nabla\times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot \left(\nabla\times\mathbf{E}_i \right) - k_0{}^2 \varepsilon_r \left(\sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot \mathbf{E}_i \right] dv + \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv \\ & + jk_0 Z_0 \oiint_{S_K} \frac{1}{K} \left(\hat{n}\times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \cdot \left(\hat{n}\times\mathbf{E}_i \right) dS + \oiint_{S_{PEC}} \left[\mathbf{E}_i \cdot \left(\hat{n}\times \left(\nabla\times \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \mathbf{E}_j \right) \right) \right] dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{R}, \mathbf{E}_i \rangle = & \sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j [\iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\nabla\times\mathbf{E}_j \right) \cdot \left(\nabla\times\mathbf{E}_i \right) - k_0{}^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_i \right] dv \\ & + jk_0 Z_0 \oiint_{S_K} \frac{1}{K} \left(\hat{n}\times\mathbf{E}_j \right) \cdot \left(\hat{n}\times\mathbf{E}_i \right) dS + \oiint_{S_{PEC}} \left[\mathbf{E}_i \cdot \left(\hat{n}\times \left(\nabla\times\mathbf{E}_j \right) \right) \right] dS] \\ & + \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv \qquad (i = 1, \cdots, N_{basis})\end{aligned}$$

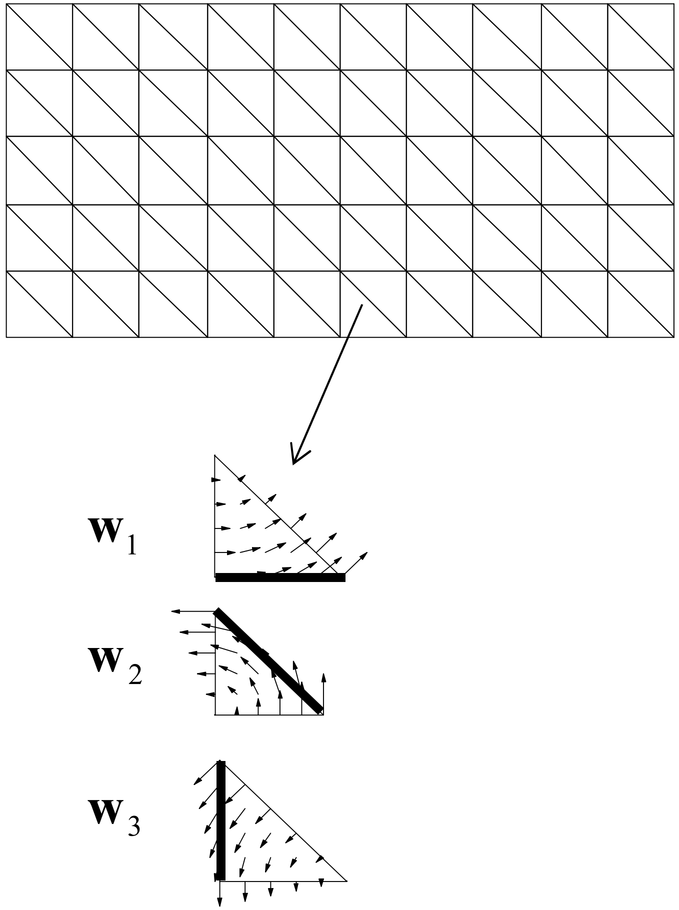
上の体積積分、面積分は各要素j内での積分のみ値を持つ。なぜならば、基底関数同士の積になっており、それらは要素内でしかオーバーラップしないからである。結局$V \rightarrow V_i$とすることができる。

定式化 (3)

$$\sum_{j=1}^{N_{basis}} a_j \underbrace{\left[A_{ij} - B_{ij} + C_{ij} + D_{ij}\right]}_{K_{ij}} = -F_i \qquad (i = 1, \cdots, N_{basis})$$

$$\begin{cases} A_{ij} = \iiint_V \dfrac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \mathbf{E}_j\right) \cdot \left(\nabla \times \mathbf{E}_i\right) dv \\ B_{ij} = \iiint_V k_0{}^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{E}_i dv \\ C_{ij} = jk_0 Z_0 \oiint_{S_K} \dfrac{1}{K} \left(\hat{n} \times \mathbf{E}_j\right) \cdot \left(\hat{n} \times \mathbf{E}_i\right) dS \\ D_{ij} = \oiint_{S_{PEC}} \left[\mathbf{E}_i \cdot \left(\hat{n} \times \left(\nabla \times \mathbf{E}_j\right)\right)\right] dS] \\ F_i = \iiint_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{f} dv \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{i,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},j} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_i \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}} \end{bmatrix}$$

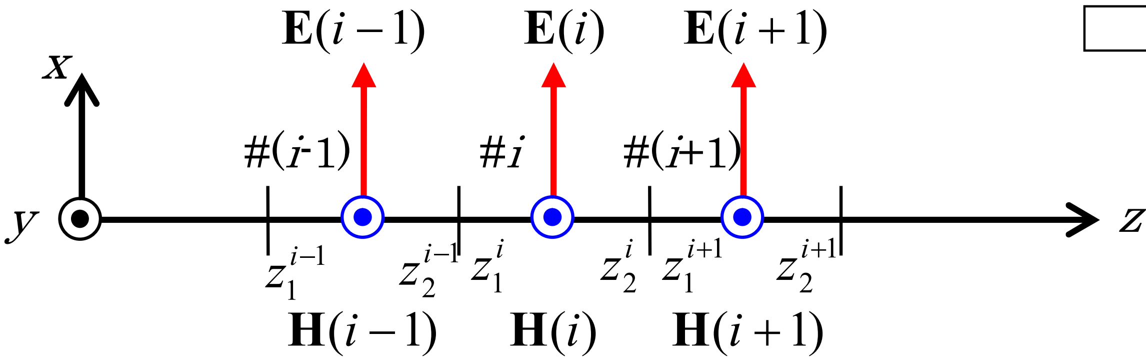


これらの積分は結構簡単に評価することができる。なぜならば、モーメント法の場合の用に特異点はなく、かつ、基底関数は多項式で表現されているので簡単な積分公式に帰着できる。

行列は非常に疎なので、専用のソルバ—を使うとメモリを節約し、高速に解くことができる。

1-Dの例: FEM (基底関数)

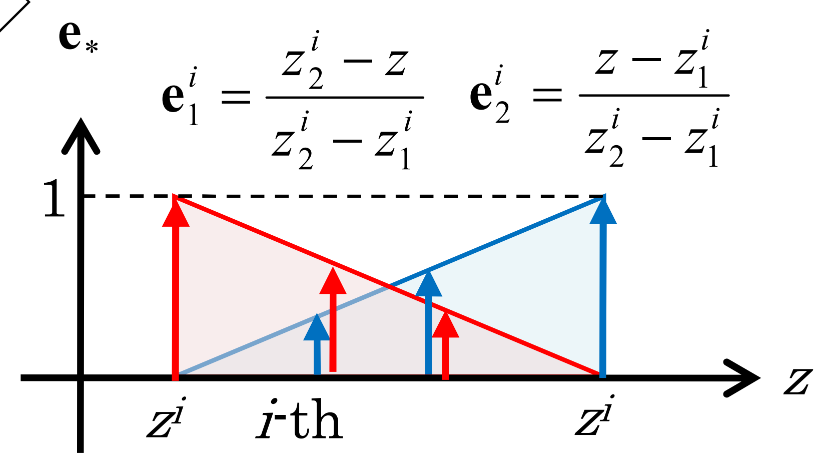
周波数領域



基底関数・・・この既知の関数と重みで任意の分布を表現

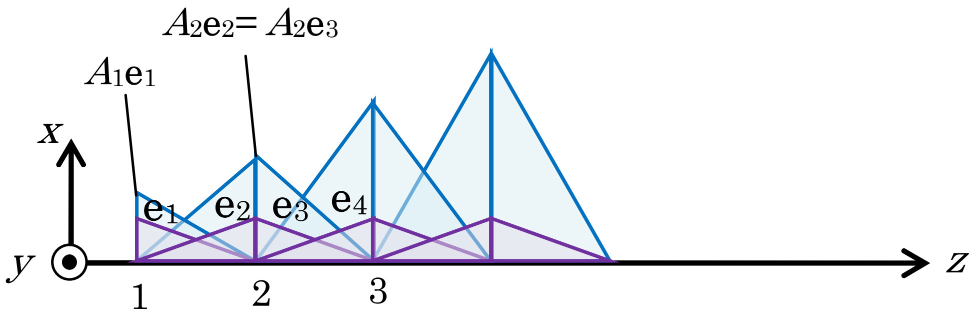
基底関数で展開

$$\mathbf{e}_1^i = \frac{z_2^i - z}{z_2^i - z_1^i} \qquad \mathbf{e}_2^i = \frac{z - z_1^i}{z_2^i - z_1^i}$$



$$z = z_1^i + (z_2^i - z_1^i)\varsigma$$

$$A_2^i = A_1^{i+1} = C^{i+1}$$

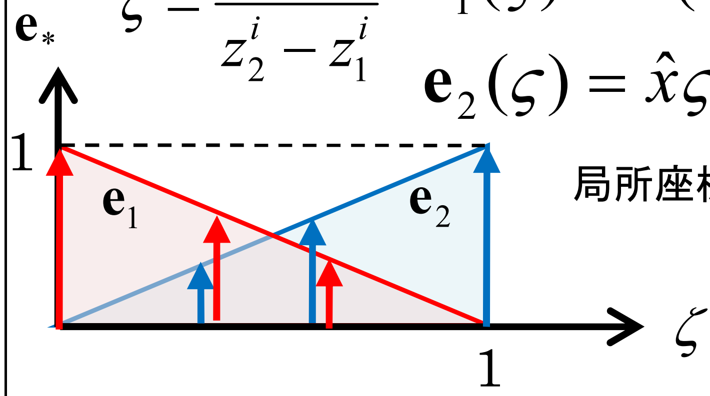


全空間の電界は基底関数
とその重みで表現

$$E_x = \sum_{i=1}^{N_e} \left(A_1^i e_{1x}^i(z) + A_2^i e_{2x}^i(z) \right)$$

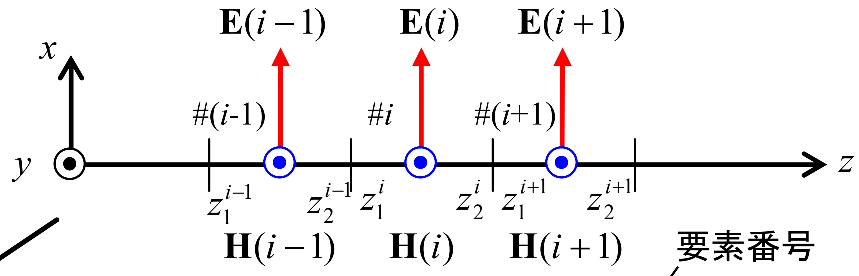
$$\varsigma = \frac{z - z_1^i}{z_2^i - z_1^i} \qquad \mathbf{e}_1(\varsigma) = \hat{x}(1-\varsigma)$$

$$\mathbf{e}_2(\varsigma) = \hat{x}\varsigma$$



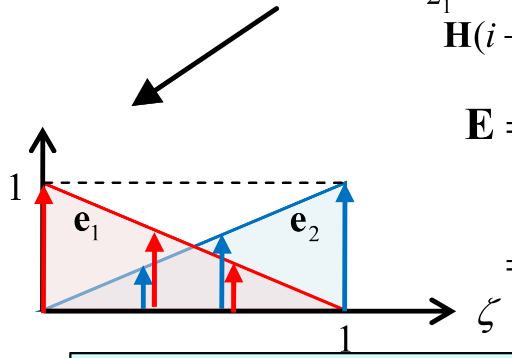
局所座標

1-Dの例: FEM (波動方程式, 重み付け残差法、弱形式)

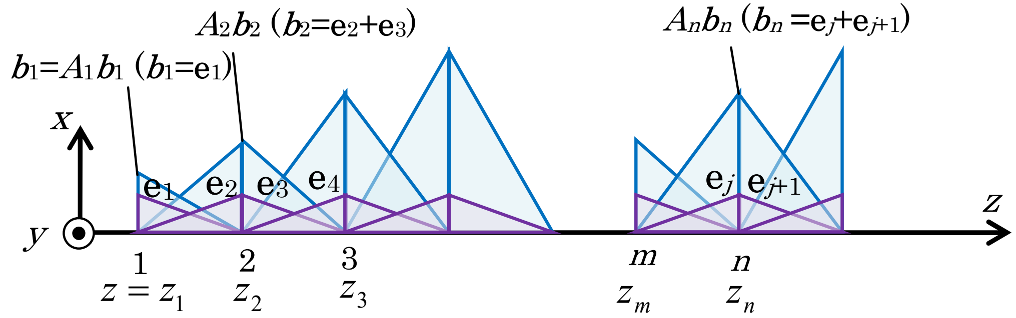


$$\mathbf{E} = \sum_{e=1}^{N_e}\left(A_1^e \mathbf{e}_1^e(z) + A_2^e \mathbf{e}_2^e(z)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_{basis}} A_n \mathbf{b}_n(z)$$



グローバルな基底関数の番号付



マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{M} \\ \nabla\times\mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \end{cases}$$

Hを消去

ヘルムホルツの波動方程式

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right) - k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E} + jk_0\eta_0\mathbf{J} + \nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right) = 0$$

Eの波動方程式

重み

$$\iiint_\Omega \mathbf{W}\cdot\left(\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu_r}\right) - k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E} + jk_0\eta_0\mathbf{J} + \nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right)dv = 0$$

数値計算しやすいよう、ベクトル解析の公式で変形

$$\iiint_\Omega\left[\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\mathbf{W})\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - k_0^2\varepsilon_r\mathbf{W}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{W}\cdot\left(jk_0\eta_0\mathbf{J} + \nabla\times\left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r}\right)\right)\right]dv$$

$$-\oint\!\!\oint_{\partial\Omega}\frac{1}{\mu_r}(\hat{n}\times\mathbf{W})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})dS = 0$$

(弱形式)

今の1次元の問題の場合

$$\int_\Gamma\left[\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial W_x}{\partial z}\frac{\partial E_x}{\partial z} - k_0^2\varepsilon_r W_x E_x\right.$$

$$\left. + W_x\left(jk_0\eta_0 J_x + \frac{1}{\mu_r}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\right)\right]dz - \left[\frac{1}{\mu_r}W_x\frac{\partial E_x}{\partial z}\right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}} = 0$$

1-Dの例: FEM (離散化, 行列方程式)

$$\int_\Gamma \Big[\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial W_x}{\partial z}\frac{\partial E_x}{\partial z} - k_0{}^2 \varepsilon_r W_x E_x$$

$$+ W_x \left(jk_0\eta_0 J_x + \frac{1}{\mu_r}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\right)\Big] dz - \underbrace{\left[\frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z}\right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}}}_{=[\text{boundary}]} = 0$$

$$E_x = \sum_{n=1}^{N_{basis}} A_n b_n(z)$$

$$W_x = b_m(z) \quad (m = 1, \cdots, N_{basis})$$

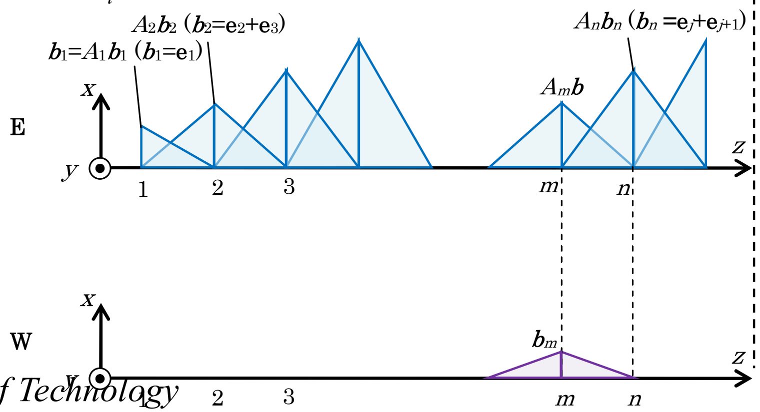
W_xは何でも良いのだが、このように選ぶ。

ガラーキン法

W=b_mの方程式

$$\sum_{n=1}^{N_{basis}} \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_r}\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z} dz - k_0{}^2 \varepsilon_r \int_z b_m b_n dz \right)}_{=K_{mn}} A_n + [\text{boundary}]$$

$$= \underbrace{-\int_z b_m \left(jk_0\eta_0 \frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r}\frac{1}{2}\left(- \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\right) dz}_{=F_i}$$



$$\sum_{n=1}^{N_{basis}} K_{mn} A_n + [\text{boundary}] = -F_n$$

[boundary]は無視して行列方程式を作ると

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}} \end{bmatrix}$$

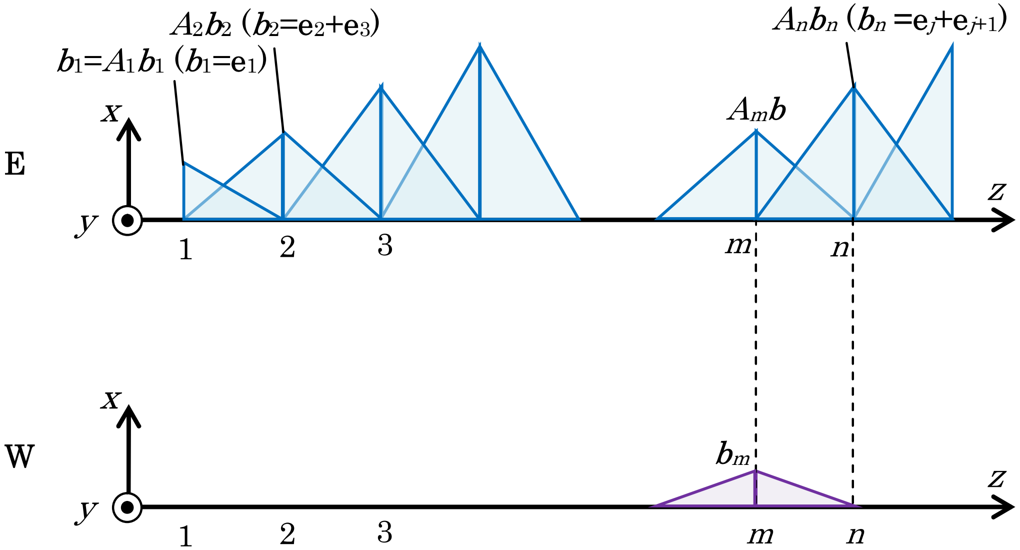
ここで、

$$\begin{cases} K_{mn} = \dfrac{1}{\mu_r}\displaystyle\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z} dz - k_0{}^2 \varepsilon_r \int_z b_m b_n dz \\ F_m = \displaystyle\int_z b_m \left(jk_0\eta_0 \frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r}\frac{1}{2}\left(- \frac{\partial M_y}{\partial z}\right)\right) dz \end{cases}$$

1-Dの例: FEM (行列要素の計算)

ここで、$K_{mn}=\dfrac{1}{\mu_r}\displaystyle\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z}dz-k_0{}^2\varepsilon_r\int_z b_m b_n dz$

の計算は次の図を見てわかるように、i,jともに同一、あるいは隣接する要素の基底関数のときしか値を持たない。
→行列は疎になる。



よって、要素ごとに基底関数同士の積分を評価して、行列に埋め込んでいくと効率的である。全体の行列方程式における基底関数としては、要素内の基底関数を用いて、上図のように各エッジで重みが定義された基底関数を用いる。このために(要素番号, 基底関数番号1or2)からグローバルの基底関数番号に対応させる変換表を準備しておく。

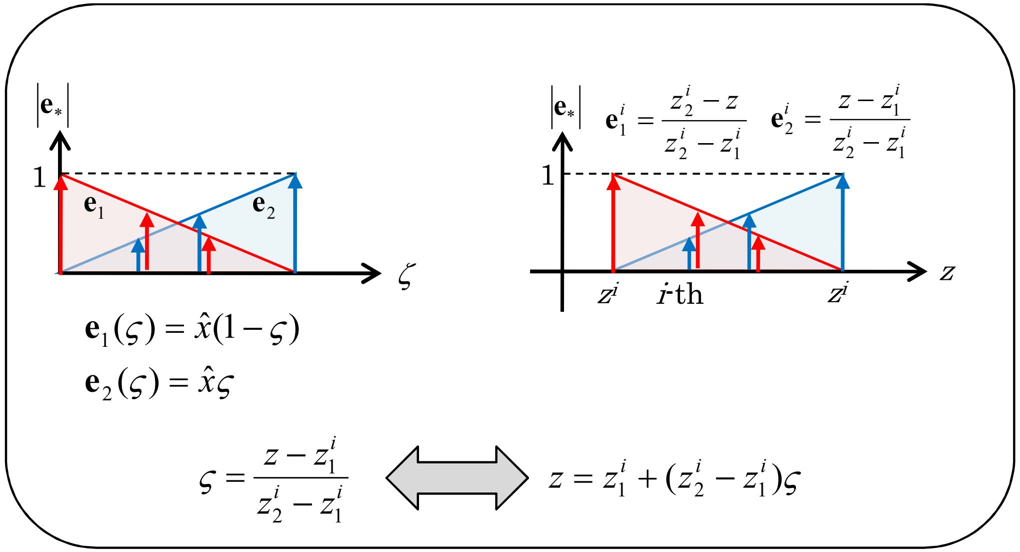
また、$K_{mn}=\dfrac{1}{\mu_r}\displaystyle\int_z \frac{\partial b_m}{\partial z}\frac{\partial b_n}{\partial z}dz-k_0{}^2\varepsilon_r\int_z b_m b_n dz$

