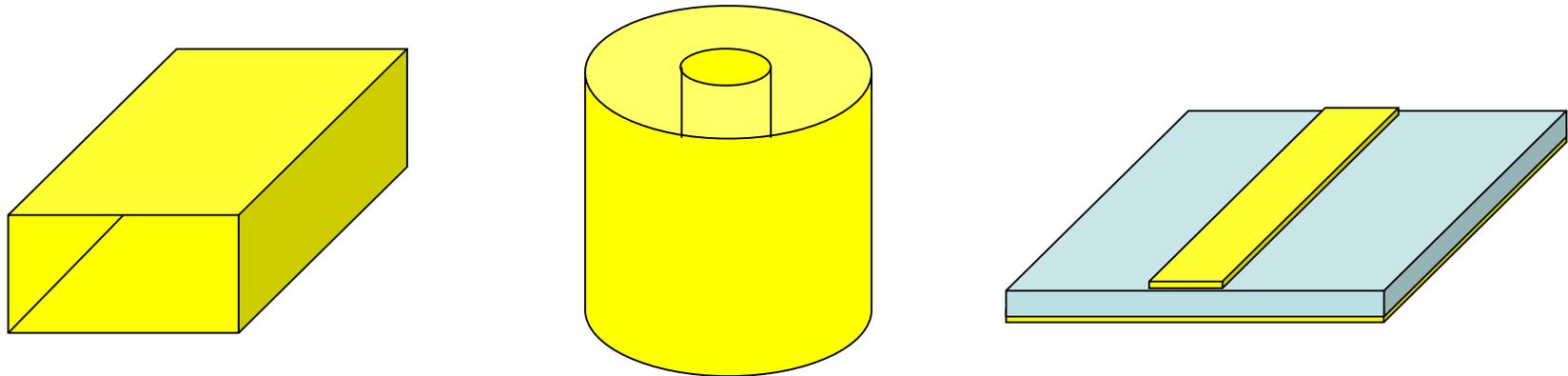


有限要素法による電磁界シミュレーション入門

第1回「導波路の解析」



東京工業大学 環境・社会理工学院
平野 拓一

E-mail: hirano.t.aa@m.titech.ac.jp

波動方程式(EまたはHのみの式)

マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} = 0$$

$$\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} + j\omega\mu_0\mathbf{H} = 0 \quad \text{場所の関数}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) + j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = 0$$

∇×Hを消去

$$-\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - j\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}$$

Hを消去してEの方程式を導く

ヘルムホルツの波動方程式
(有限要素法の基礎方程式)

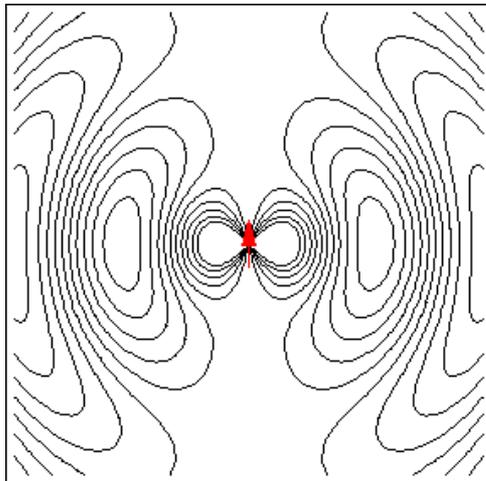
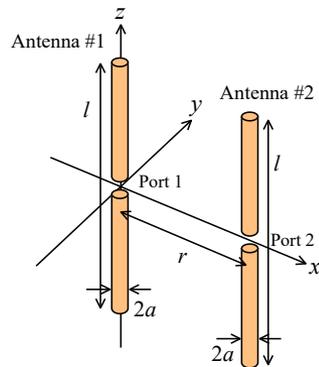
$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}$$