の計算は

$$b_m(z)=e_2^{e-1}(z)+e_1^e(z)$$

なので、次の計算に帰着される。

$$\begin{cases} E_{ij}=\displaystyle\int_{z_1^e}^{z_2^e} e_i^e(z)e_j^e(z)dz=\begin{cases}(z_2^e-z_1^e)/3 & (i=j)\\ (z_2^e-z_1^e)/6 & (i\neq j)\end{cases} \\ F_{ij}=\displaystyle\int_{z_1^e}^{z_2^e}\frac{\partial e_i^e(z)}{\partial z}\frac{\partial e_j^e(z)}{\partial z}dz=\begin{cases}1/(z_2^e-z_1^e) & (i=j)\\ 1/(z_1^e-z_2^e) & (i\neq j)\end{cases}\end{cases}$$



1-Dの例: FEM (波源: 電流源)

$$
m = M_J \quad
\begin{bmatrix}
K_{11} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\
\vdots & & & & \vdots \\
K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\
\vdots & & & & \vdots \\
K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-F_1 \\ \vdots \\ \boxed{-F_m} \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
\Leftarrow -jk_0\eta_0 J_0/2
$$

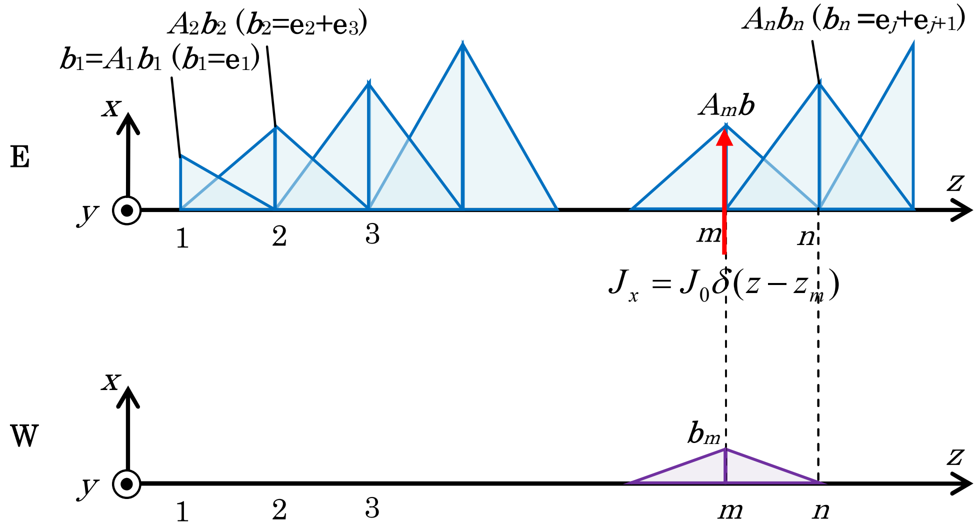
$$
F_m = \int_z b_m \left(jk_0\eta_0 \frac{J_x}{2} + \frac{1}{\mu_r}\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \right) dz
$$

m=M_Jの基底関数の中央に線電流

$$
J_x = J_0\delta(z - z_m) \qquad M_y = 0
$$

で励振されているとすると

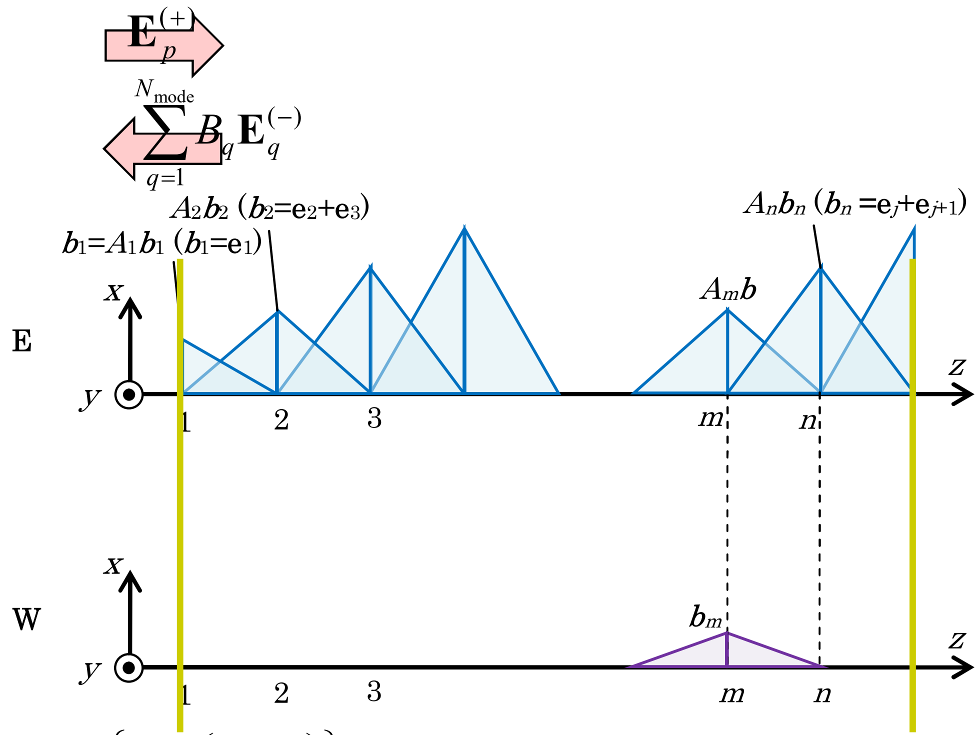
$$
F_{M_J} = jk_0\eta_0 J_0 / 2
$$



1-Dの例: FEM (波源: 導波管モード)（参考）

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p^{(+)} + \sum_{q=1}^{N_\text{mode}} B_q \mathbf{E}_q^{(-)}$$

$$= \mathbf{e}_p \exp(-\gamma_p z) + \sum_{q=1}^{N_\text{mode}} B_q \mathbf{e}_q \exp(+\gamma_q z)$$



$$\begin{cases} \iint_S \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_j \cdot d\mathbf{S} = -\dfrac{1}{j\omega\mu_0} \iint_S \mathbf{E}_i \times \dfrac{\nabla \times \mathbf{E}_j}{\mu_r} \cdot d\mathbf{S} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{(伝搬モード)} \\ j = \sqrt{-1} & \text{(減衰モード)} \end{cases} \\ -\dfrac{1}{\mu_r} \iint_S \mathbf{E}_i \times \nabla \times \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S} = \delta_{ij} j\omega\mu_0 \begin{cases} 1 & \text{(伝搬モード)} \\ j = \sqrt{-1} & \text{(減衰モード)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0{}^2 \varepsilon_r \mathbf{W} \cdot \mathbf{E} \right] dv - \iint_{\partial\Omega_{WP}} \left\{ \mathbf{W} \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\overline{\partial\Omega_{WP}}} \left\{ \mathbf{W} \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \underbrace{-\iiint_\Omega \mathbf{W} \cdot \left[jk_0 \eta_0 \mathbf{J} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\mu_r} \right) \right] dv}_{=\text{[current source]}}$$

普通に体積内部を基底関数の和で表現

境界のポート上の電界を電界モードの和で表現

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{(\text{inside})} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})} & \text{体積内部} \\ \mathbf{E}^{(\text{port})} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j \mathbf{e}_j^{(\text{port})} & \text{ポート} \end{cases}$$

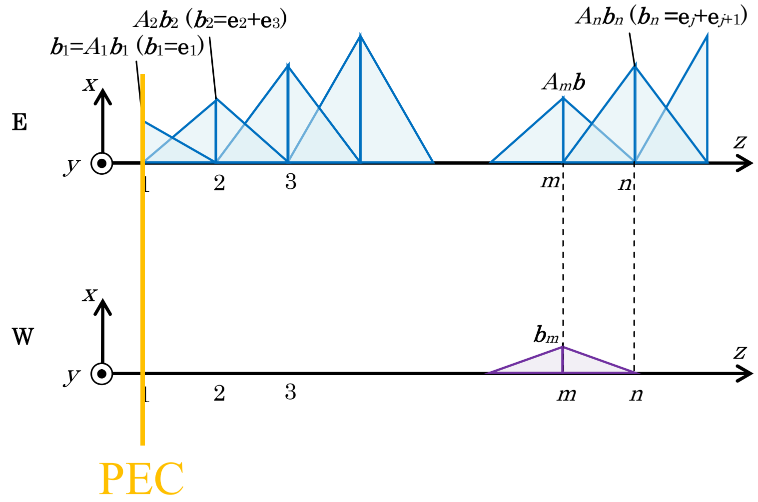
$$\begin{bmatrix} \begin{array}{l} \displaystyle\iiint_\Omega \frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \mathbf{e}_i^{(\text{inside})} \right) \cdot \left(\nabla \times \sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})} \right) dv \\ \displaystyle -\iiint_\Omega k_0{}^2 \varepsilon_r \mathbf{e}_i^{(\text{inside})} \cdot \sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})} dv \end{array} & \displaystyle -\oiint_{\partial\Omega} \left\{ \mathbf{e}_i^{(\text{inside})} \times \left(\frac{\nabla \times \sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j \mathbf{e}_j^{(\text{port})}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} \\ \displaystyle -\oiint_{\partial\Omega} \left\{ \mathbf{e}_i^{(\text{port})} \times \left(\frac{\nabla \times \sum_{j=1}^{N^{(\text{inside})}} A_j \mathbf{e}_j^{(\text{inside})}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} & \displaystyle -\oiint_{\partial\Omega} \left\{ \mathbf{e}_i^{(\text{port})} \times \left(\frac{\nabla \times \sum_{j=1}^{N^{(\text{port})}} B_j \mathbf{e}_j^{(\text{port})}}{\mu_r} \right) \right\} \cdot d\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A_i\} \\ \{B_i\} \end{bmatrix} = \text{[current source]} + \text{[modal ex.]}$$

1-Dの例: FEM (境界条件: PEC)

左の壁が電気壁(PEC)の場合

$E_x = 0$ なので、$A_1 = 0$

とする。これは元々既知であったと考えるので
行列方程式に $A_1 = 0$
を代入し、未知数からも消去する。



$$
\begin{bmatrix}
\cancel{K_{11}} & \cancel{\cdots} & \cancel{K_{1n}} & \cancel{\cdots} & \cancel{K_{1,N_{basis}}} \\
\cancel{\vdots} & & & & \vdots \\
\cancel{K_{m1}} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\
\cancel{\vdots} & & & & \vdots \\
\cancel{K_{N_{basis},1}} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & K_{N_{basis},N_{basis}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\cancel{A_1} \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cancel{F_1} \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ -F_{N_{basis}}
\end{bmatrix}
$$

1-Dの例: FEM (境界条件: 表面インピーダンス Z_s)

$$\boxed{\partial E_x / \partial z + \alpha E_x = \beta}$$

表面インピーダンス

$$[\mathrm{boundary}] = -\left[\frac{1}{\mu_r} W_x \frac{\partial E_x}{\partial z}\right]_{z=z_1}^{z_{N_e+1}} = -\left[\frac{1}{\mu_r} W_x(z_{N_e+1}) \frac{\partial E_x(z_{N_e+1})}{\partial z} - \frac{1}{\mu_r} W_x(z_1) \frac{\partial E_x(z_1)}{\partial z}\right]$$

$$= -\frac{1}{\mu_r(N_e)}\left(\beta_{N_e} - \alpha_{N_e} A_{N_{basis}} e_{2x}^{N_e}(z_{N_e+1})\right) + \frac{1}{\mu_r(1)}\left(\beta_1 - \alpha_1 A_1 e_{1x}^1(z_1)\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu_r(N_e)}\left(\beta_{N_e} - \alpha_{N_e} A_{N_{basis}}\right) + \frac{1}{\mu_r(1)}\left(\beta_1 - \alpha_1 A_1\right)$$

足す $-\dfrac{\alpha_1}{\mu_r(1)}$

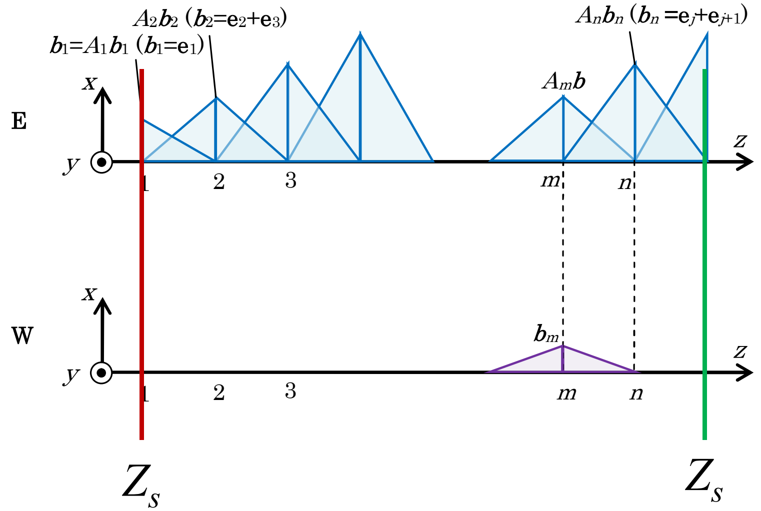
$-\dfrac{\beta_1}{\mu_r(1)}$ 足す

$$\begin{bmatrix} \boxed{K_{11}} & \cdots & K_{1n} & \cdots & K_{1,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{m1} & \cdots & K_{mn} & \cdots & K_{m,N_{basis}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{N_{basis},1} & \cdots & K_{N_{basis},n} & \cdots & \boxed{K_{N_{basis},N_{basis}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{N_{basis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-F_1} \\ \vdots \\ -F_m \\ \vdots \\ \boxed{-F_{N_{basis}}} \end{bmatrix}$$

足す

足す $+\dfrac{\alpha_{N_e}}{\mu_r(N_e)}$

$+\dfrac{\beta_{N_e}}{\mu_r(N_e)}$



1-Dの例: FEM (境界条件: 吸収境界条件)

進行波の表現: $E_x = E_0 e^{\mp jkz}$ 上側: +z方向, 下側-z方向

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mp jk \underbrace{E_0 e^{\mp jkz}}_{=E_x} = \mp jkE_x$$

表面インピーダンス

$$\boxed{\partial E_x / \partial z + \alpha E_x = \beta}$$

$z = z_1$

$$\partial E_x / \partial z - jkE_x = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -jk \\ \beta_1 = 0 \end{cases}$$

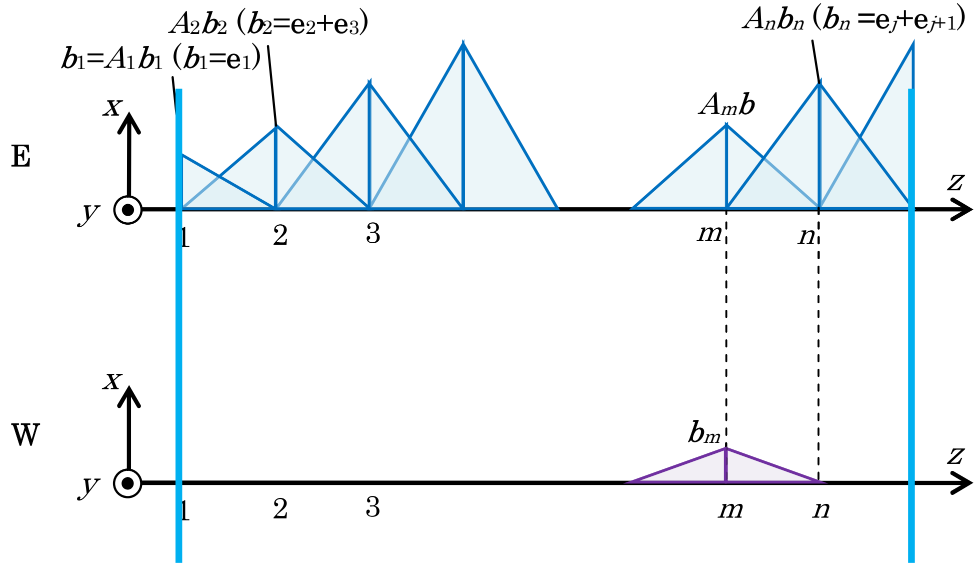
$z = z_{N_e}$

$$\partial E_x / \partial z + jkE_x = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_{N_e} = +jk \\ \beta_{N_e} = 0 \end{cases}$$

$$E_x(z_1) = E_0(z_1)e^{+jkz} \qquad E_x(z_{N_e}) = E_0(z_{N_e})e^{-jkz}$$

表面インピーダンスと考えればよい



ベクトル基底関数

FEMのベクトル基底関数

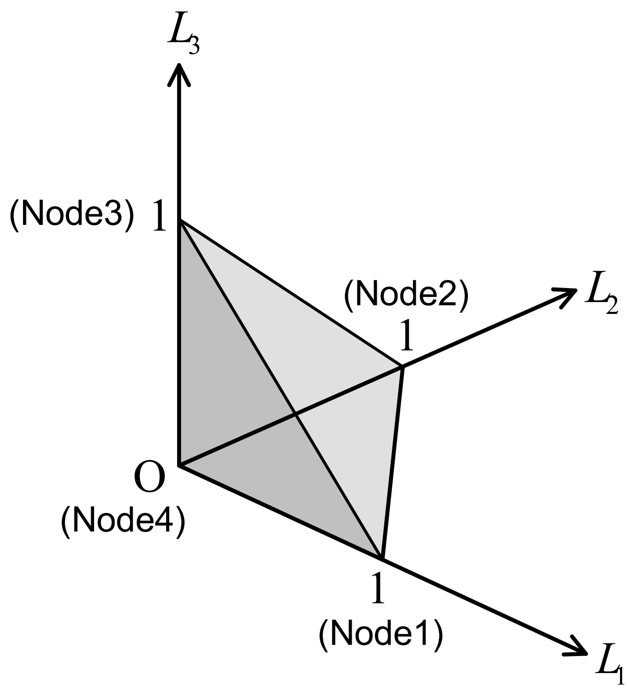
J.C. Nedelec, “Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$,” Numerische Mathematik, Vol.35, No.3, pp.315-341, 1980.

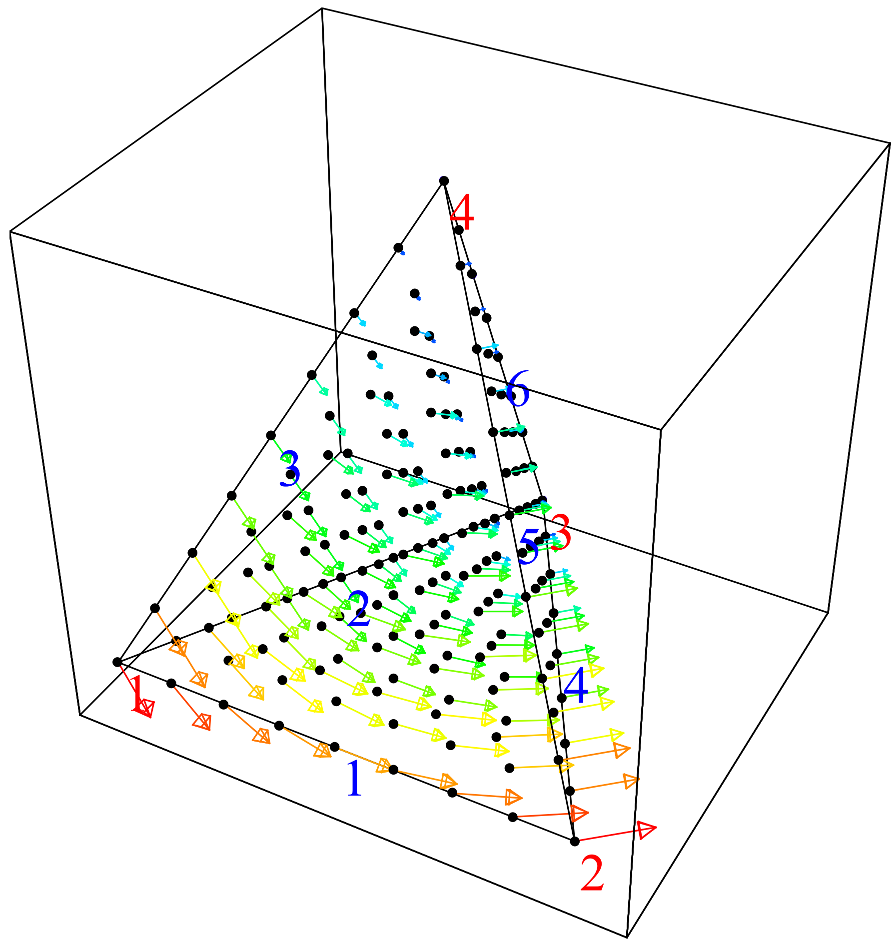
ドイツ語。図が1つしかない。数学の論文みたい・・・。

MoMのベクトル基底関数

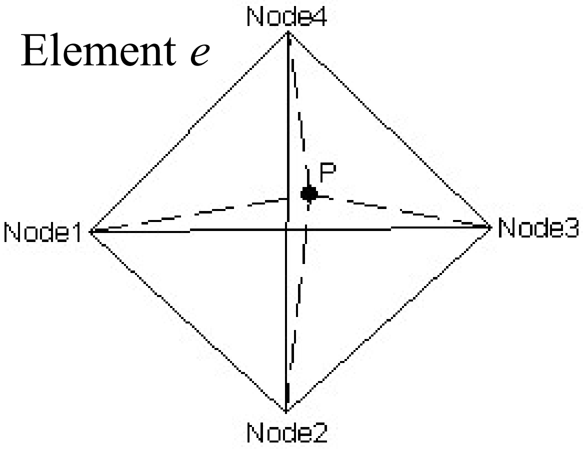
S.M. Rao, D.R. Wilton, and A.W. Glisson, “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape,” IEEE Trans. Antennas & Propagat., vol.30, pp.409-418, May 1982.

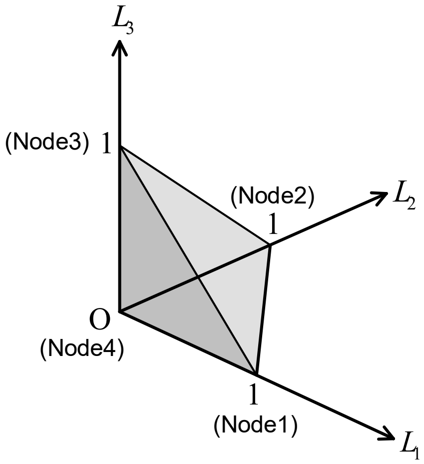
3-D FEMのエッジ要素ベクトル基底関数





3-D FEMのエッジ要素ベクトル基底関数





$$\mathbf{W}_k^e = \ell_{ij}\left(L_i^e \nabla L_j^e - L_j^e \nabla L_i^e\right)$$

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$L_i^e = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$$

$$L_1^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P234}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_2^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P341}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_3^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P412}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_4^e = \frac{\mathrm{Vol.}\,P123}{\mathrm{Vol.}1234}$$

$$L_1^e + L_2^e + L_3^e + L_4^e = 1$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}$$

ヘルムホルツの定理

任意のベクトル関数**F**は1つのスカラー関数の勾配と、他の1つのベクトル関数の回転の和に分解することができる

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_p$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_r = \nabla \times \mathbf{A} & (\text{ソレノイダル・ベクトル}) \\ \mathbf{F}_p = \nabla \phi & (\text{ラメラー・ベクトル}) \end{cases}$$

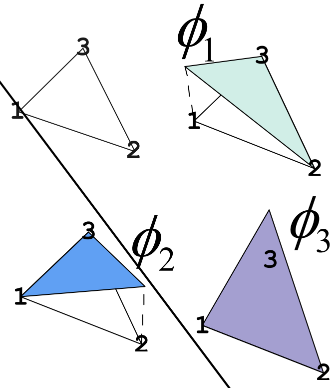
$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F}_r = \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) = 0 & (\mathrm{F_r}\text{は発散が}0) \\ \nabla \times \mathbf{F}_p = \nabla \times \left(\nabla \phi \right) = 0 & (\mathrm{F_p}\text{は回転が}0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_p \\ \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}_r \end{cases}$$

Fを定めるときに、発散だけ、または回転だけを定めたのでは完全に定まらず、発散と回転の両方を定めなければ**F**は一意に定まらない。

スプリアス（非物理）解について

ノードベース



$$\phi = \sum_{i=1}^{3} a_i \phi_i$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

ファラデーの法則に矛盾

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

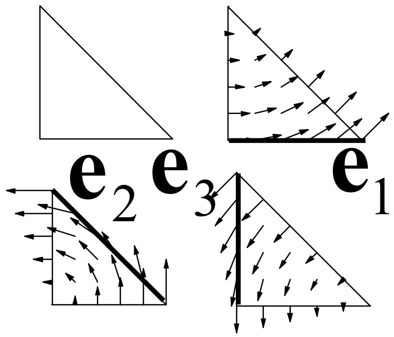
→スプリアス（非物理）解の発生

ベクトル公式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

エッジベース



$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i$$

$$\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$$

問題なし

しかも、$\mathbf{E}$はエッジ上で接線成分が等しくなる（→電界の接線成分の境界条件 $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j) = 0$ を満たす）

静電界/静磁界/準静電界/準静磁界

マクスウェルの方程式

逆起電力

変位電流

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \boxed{-\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} & \text{(ファラデーの法則)} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \boxed{\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} & \text{(アンペアの法則)} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} \cong 0$ 準静電界

変位電流は無視できない (ε: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

時間変化なし

これは問題なし

独立

$$\begin{cases} \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{(静電界)}} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad \text{(静磁界)} \end{cases}$$

$$V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(Voltage)}$$

$$I = \oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(Current)}$$

$\dfrac{\partial}{\partial t} \cong 0$ 準静磁界

逆起電力は無視できない(μ: 大)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \end{cases}$$

コイル・モーター等の解析

FEM参考資料: 変分法(有限要素法の原理)

方程式の解放を極値を求める問題に帰着させて解く手法

- 昔の定式化(安定性の数学的証明)
- 汎関数が求まるとは限らない

【例】

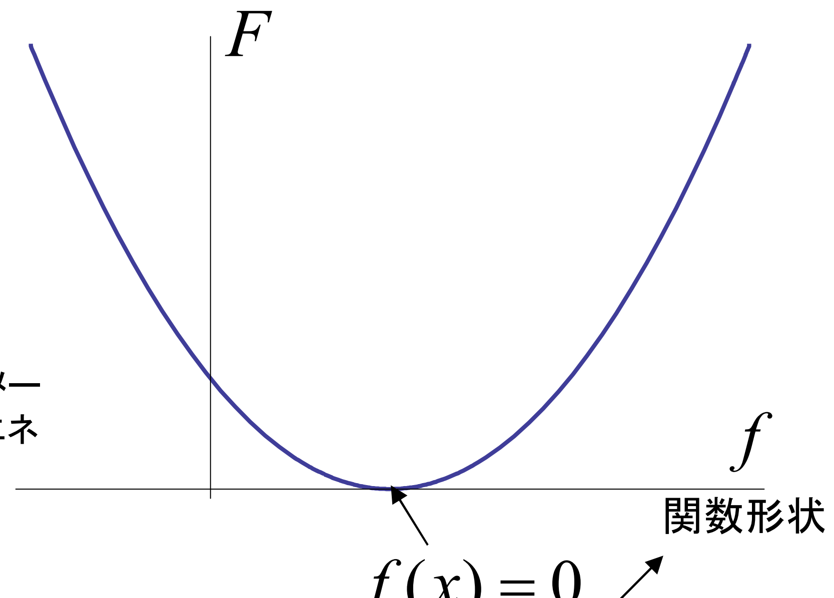
$f(x)=0$ 方程式

$F[f]$ 汎関数(Functional)

関数から実数への写像

- Fが極値を取るfは$f(x)=0$となる
- 関数fの形状による関数(極値は1つ：単峰性)

(F は$f(x)$をxの定義範囲で積分した表現であり、イメージとしてはエネルギー弦の振動における変位からエネルギーを求めるようなものである。)



このような汎関数を求めるのは大変である

必ず求まるわけではない

$$f(x) \cong \sum_{j=1}^{N} a_j g_j(x)$$

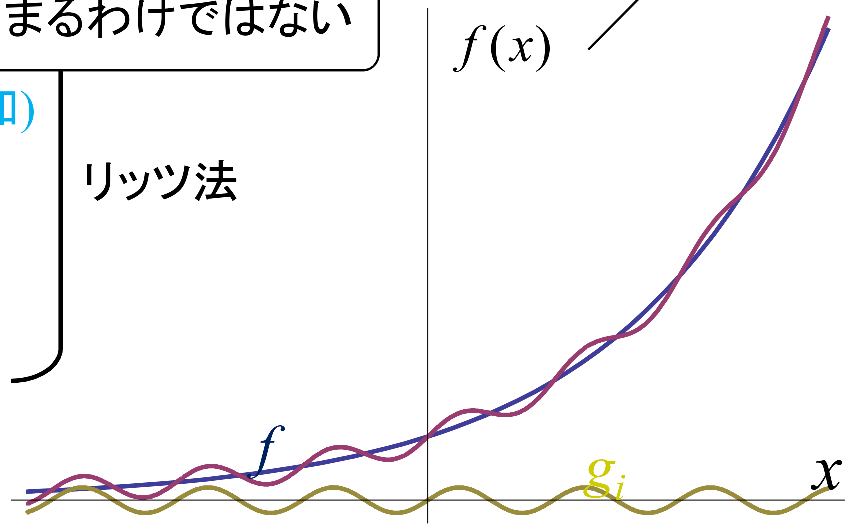
重み係数(未知)

基底関数(既知)

リッツ法

$$\frac{\partial F[f]}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,\cdots,N)$$

連立一次方程式の問題となり、a_jが決定されて近似的に$f(x)$が求まる。



(例)仮想変位の方法(エネルギーを座標で偏微分して力を求める)

【参考】 有限要素法(FEM, finite element method)による電磁界解析入門 (pp.9-12) http://www.takuichi.net/study/fem/fem.pdf

有限要素法解析の流れ

メッシュ生成

- 解析空間全体をメッシュ分割する

行列の生成

- 各要素の中の基底関数の寄与を全体の行列に足す

境界条件

- 境界条件の寄与に関しても全体の行列に足す

励振

- 励振波源の寄与についても全体の行列に足す

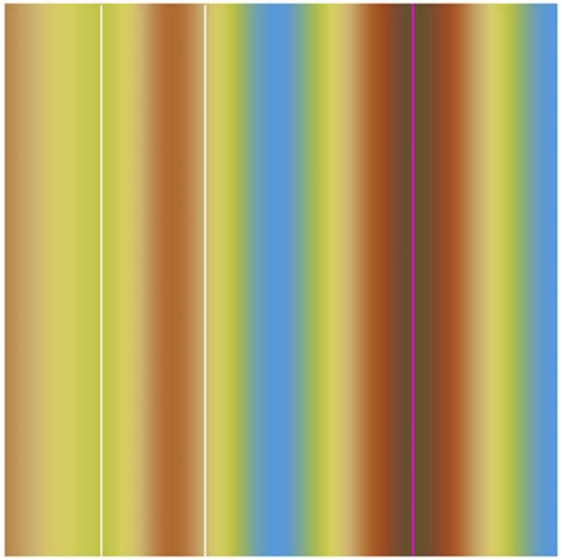
行列方程式

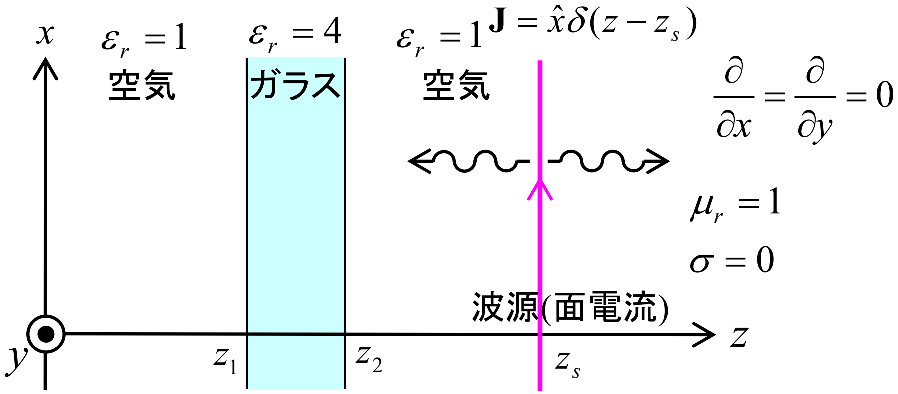
- 生成された行列方程式を解く
- 疎行列のため、前処理を行ってSOR法で解くなどの専用ソルバーが使われる

後処理

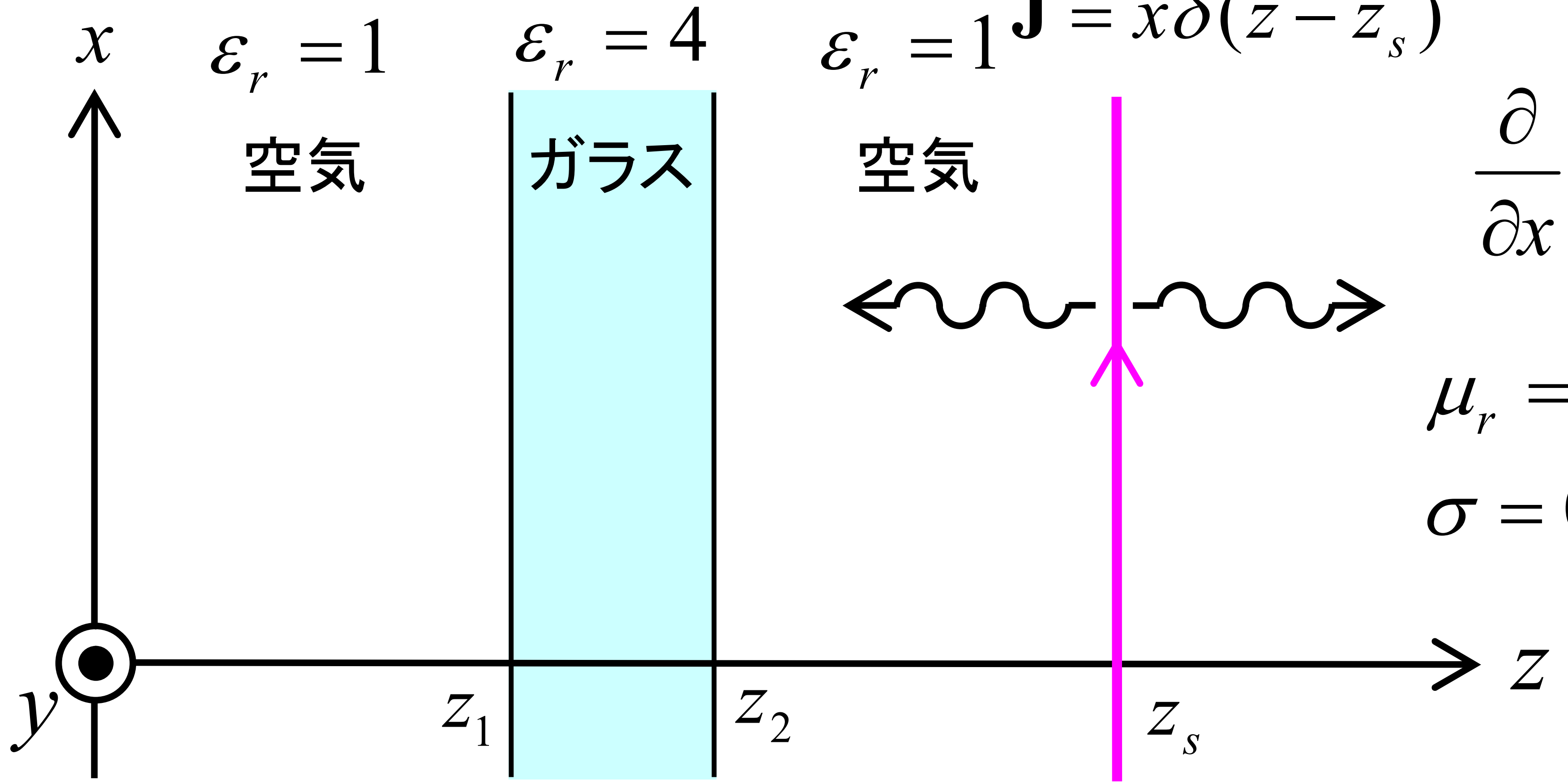
- 電界基底関数のときは任意の位置での電界は重み付けした基底関数の和で求まる。磁界はファラデーの法則より求まる。

電磁界解析原理説明のための1次元問題





1次元問題の例



$$\mathbf{J} = \hat{x}\delta(z - z_s)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\mu_r = 1$$

$$\sigma = 0$$

波源(面電流)

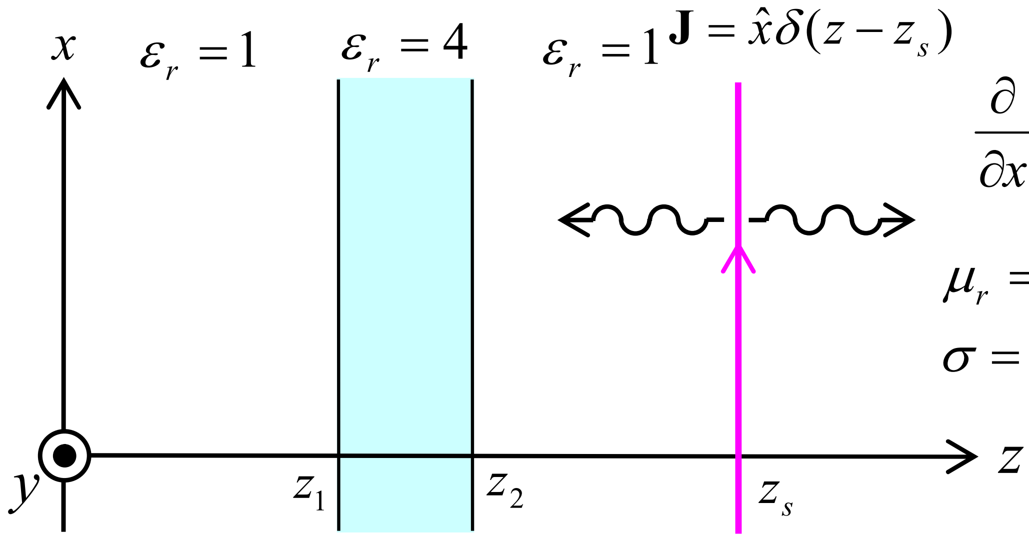
1次元問題の場合のマクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

1次元

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\dfrac{\partial H_y}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial H_y}{\partial z} = i_x + \varepsilon\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$\mu_r = 1$

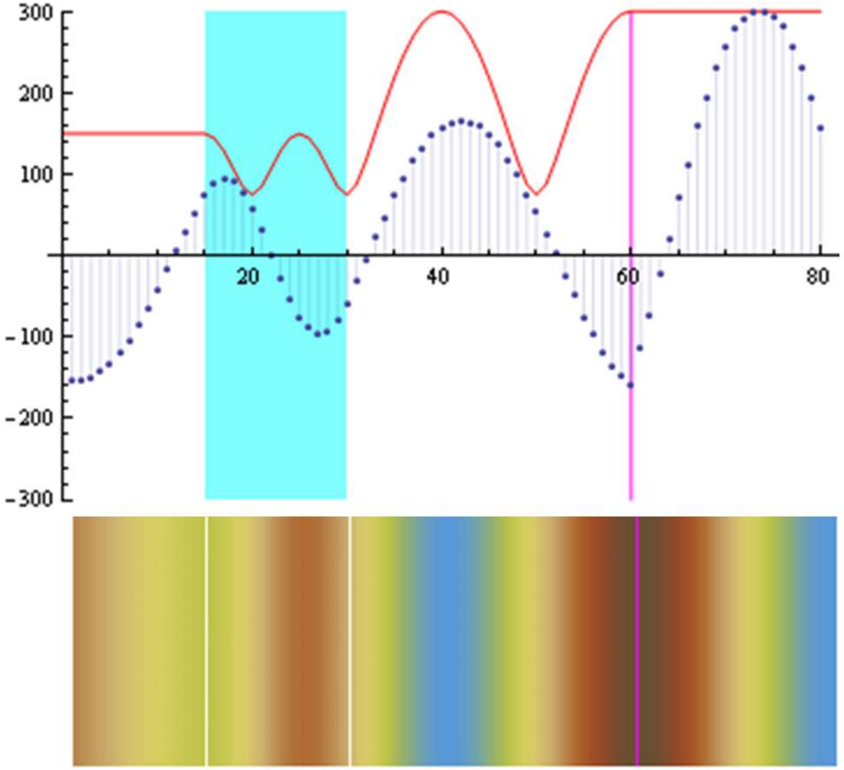
$\sigma = 0$

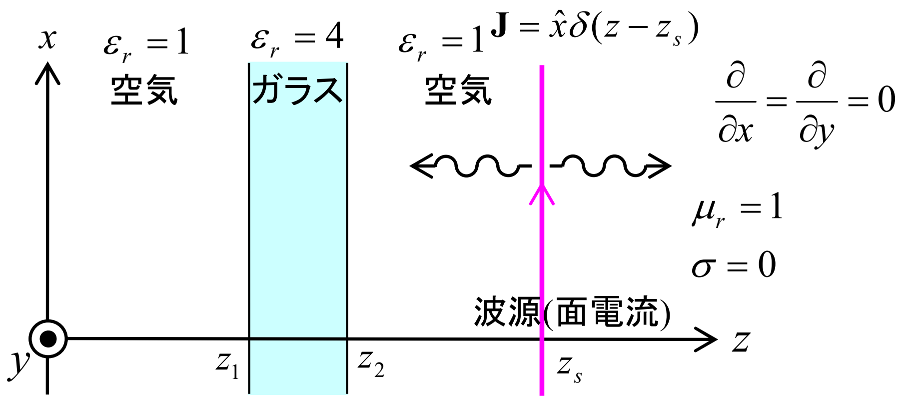
$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \hat{y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