同様に、Eを消去してHの方程式を導くこともできる

励振問題と非励振問題

励振波源あり 行列方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}$$



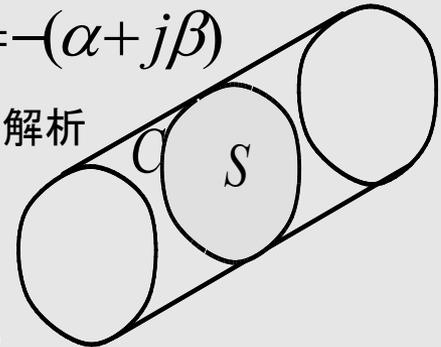
励振波源なし 固有値問題 $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$

$$\partial/\partial z = -\gamma = -(\alpha + j\beta)$$

導波路, モードの解析

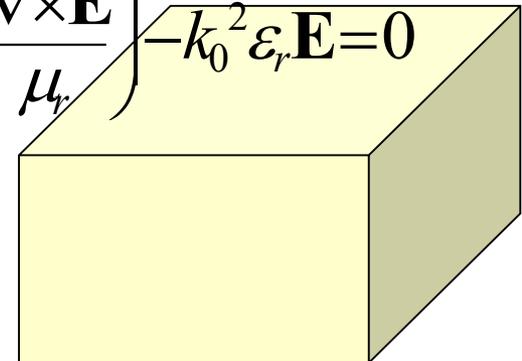
2-D

$$\nabla_t \times \left(\frac{\nabla_t \times \mathbf{E}_t}{\mu_r} \right) - (k_0^2 \epsilon_r + \Gamma) \mathbf{E}_t = 0$$



共振器 $\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0$

3-D

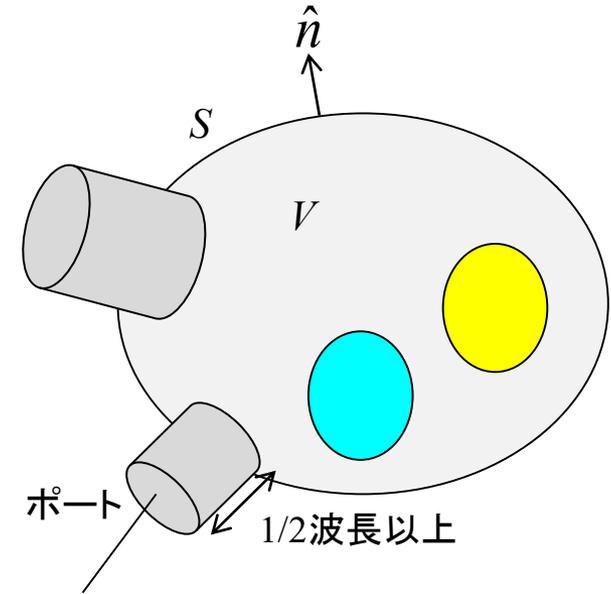


どの周波数でどのような形で共振するのか?

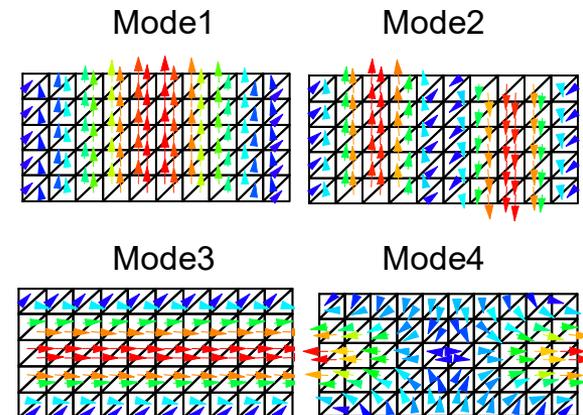
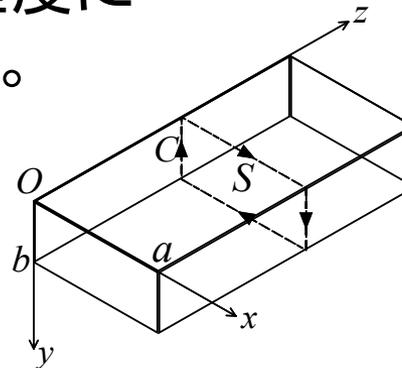
ポートとモード

ポート(導波路モード励振)

- 導波路モード励振は境界にて行う。
- 導波路モード給電では、導波路部分は少なくとも1/2波長以上はモデル化する。(不連続部で発生した高次モードが十分減衰するように)
- 単一モード条件であるかどうかを確認する。多モードならば、それらも考慮して解析する。
- 開放型線路の場合には電磁界モードが端で十分減衰する程度に広い面積でポートを定義する。