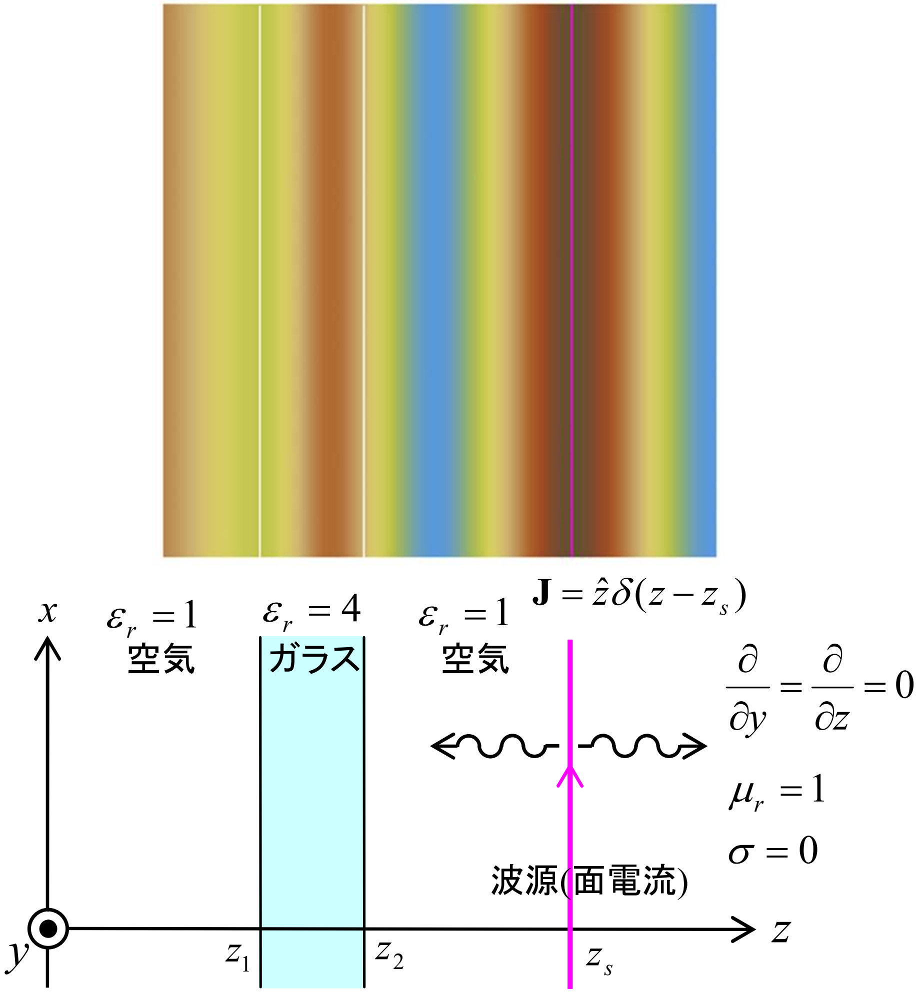
$$= -\hat{x}\frac{\partial A_y}{\partial z} + \hat{y}\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

1次元問題の例 (電界分布)

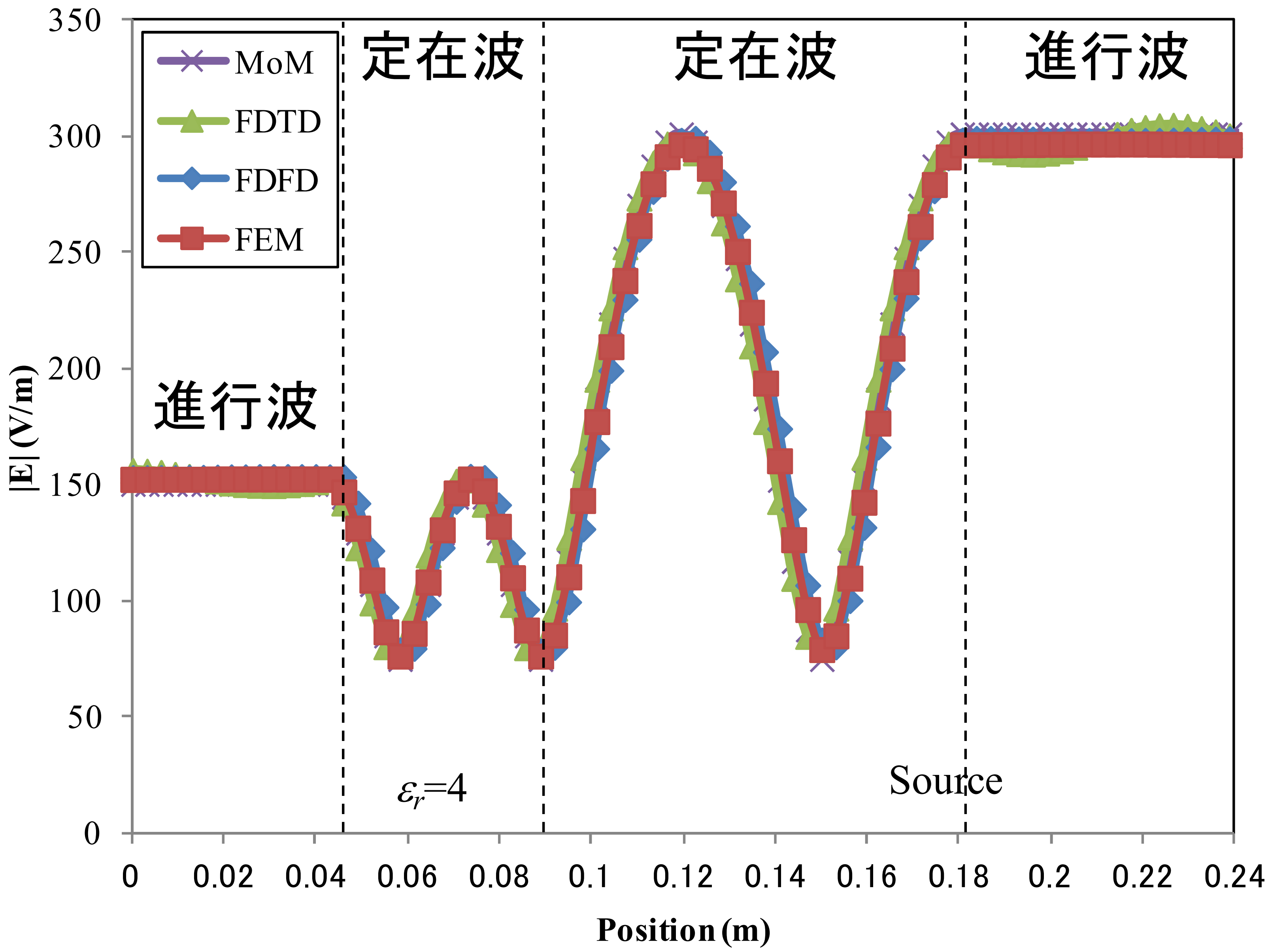




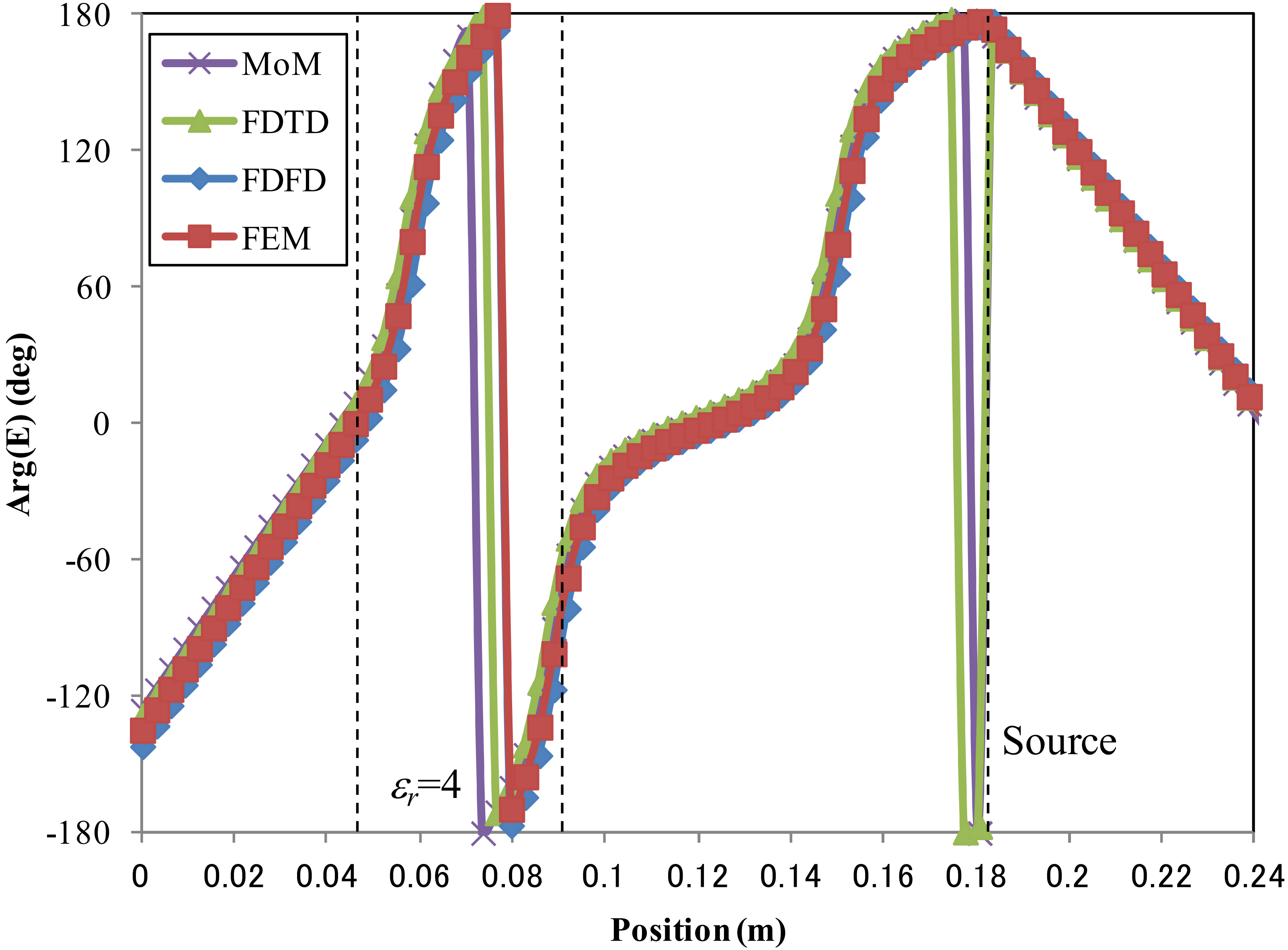
1次元問題の解析結果


x
$\varepsilon_r = 1$
空気
$\varepsilon_r = 4$
ガラス
$\varepsilon_r = 1$
空気
$\mathbf{J} = \hat{z}\delta(z - z_s)$
$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$
$\mu_r = 1$
$\sigma = 0$
波源(面電流)
y
z_1
z_2
z_s
z

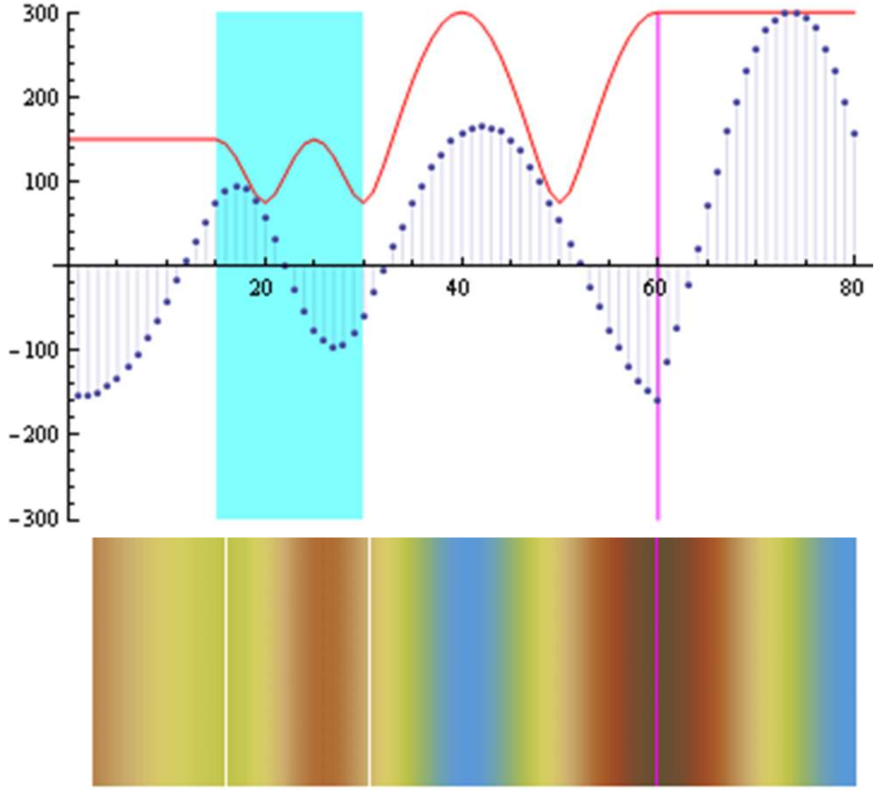
Result: Amplitude of E-field

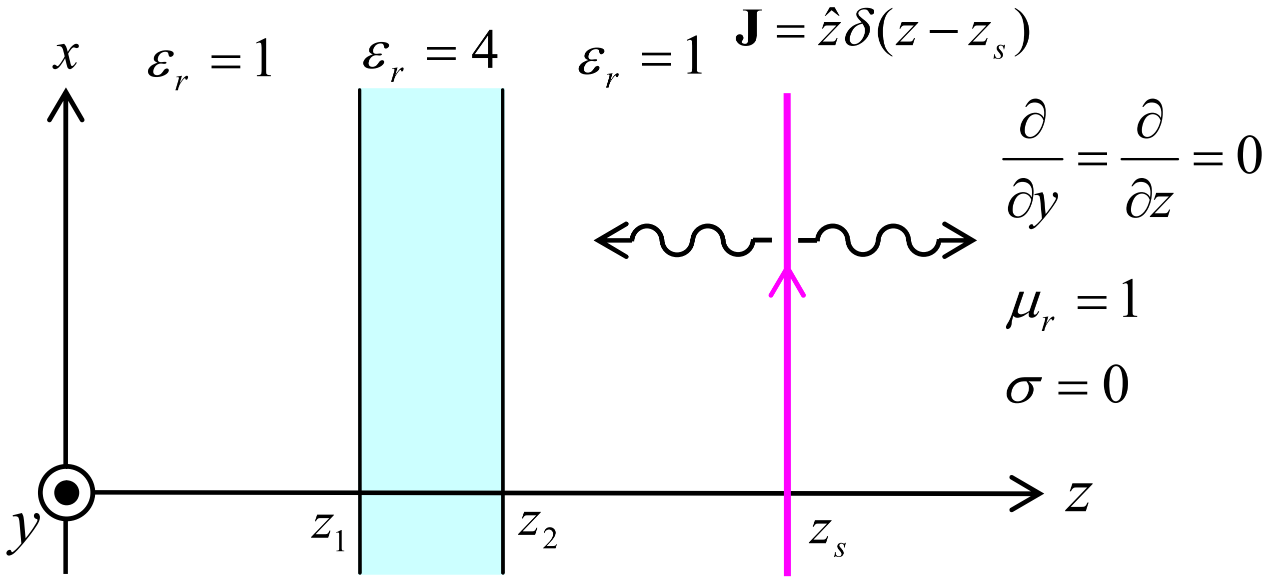


Result: Phase of E-field

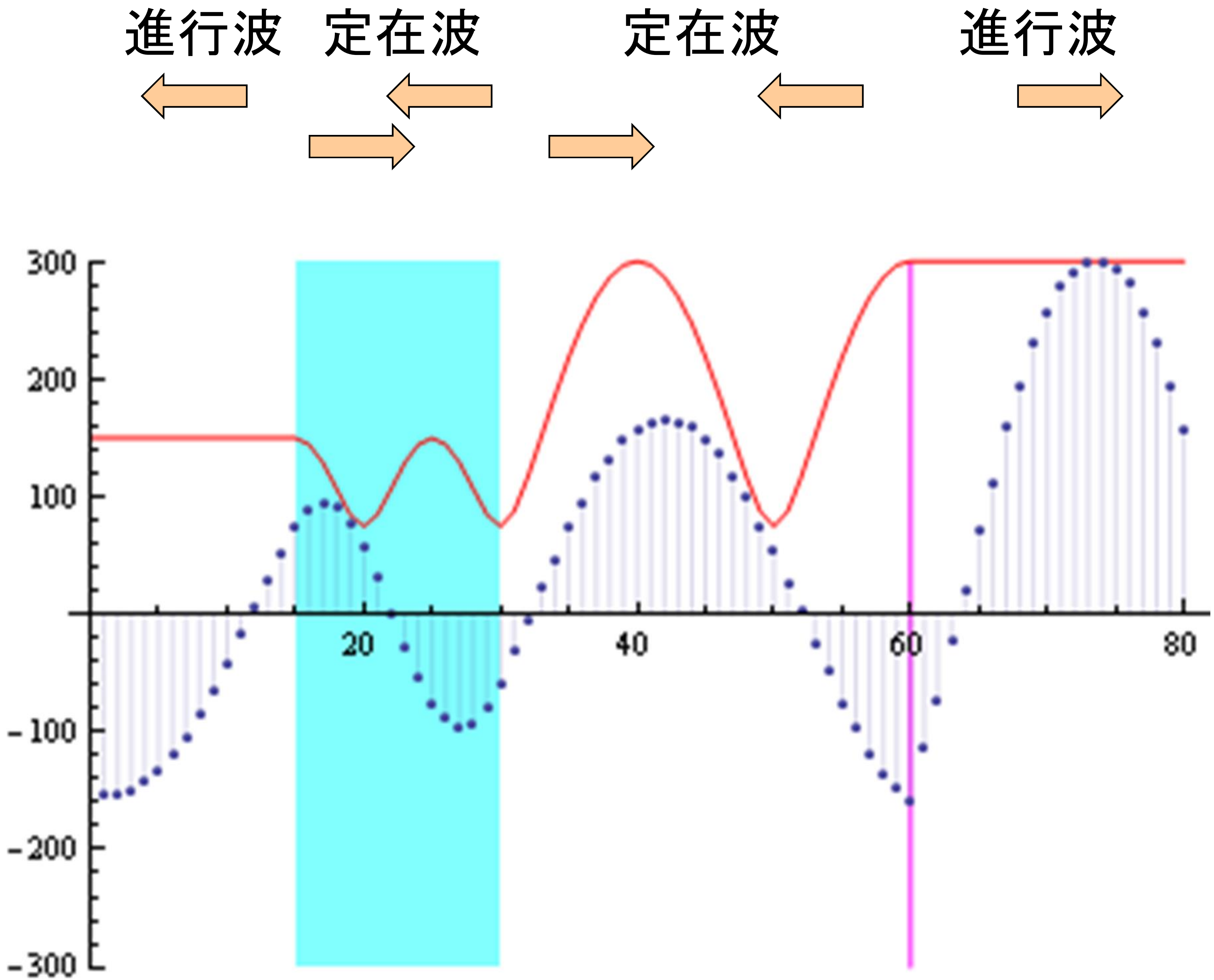


Result: 電界強度分布アニメーション

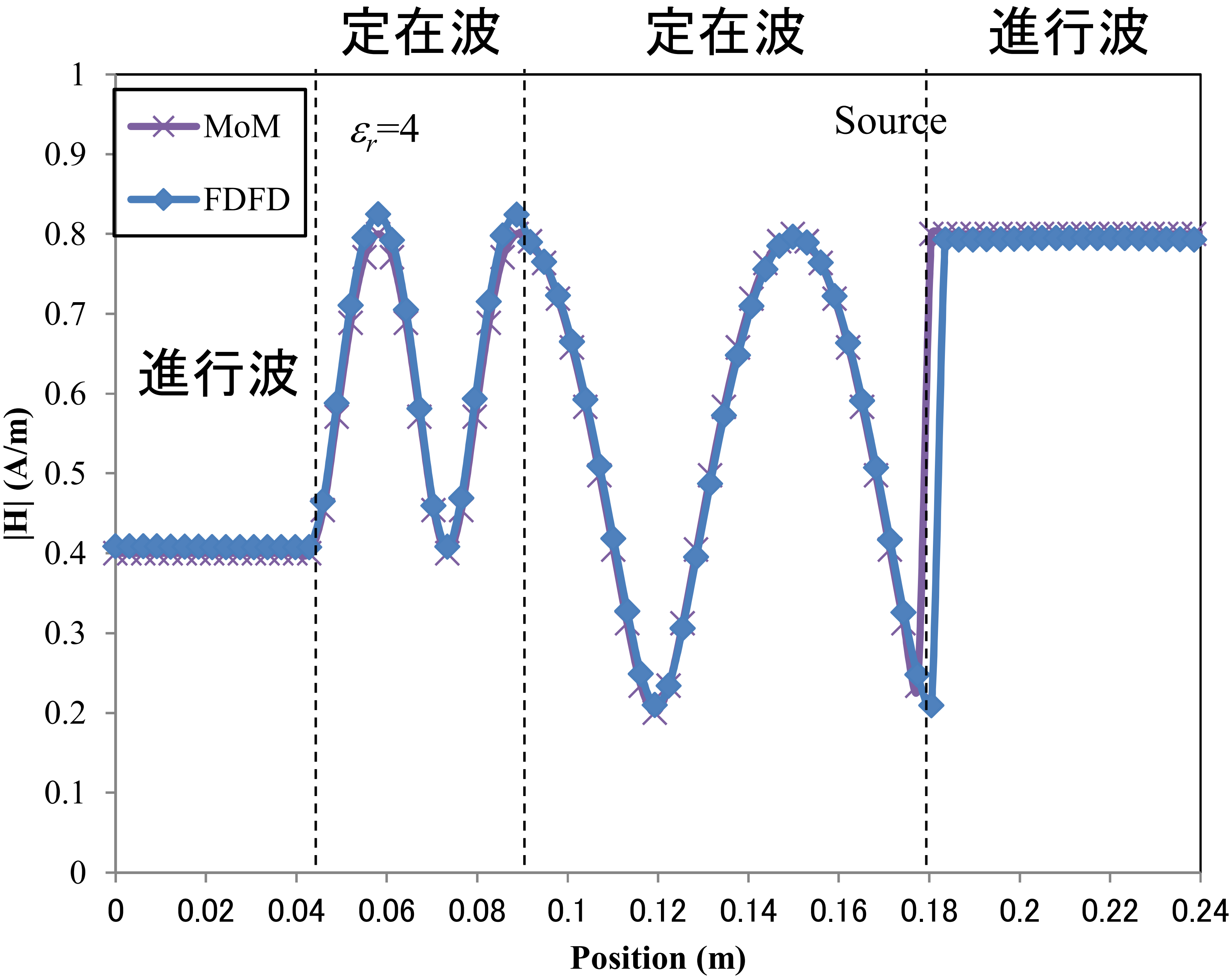




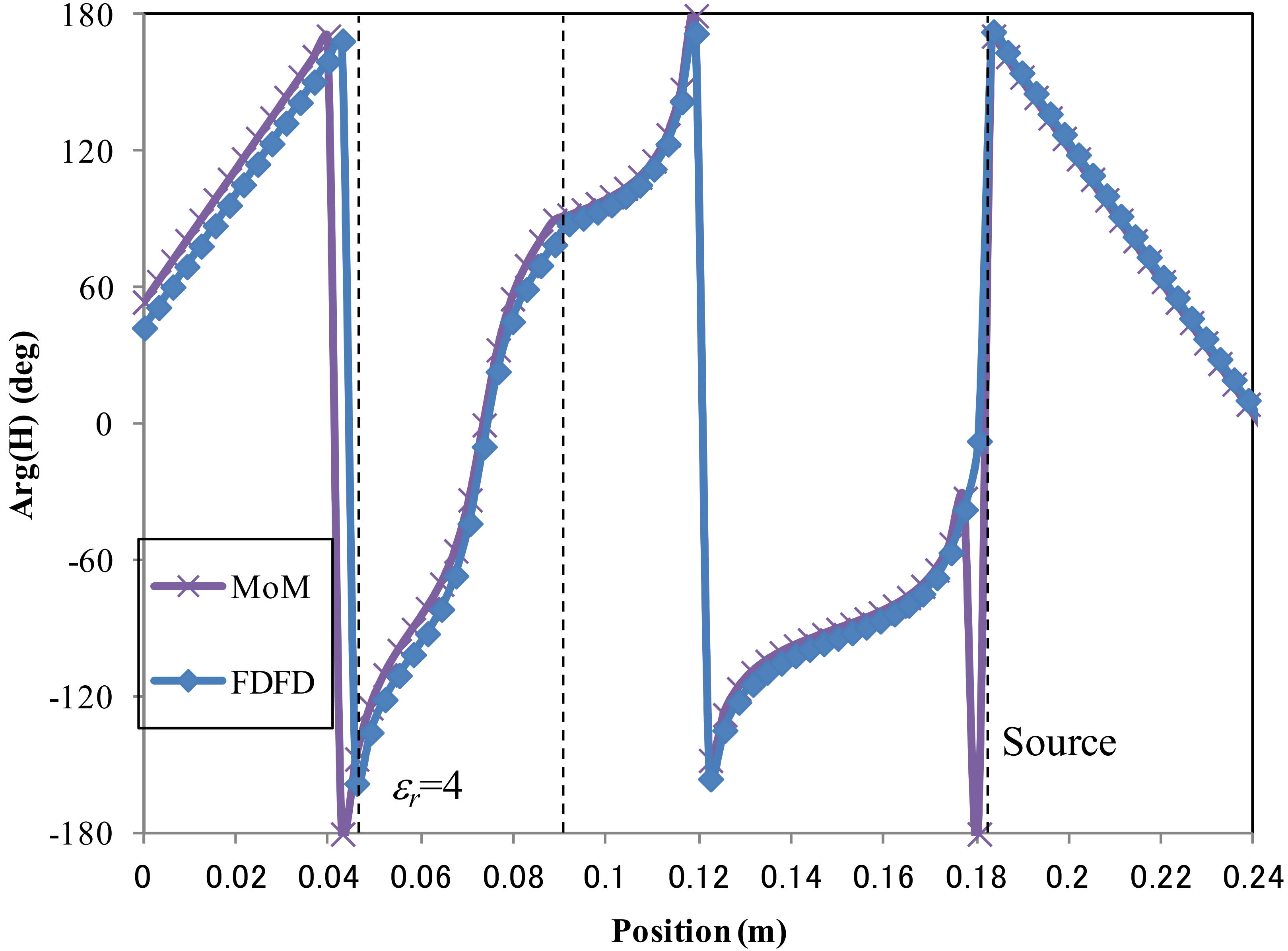
Result: Time-Varying Animation of E-field



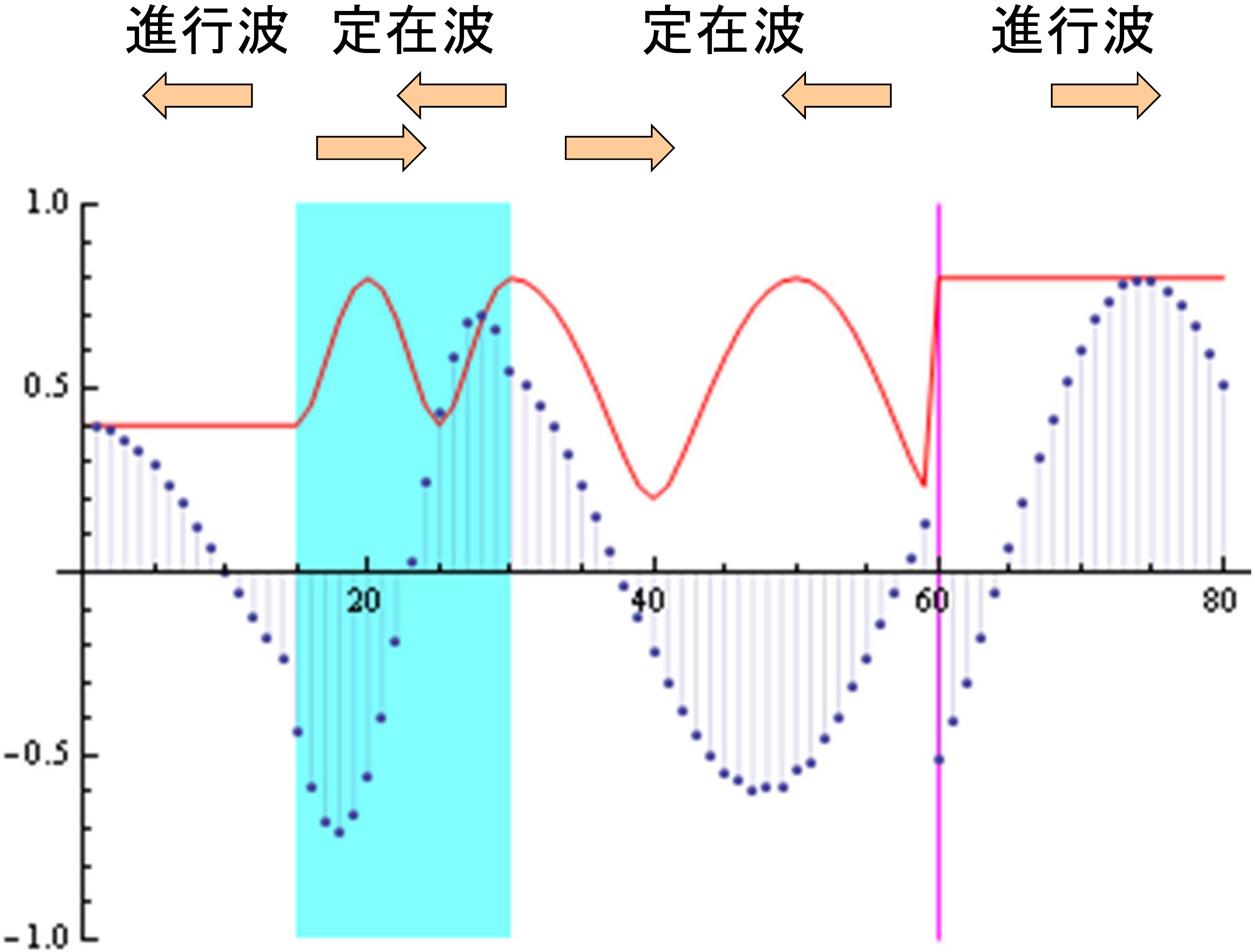
Result: Amplitude of H-field



Result: Phase of H-field



Result: Time-Varying Animation of H-field

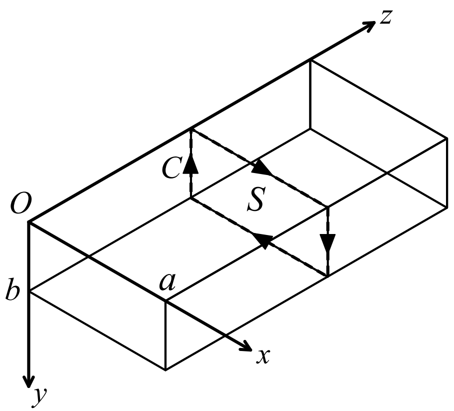


方形導波管のTEモードのFEM解析

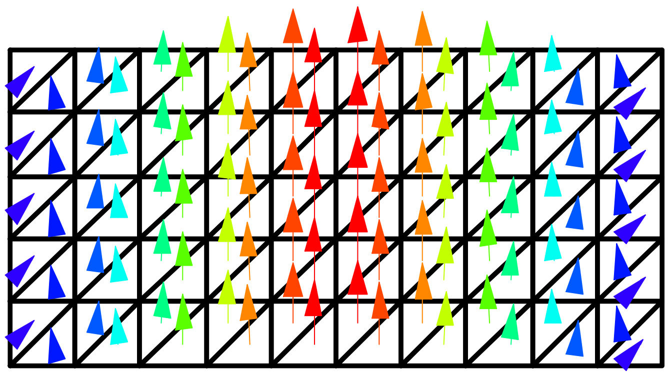
カットオフ周波数

fcu (GHz)

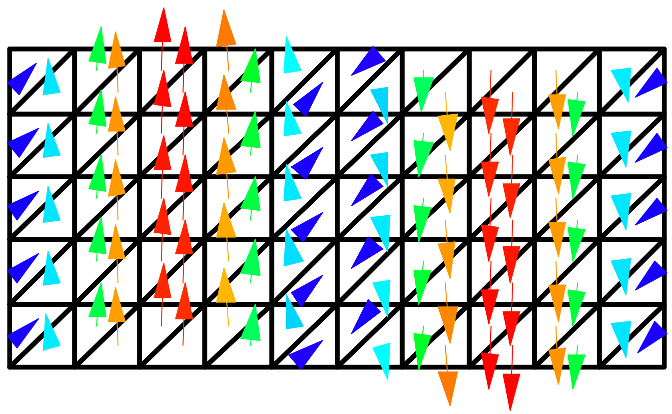
Analytic	FEM
(1,0): 2.58	Mode1: 2.58
(0,1): 5.15	Mode2: 5.13
(2,0): 5.16	Mode3: 5.30
(1,1): 5.76	Mode4: 5.92



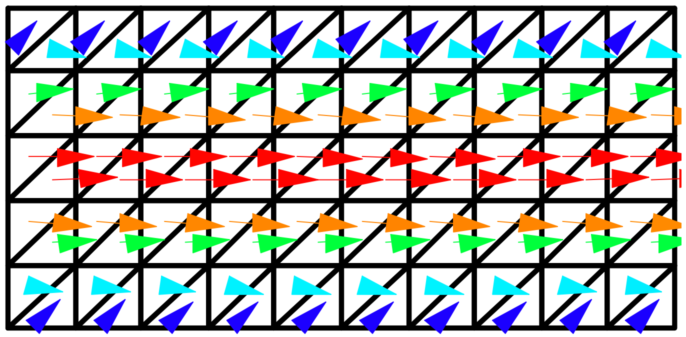
Mode1



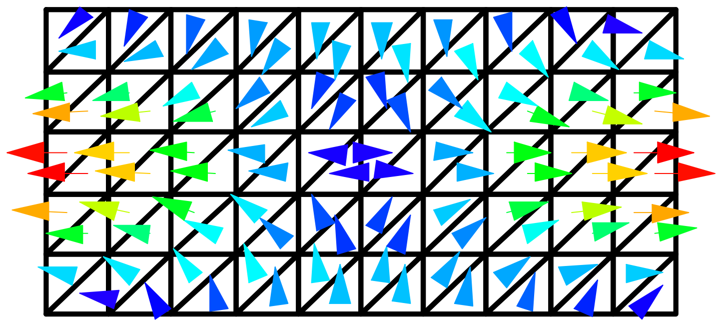
Mode2



Mode3



Mode4



高次モードではより多くのメッシュ分割が必要

散乱界表示

incident

total scattered

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}^t = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^t = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s \end{cases}$$

入射界と散乱界の和に分解する

Maxwell方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \nabla \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s) = -\mu \dfrac{\partial (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s)}{\partial t} \\ \nabla \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s) = \mathbf{i} + \varepsilon \dfrac{\partial (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s)}{\partial t} \end{cases}$$

Incident成分は真空中のMaxwell方程式を満足する（と仮定）

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}^i = -\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{H}^i}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}^i = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} \end{cases}$$

散乱界表示

$$
\begin{cases}
\nabla\times\mathbf{E}^s = -\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}^s}{\partial t} - \nabla\times\mathbf{E}^i - \mu\dfrac{\partial\mathbf{H}^i}{\partial t} \\
\nabla\times\mathbf{H}^s = \mathbf{i} + \varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}^s}{\partial t} - \nabla\times\mathbf{H}^i + \varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}^i}{\partial t}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\nabla\times\mathbf{E}^s = -\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}^s}{\partial t} \underbrace{- \nabla\times\mathbf{E}^i - \mu_0\dfrac{\partial\mathbf{H}^i}{\partial t}}_{=0} - (\mu-\mu_0)\dfrac{\partial\mathbf{H}^i}{\partial t} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mu-\mu_0 \\
\nabla\times\mathbf{H}^s = \mathbf{i} + \varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}^s}{\partial t} \underbrace{- \nabla\times\mathbf{H}^i + \varepsilon_0\dfrac{\partial\mathbf{E}^i}{\partial t}}_{=0} + (\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{\partial\mathbf{E}^i}{\partial t}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\nabla\times\mathbf{E}^s = -\overbrace{\boxed{(\mu-\mu_0)\dfrac{\partial\mathbf{H}^i}{\partial t}}}^{m'} - \mu\dfrac{\partial\mathbf{H}^s}{\partial t} \\
\nabla\times\mathbf{H}^s = \underbrace{\boxed{\left\{\mathbf{i} + (\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{\partial\mathbf{E}^i}{\partial t}\right\}}}_{i'} + \varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}^s}{\partial t}
\end{cases}
$$

散乱界表示では入射平面波は等価的な電磁流源として扱える

$\mu = \mu_0$ ならば$m' = 0$

参考資料: 磁流について（電流との双対性）

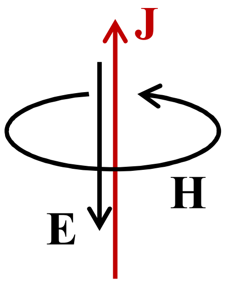
磁流はMoMでも必須の概念

$$
\begin{cases}
\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

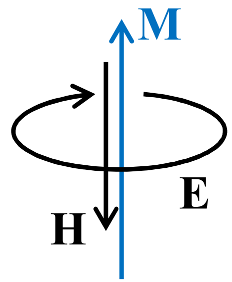
磁流は実際には存在しないが、数式として導入すると界等価定理の表面磁流
M=E×n (表面電流: **J=n×H**)を扱う上で有益である。

次のように文字を入れ替えると**E**, **H**が**J**による放射の式と同形になる（双対性）ので、
Mからの放射の特性は**E**, **H**を次のように入れ替えたものと理解できる。

$$
\boxed{\mathbf{E} \to \mathbf{H} \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E} \quad \mathbf{J} \to \mathbf{M} \quad \varepsilon \to \mu \quad \mu \to \varepsilon}
$$



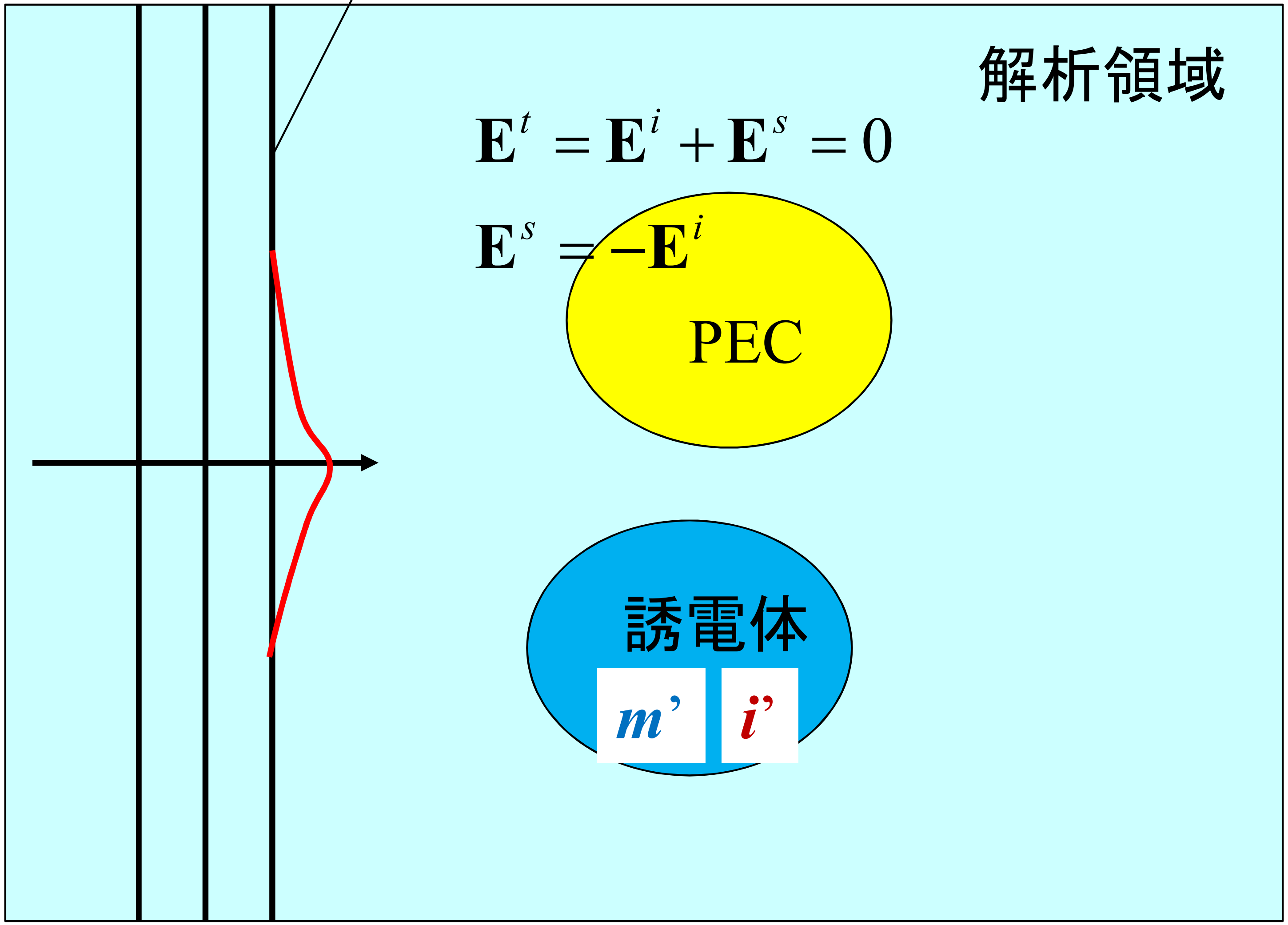
$$
\begin{cases}
\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{cases}
\xrightarrow{\text{文字の置換}}
\begin{cases}
\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
-\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{M} + \mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}
\end{cases}
$$



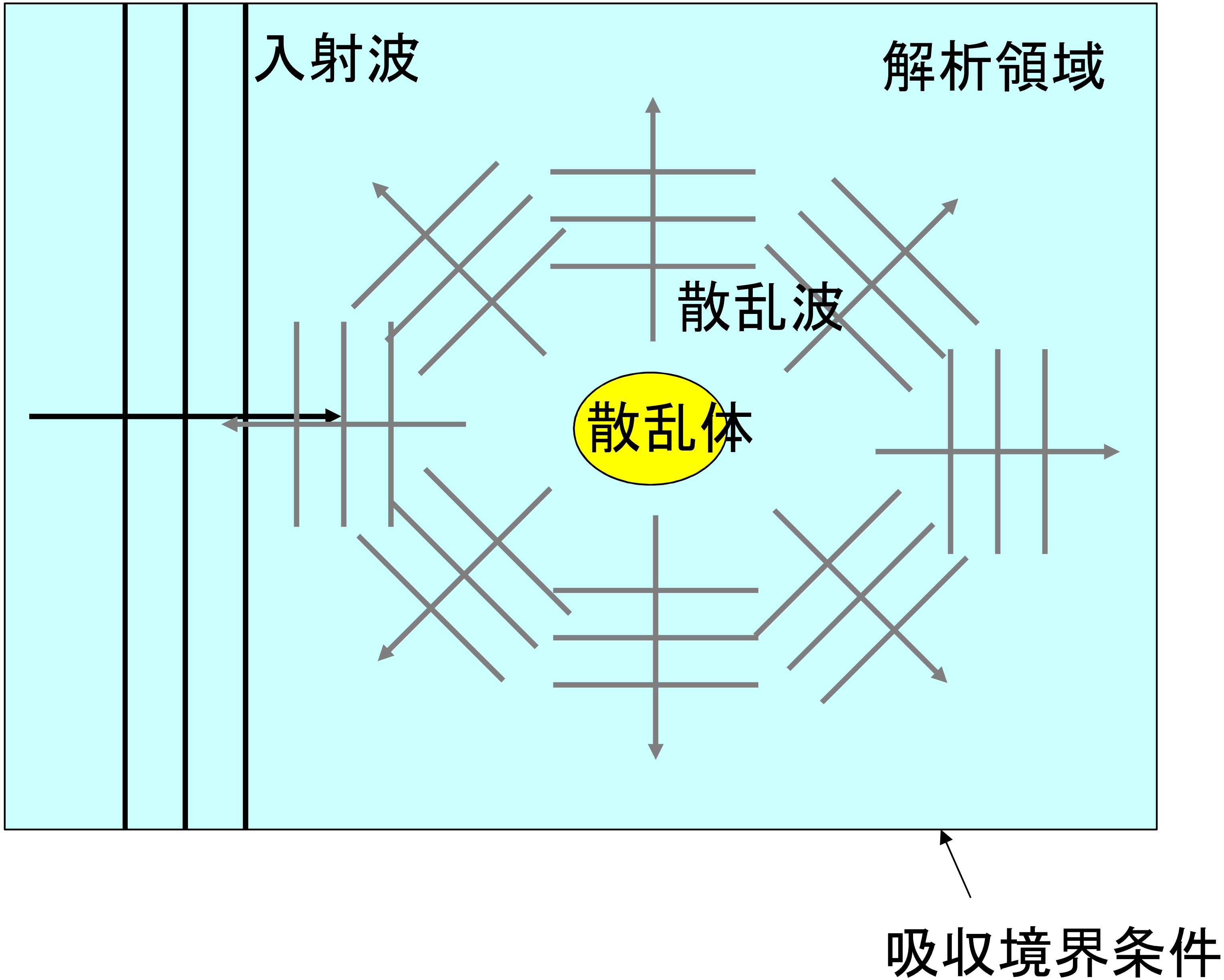
Mが**H**, **-E**を作るのはμとεを交換した上で、
Jが**E**, **H**を作るのと同様になる。

ビーム入射

入射波　広がった平面波でも、収束したビームも可

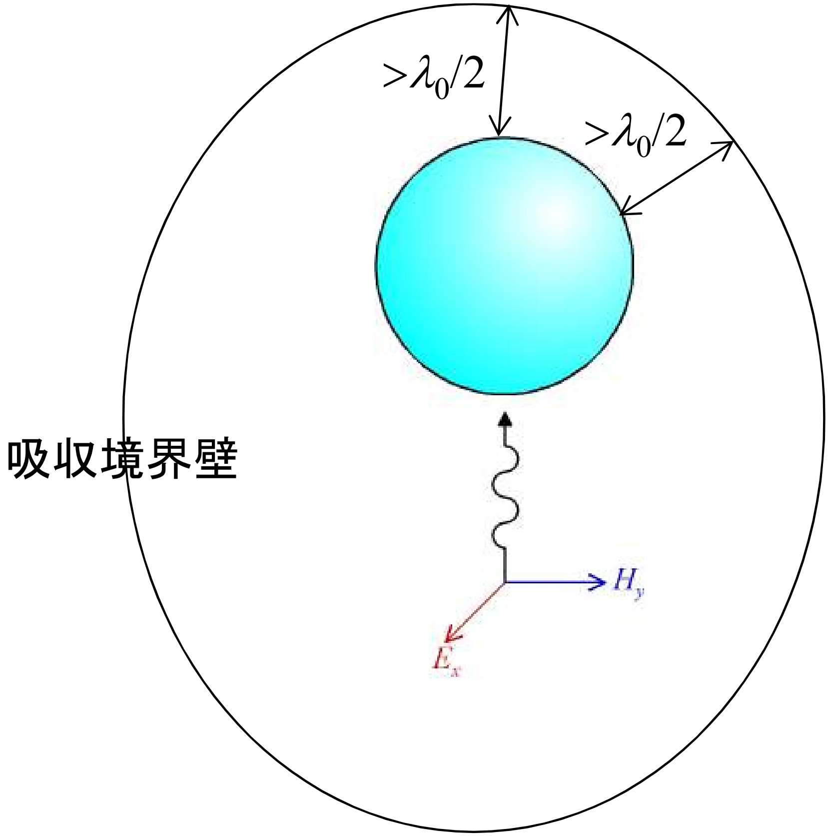


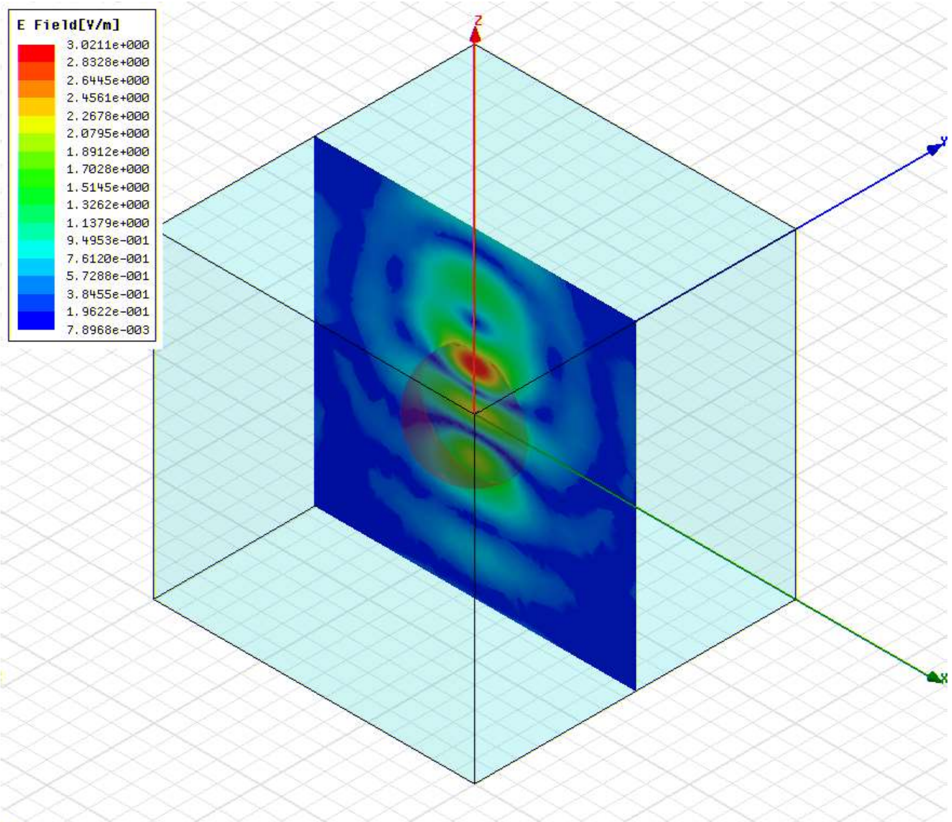
散乱界表示の必要性



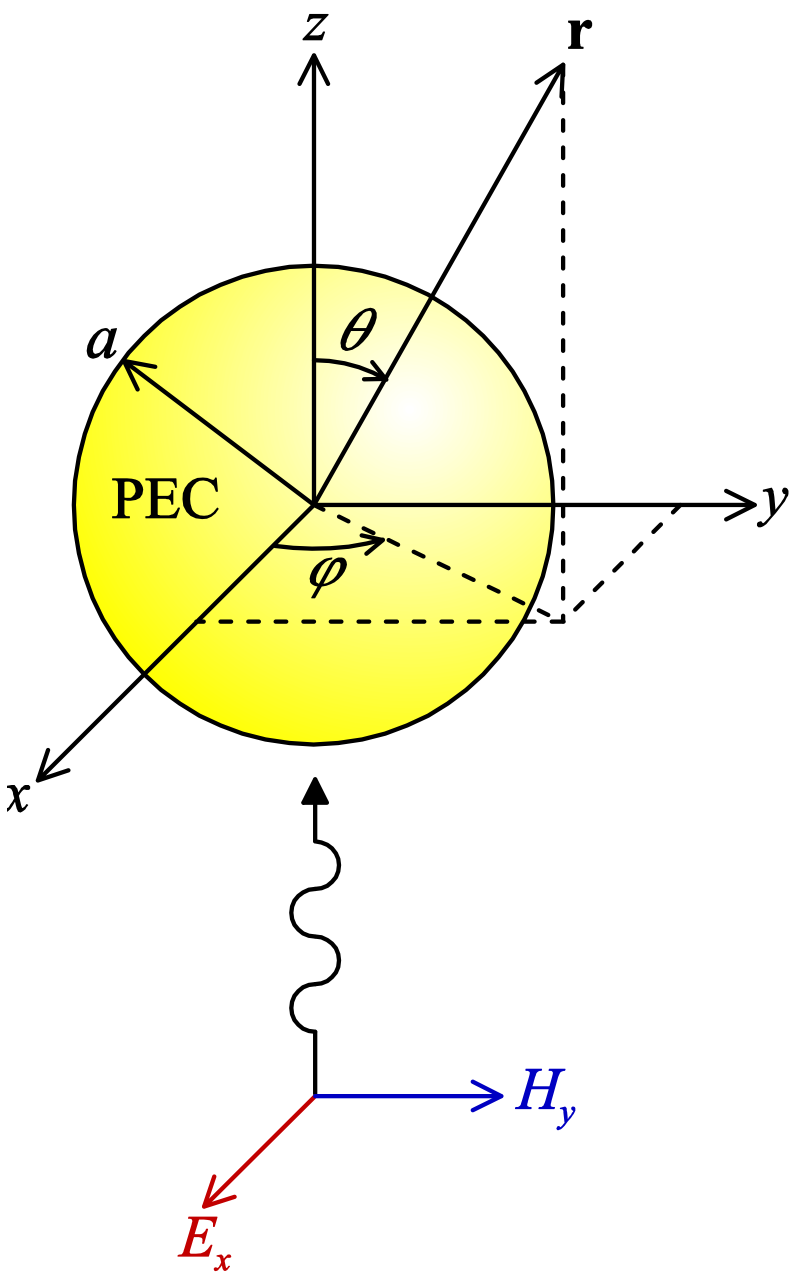
励振方法: 平面波入射

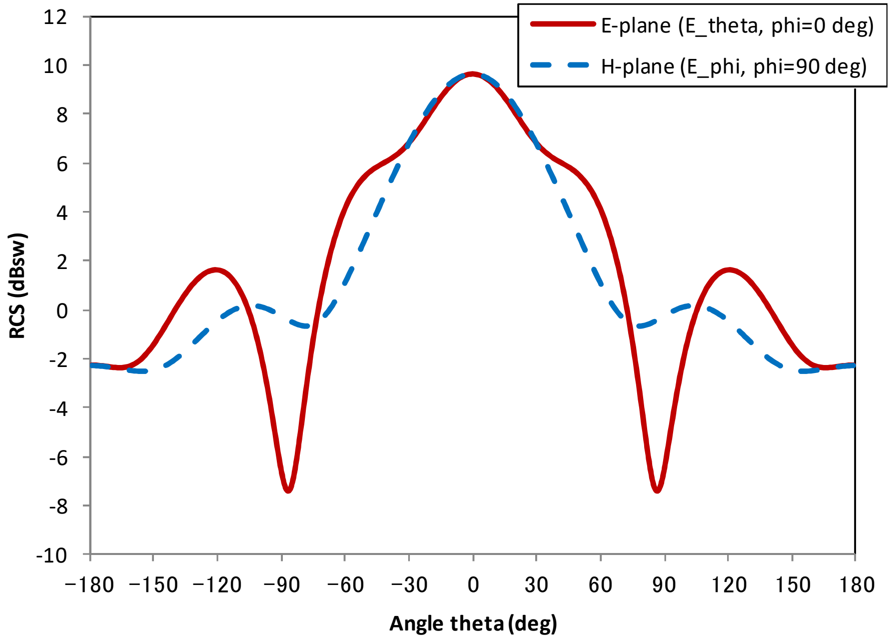
- 平面波入射の場合は、物体から吸収境界壁までの距離は1/2波長程度以上離す。
- RCS (Radar Cross Section)解析に使われる。

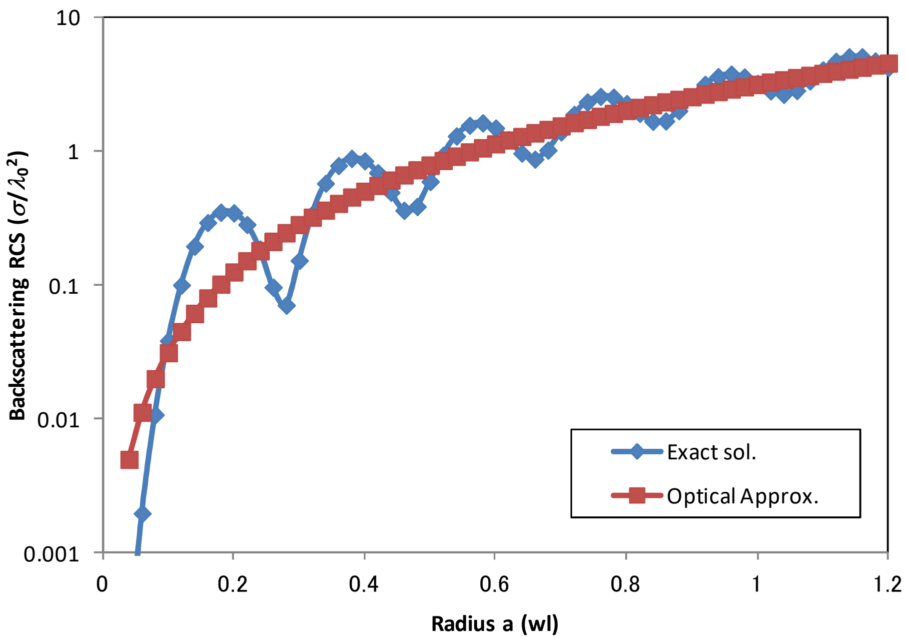




導体球による平面波の散乱







RCSについて

RCS(RADAR Cross Section), レーダー断面積, 散乱断面積

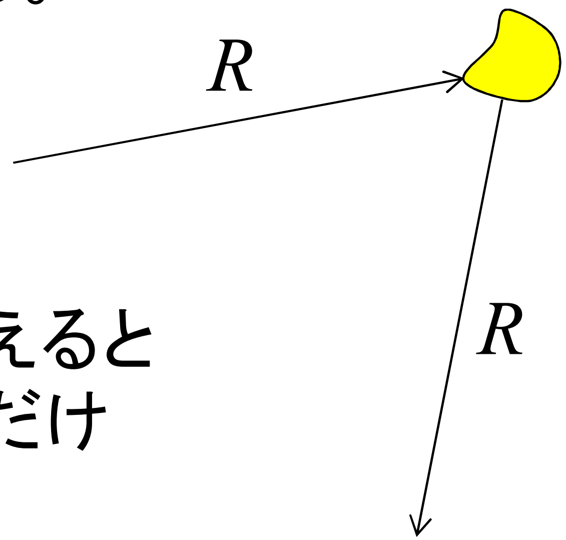
$$\sigma = \lim_{R\to\infty}\left[4\pi R^2 \frac{\left|\mathbf{E}^s\right|^2}{\left|\mathbf{E}^i\right|^2}\right] = \lim_{R\to\infty}\left[4\pi R^2 \frac{\left|\mathbf{H}^s\right|^2}{\left|\mathbf{H}^i\right|^2}\right] \quad [\mathrm{m}^2]$$

デシベル→ $10\log_{10}\sigma \quad [\mathrm{dBsm}]$

$10\log_{10}(\sigma/\lambda_0{}^2) \quad [\mathrm{dBsw}]$

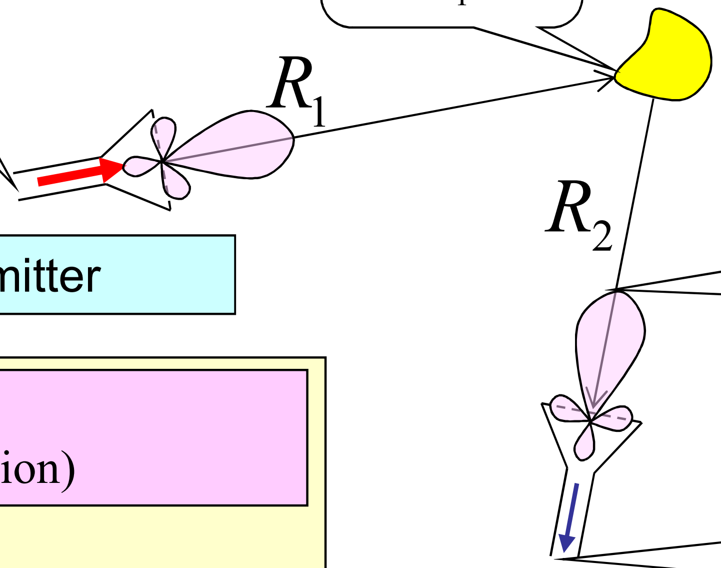
σは入射および散乱角度（方向）の関数となる。

$$\left|\mathbf{E}^s\right|^2 = \frac{\left|\mathbf{E}^i\right|^2}{4\pi R^2}$$



のとき、等方性となり、全角度の最大値を考えるとσは最小の1となる。σはそれに対して、どれだけ大きいかという指標を与える。

レーダー方程式 (Radar Range Equation)



レーダー方程式
(Radar Range Equation)

$$\frac{P_r}{P_t} = \sigma G_t G_r \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{\lambda}{R_1 R_2} \right)^2$$

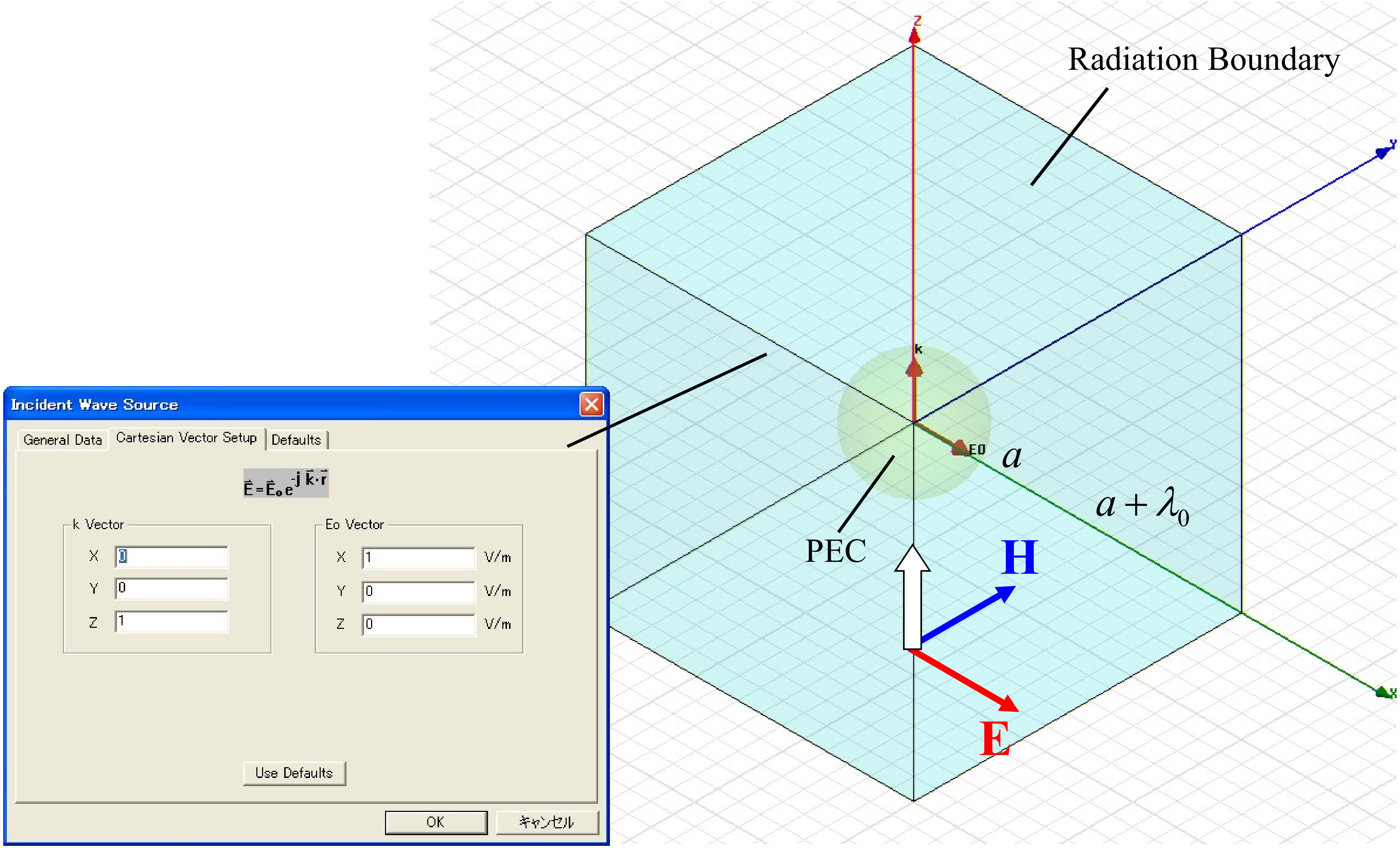
送受信電力の関係

$$A_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

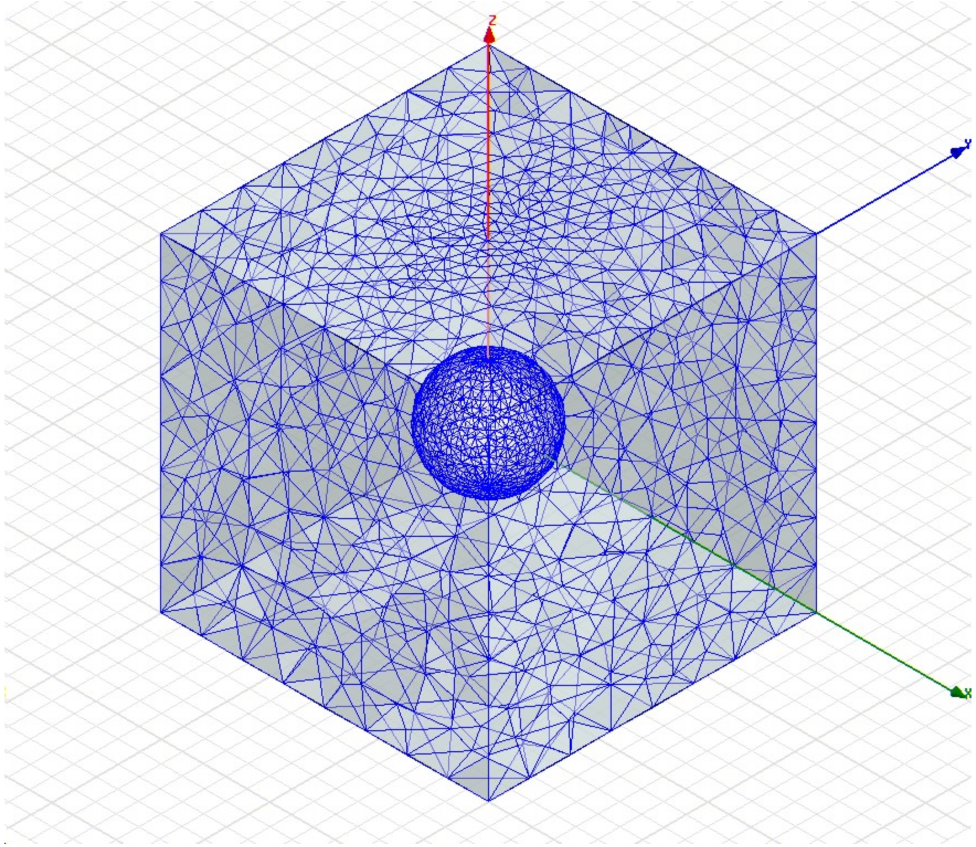
C.A. Balanis: Antenna Theory,
John Wiley & Sons, Inc., pp.88-98,1997.

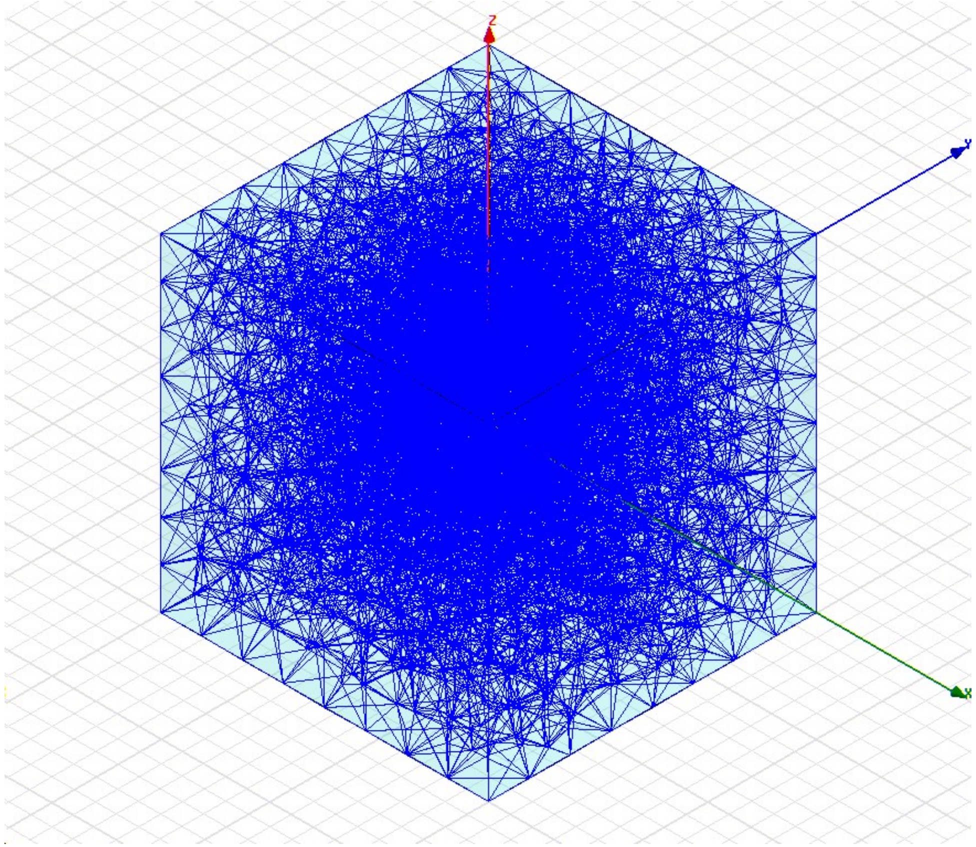
$$P_r\big|_{dB} - P_t\big|_{dB} = G_t\big|_{dB} + G_r\big|_{dB} + \sigma\big|_{dB\,\mathrm{sm}} - 10\log_{10}\left((4\pi)^3 \left(\frac{R_1 R_2}{\lambda} \right)^2 \right)$$

Analysis Model

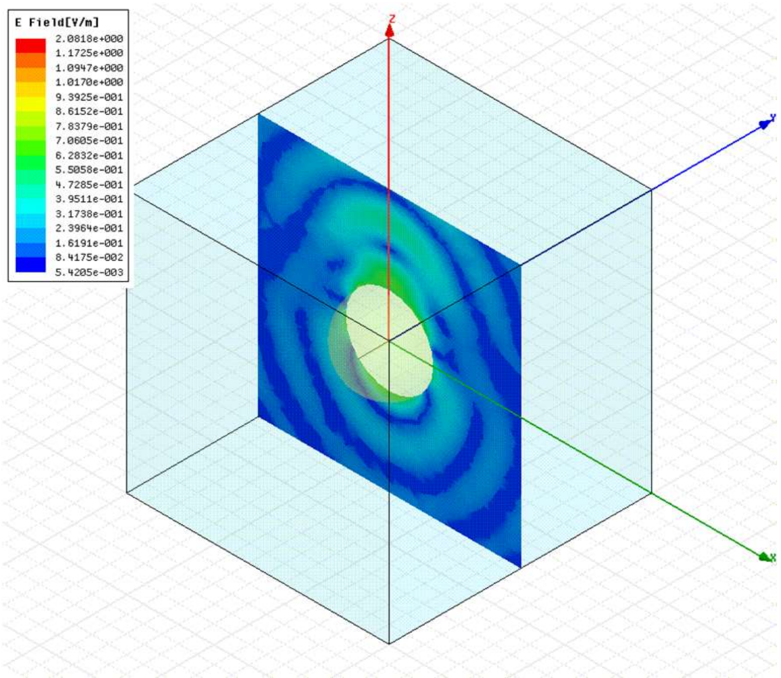


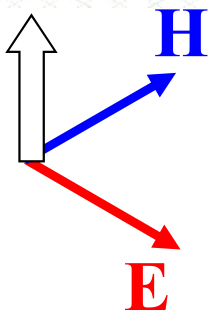
Mesh

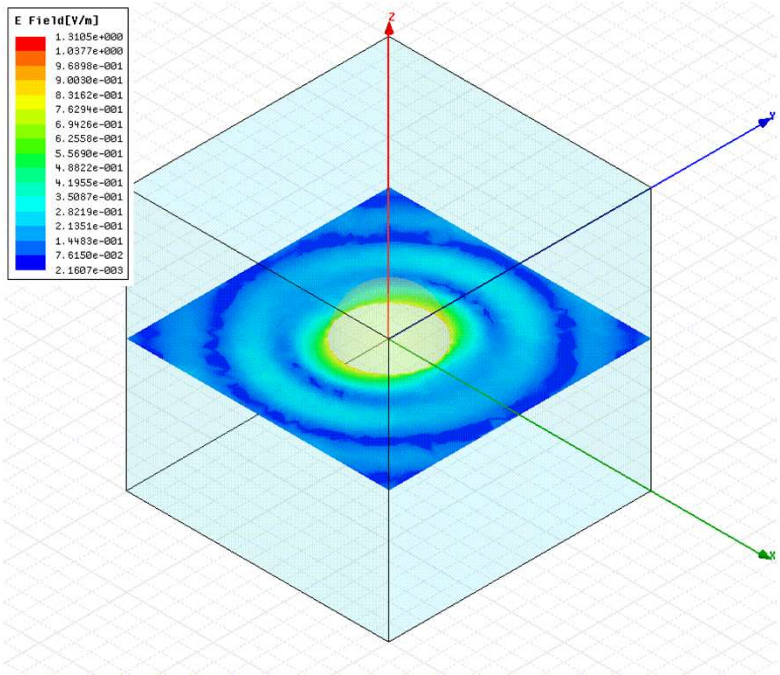


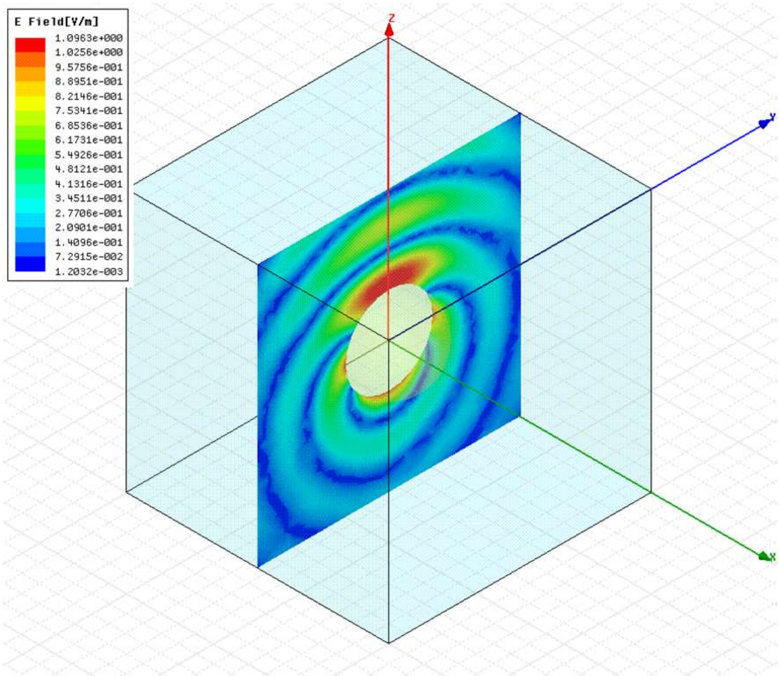


Scattered Field (Animation)

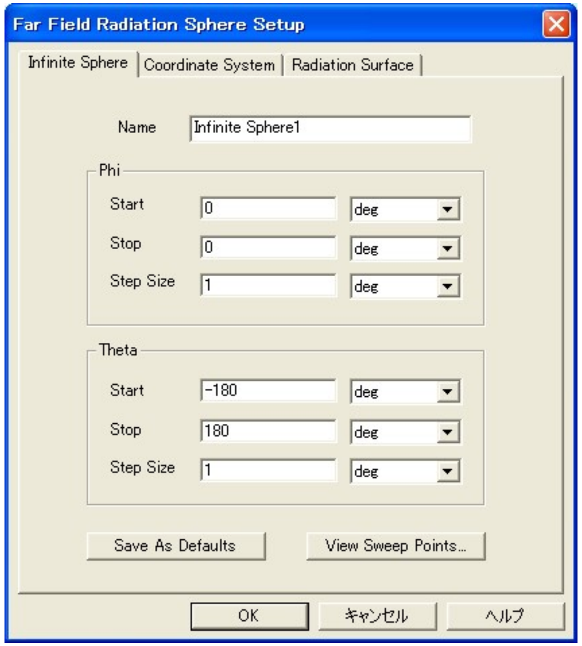


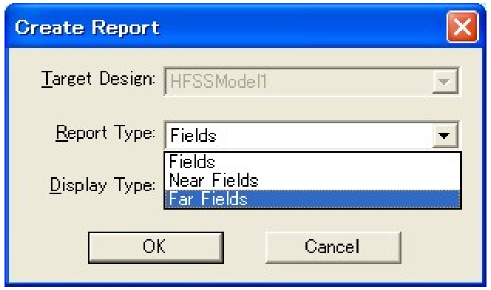


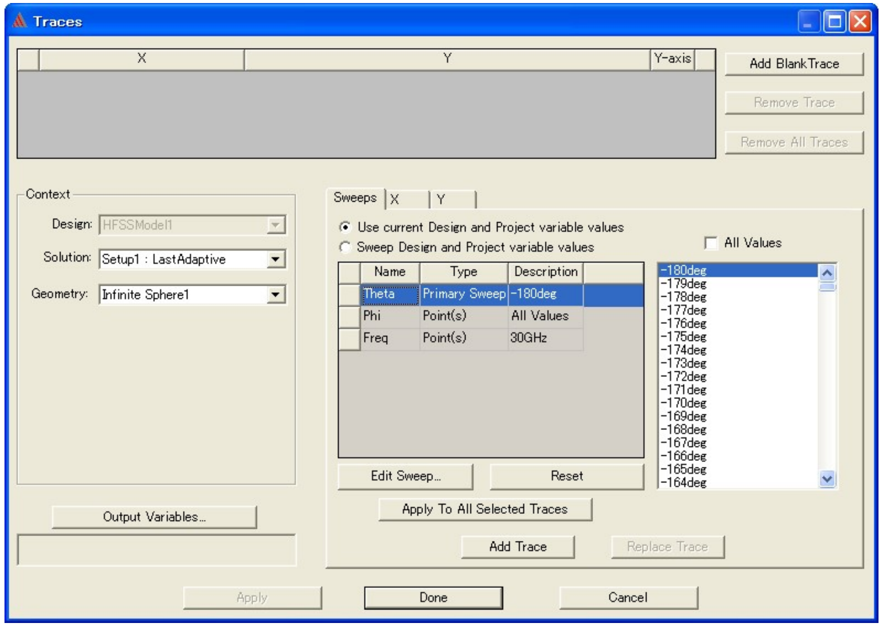


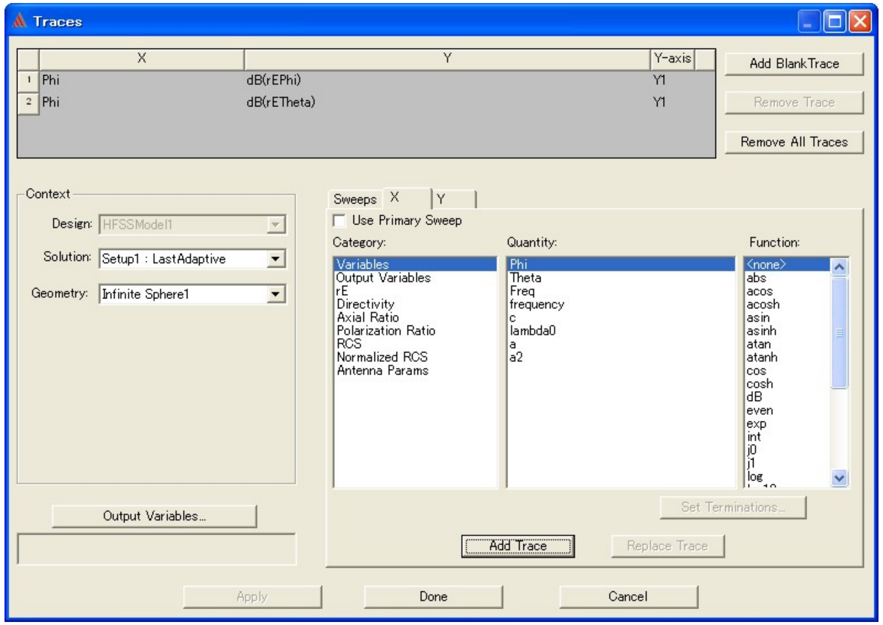


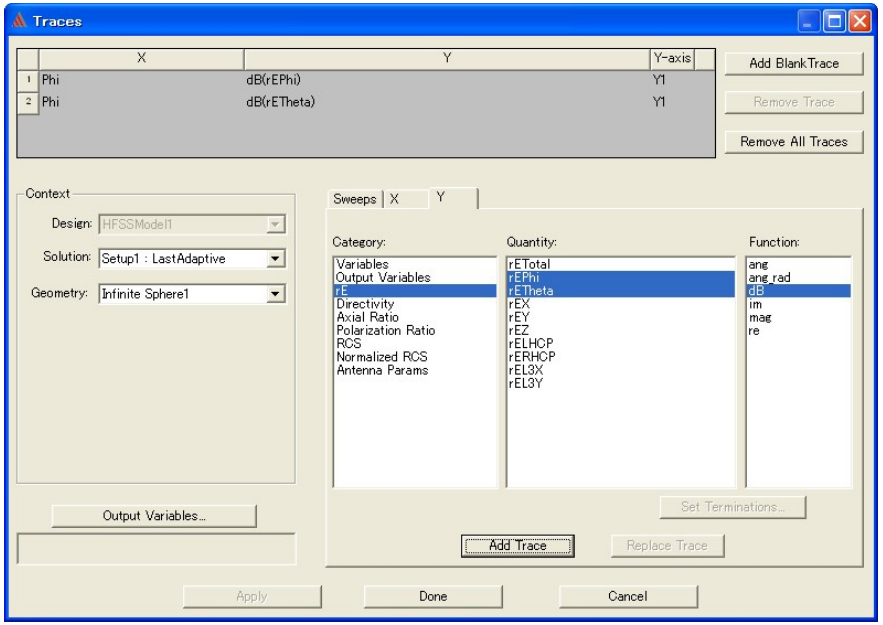
Far Field Radiation Pattern Setup



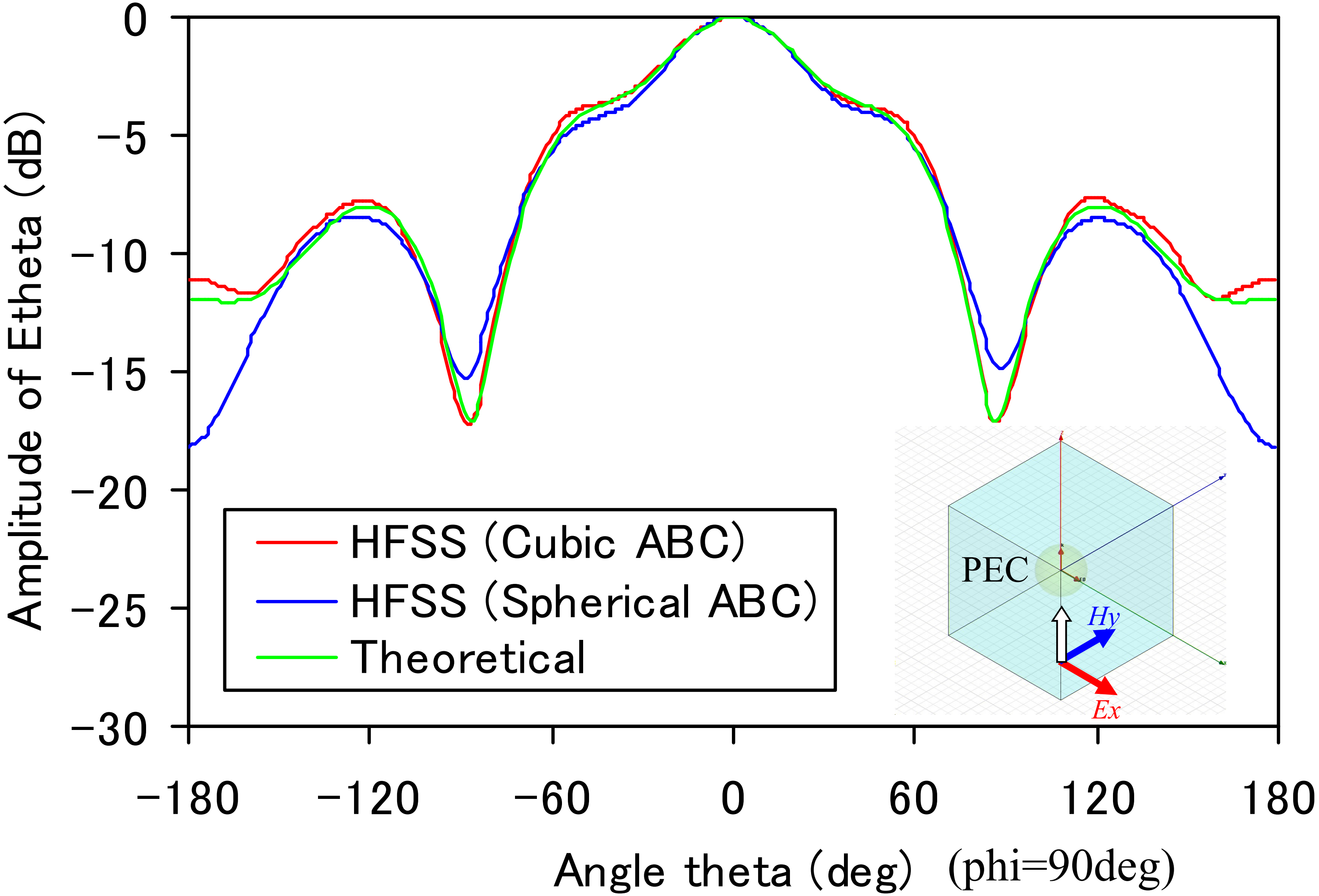






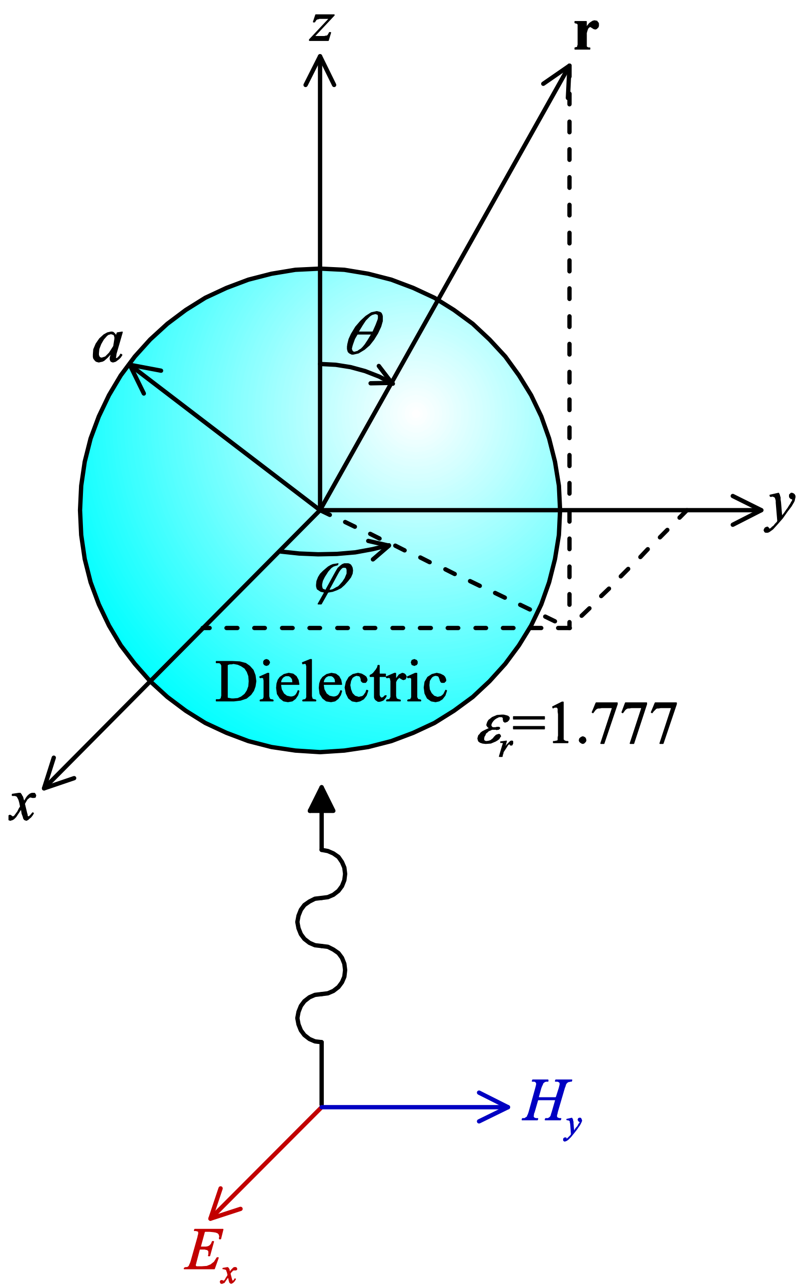


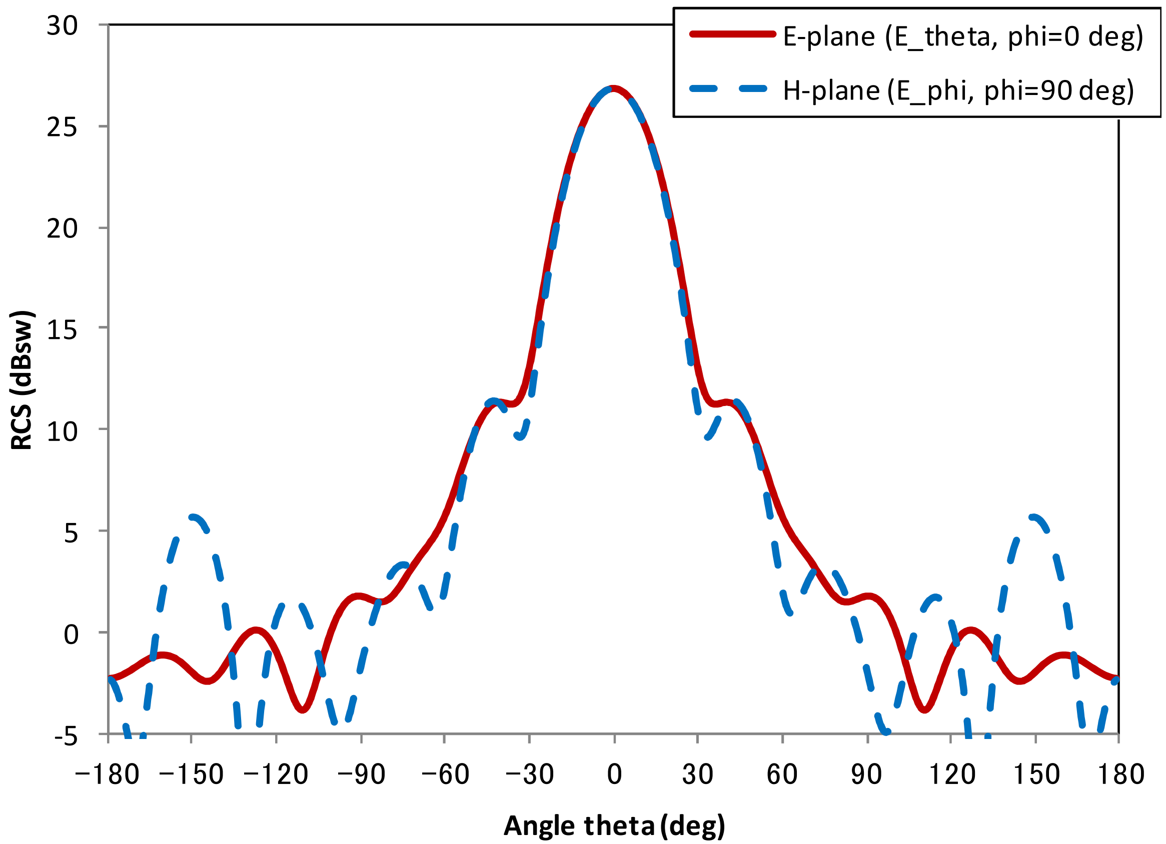
Far Field Scattered Pattern



Cubic ABC is better than Spherical one?

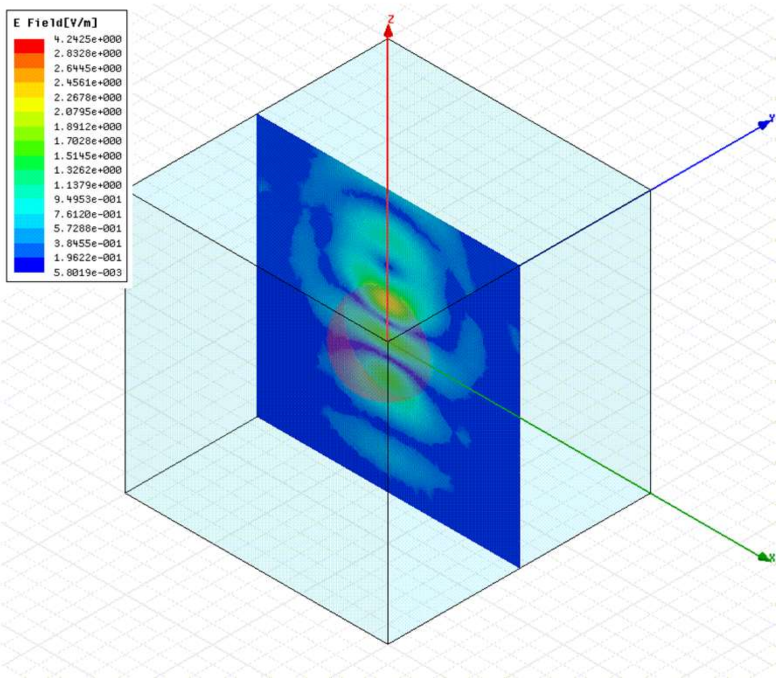
誘電体球による平面波の散乱

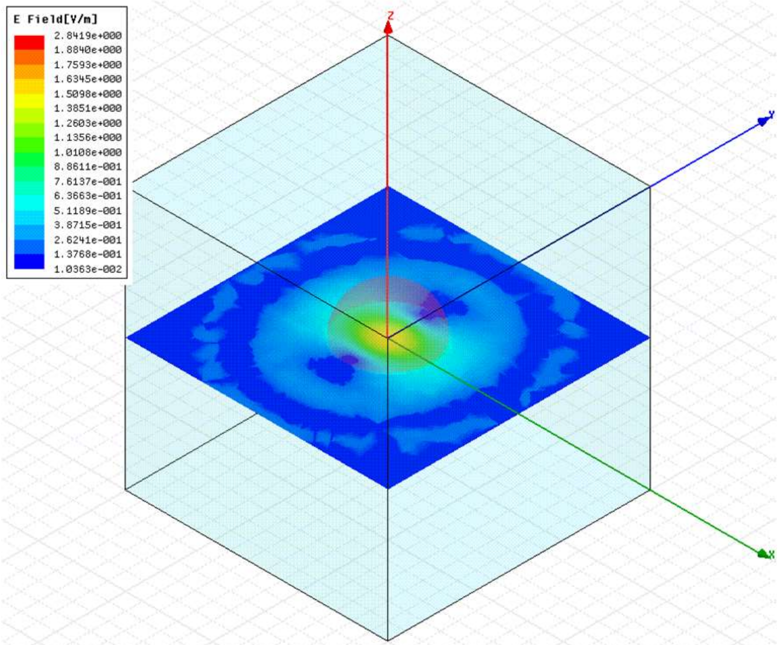


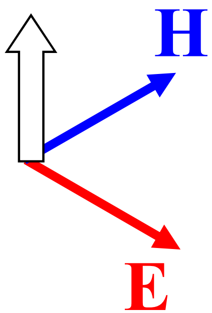


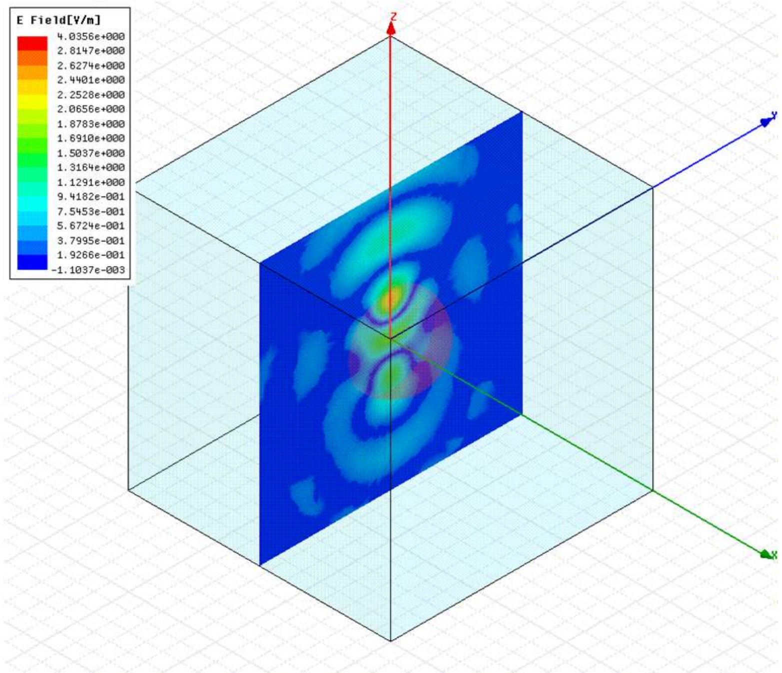
Scattered Field (Animation)

$\varepsilon_r = 4$

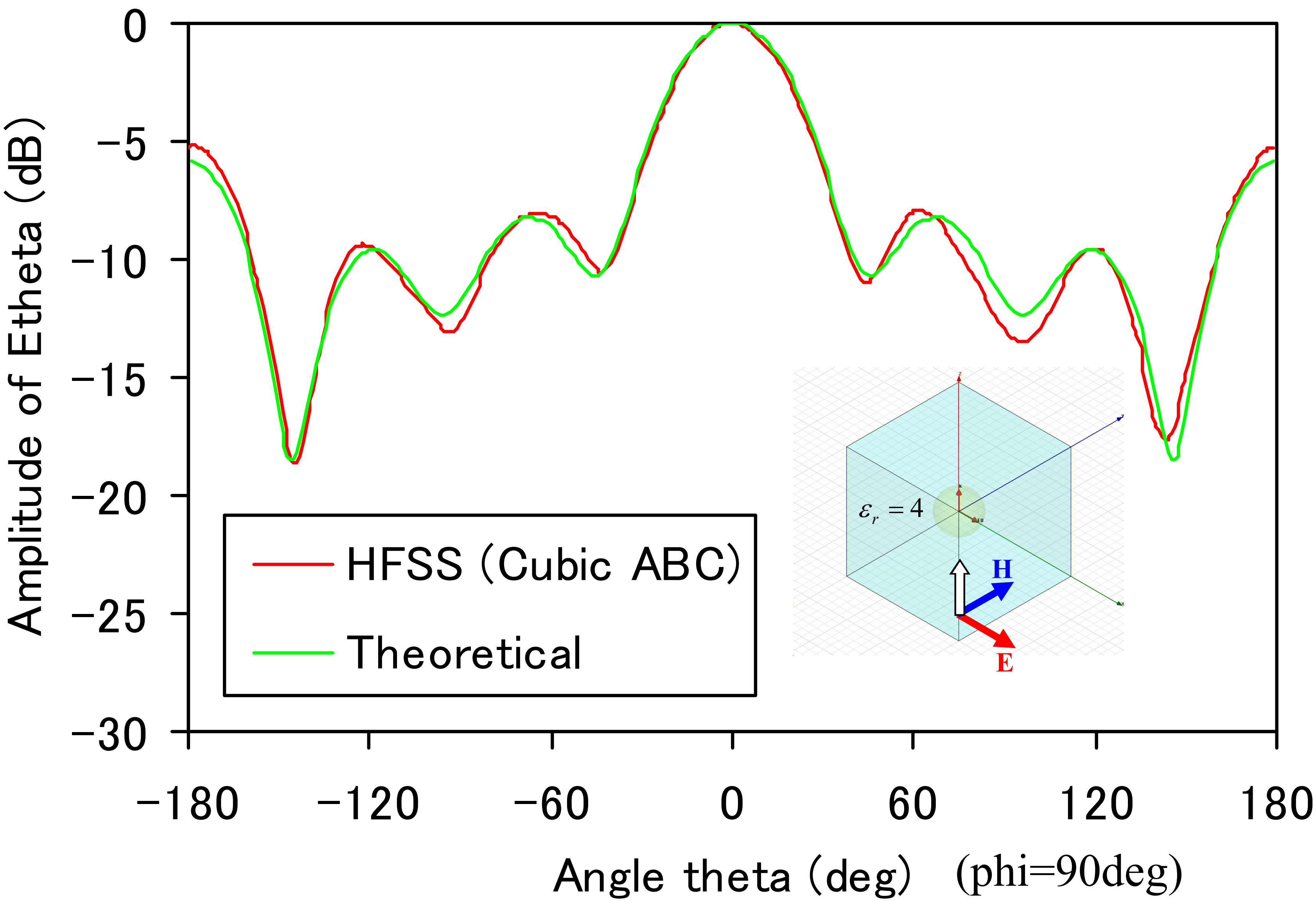






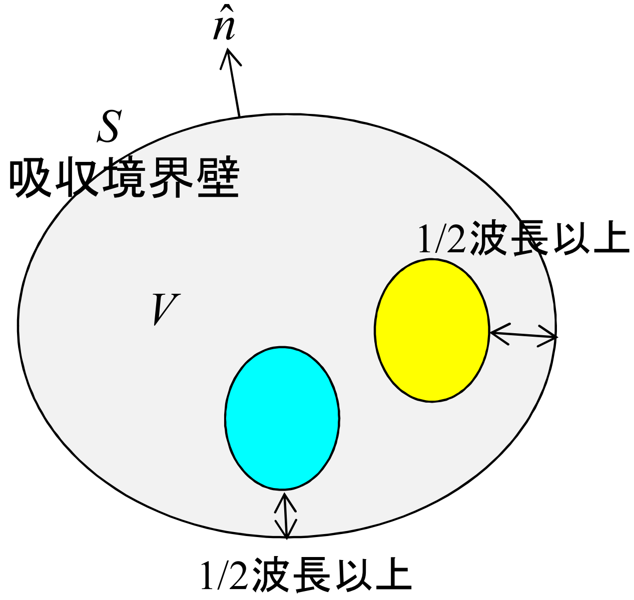


Far Field Scattered Pattern



吸収境界条件

- FEMはこのように全空間にメッシュを切るので、放射するような開放空間を扱うには吸収境界条件(ABC, Absorbing Boundary Condition)を用いる必要がある。
- 物体からABCまでの距離は1/2波長以上離す必要がある。
- ABCは平面波をうまく吸収するように出来ているので、なるべく離した方が良いが、あまり空間を大きくすると無駄に計算時間がかかるのでトレードオフとなる。



その他境界条件

■電気壁 (PEC)･･･電界の接線成分が0

■磁気壁 (PMC)･･･磁界の接線成分が0

・対称構造の解析領域の削減などで用いる

■表面インピーダンス

・導電率が大きな有限値で、表皮厚が薄くて波長が非常に短い導体内部を解析するかわりに表面インピーダンス近似を用いる。

・波長に比して微小なコルゲーション構造などの解析に用いる。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \qquad R_s = \frac{2}{\delta\sigma}$$

■周期境界壁

・周期構造の1周期の解析に用いる。

・大規模アレーアンテナ、EBG構造、メタマテリアル構造などの解析でよく用いられる。

シミュレーションの流れ(モデラー、解析条件、後処理)

どこまで詳細にモデル化すべきか?
⇒(吸収境界を適用できる条件を満たす、あるいは電磁界が広がる範囲まで

1. モデリング(解析モデルを描く)。
2. 媒質を指定する。
3. 境界条件(全境界で指定)、励振モデルを指定する。
   解の一意性より、モデル境界周囲の全ての境界条件を指定しなければならない。
4. 解析周波数、収束条件、周波数スイープ範囲を指定する。
   メッシュサイズは波長に比して十分小さく(1辺1/10波長程度以下)なければならないため、メッシュを自動生成する周波数よりも高い周波数の結果は信頼できない可能性がある。また、共振現象があり、共振周波数を境に電磁界分布が大きくことなる場合は注意が必要である。(場合によっては、周波数スイープを分ける)
5. 後処理。必要に応じて、Sパラメータ、指向性、利得、電磁界分布などを表示したり出力したりする。

シミュレーションの流れ（ソルバーの処理）

1. ユーザーが描いたモデルに従ってメッシュを自動生成する。
2. 各要素に媒質定数や境界条件を設定し、励振の条件も読み込む。
3. Portの2-D FEMモード解析(伝搬定数とモード関数)を行い、3-D FEM解析の準備をする。
4. 3-D FEM解析を行い、電磁界分布を得る。
5. 収束条件を計算し、収束条件に達していなかったら電磁界の強い部分をさらに細かいメッシュに変更し、ステップ3に戻る。収束条件を満たしていたら次のステップへ。
6. 周波数スイープが指定されている場合は、今のメッシュを用いて最初の周波数から順番に解析する。最後の周波数の解析が終わったら終了。

シミュレータをうまく使うコツ

1. まずは、ダイポールアンテナ、方形導波管、マイクロストリップ線路などの規範問題でシミュレータの動作を確認。
   (参考：電子情報通信学会エレクトロニクスシミュレーション研究会のホームページにある規範問題)
   http://www.ieice.org/~est/
2. 収束が単調減少しているかどうか確認。単調減少でない場合、偶然収束条件を満たしてしまった可能性がある。この解決法は次の手動メッシュが有効。
3. 最初から電磁界が集中するとわかっているところ、あるいは微細な構造で細かくメッシュを切らなければならないところは、メッシュオペレーションを使って手動で細かい初期メッシュになるように指定する。場合によっては、ダミーのオブジェクトを描いて細かいメッシュの部分を指定する。
4. エラーが出て、何かよくわからないときは、エラーが出なくなるまでオブジェクトなどを少しずつ削除していき、原因となるオブジェクト近傍を発見する。
5. 後処理で電磁界分布をビジュアルに描き、アニメーションを表示して、期待した通りの動きをしているか確認する。特に吸収境界壁はしっかりと放射するように電磁界が吸い込まれているかどうか、など。

シミュレーションと実測の結果が合わないときの考察

実験の精度・再現性は十分か？

No → 実験の精度を上げる

Yes

解析モデルは正しくできているか？
・構造、媒質定数、放射境界との距離（距離を少し増やしても変化がないことを確認）、励振部のモデル化（これは難しい）

問題なし

製作誤差の影響がある可能性を検討。シミュレータで考えられるパラメータを変化させて、結果に大きな影響があるか調べる

変化あり → 製作制度は十分か実モデルをチェックする

変化なし

材料定数(ε, μ, σ)は正しいか？考えられる値としてシミュレータで変化させた値を入力して、結果に大きな影響があるか調べる

Yes

完了