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1^{(+)} + \sum_u B_u \mathbf{E}_u^{(-)}$$



$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0$$

$k = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$
 $\mathbf{J} = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

(x,y,z)座標 $\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z$

ラプラシアン $\nabla^2 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{\nabla_t^2} + \gamma^2 \leftarrow \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla_t^2 \mathbf{E} + (k^2 + \gamma^2) \mathbf{E} = 0$$

電荷なし $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

固有値問題

導波路問題の波動方程式 (2)

$$\mathbf{H} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{j\omega\mu\mu_r} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{j\omega\mu} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{jk\eta}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{cur} \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A} = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{jk\eta} \left[\hat{x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{jk\eta} \left[\hat{x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right]$$

$$= -\frac{\gamma}{jk\eta} \left[\hat{x} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial y} + E_y \right) - \hat{y} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial x} + E_x \right) + \hat{z} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right]$$

$E_z = 0$ のとき $Z_0 = \frac{jk\eta}{\gamma}$ は E_t の H_t に対する比 (特性インピーダンス)

$E_z \neq 0$ のときは H の波動方程式を使う

c.f.) 付録参照,

電圧反射係数 $\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$



$$\nabla_t^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{固有値問題}$$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \quad \text{カットオフ(遮断)波数}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \varepsilon \mu}$$

$$k_c^2 \quad \text{固有値}$$

$$\mathbf{E} \quad \text{固有ベクトル}$$

ベクトルの次元数(展開係数の数)だけある

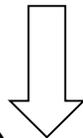
- **基本モード (dominant mode):** カットオフ波数最小のモード。通常、基本モードだけ、つまり単一モード (single mode) で用いる。
- **高次モード (higher-order mode):** 基本モード以外のよりカットオフ波数が高いモード。
- **縮退モード (degenerate mode):** カットオフ波数が同じの異なるモード。
- **多重モード (degenerate mode):** 単一モード以外、複数のモードが伝搬可能な状態。
- **伝搬モード (propagating mode):** 位相定数が0でなく、減衰定数が小さく、伝搬可能なモード。
- **カットオフ (cutoff):** 位相定数は0で周波数がカットオフ周波数未満のモード。エバネッセントモードとも呼ばれる。減衰モードと違って、エネルギーは全反射する。



±z方向に進むモードuの正規化電界モード関数

$$\mathbf{E}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_u(x, y) \exp(\mp \gamma_u z)$$

$$\begin{aligned} \exp(-\gamma z) &= \exp(-(\alpha + j\beta)z) \\ &= \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z) \end{aligned}$$

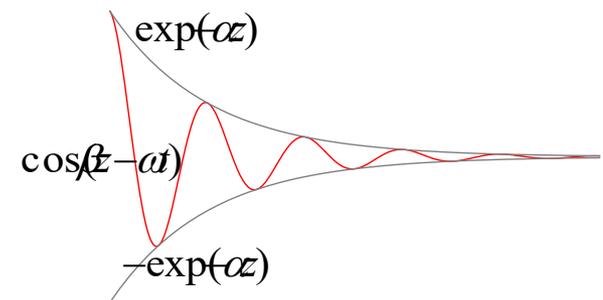


瞬時値表現

$$\begin{aligned} &\text{Re}[\exp(\alpha z) \exp(-j\beta z) \exp(j\omega t)] \\ &= \text{Re}[\exp(\alpha z) \exp(-j(\beta z - \omega t))] \\ &= \text{Re}[\exp(\alpha z) \{ \cos(\beta z - \omega t) - j \sin(\beta z - \omega t) \}] \\ &= \exp(-\alpha z) \cos(\beta z - \omega t) \end{aligned}$$

伝搬定数: $\gamma = \alpha + j\beta$

減衰定数
位相定数



E_z	H_z	
0	0	TEM(Transverse electric and magnetic)波
0	Exist	TE(Transverse electric)波, H波
Exist	0	TM(Transverse magnetic)波, E波
Exist	Exist	ハイブリッド波

モード関数の表現

導波路内の電磁界はモードの和で表現できる

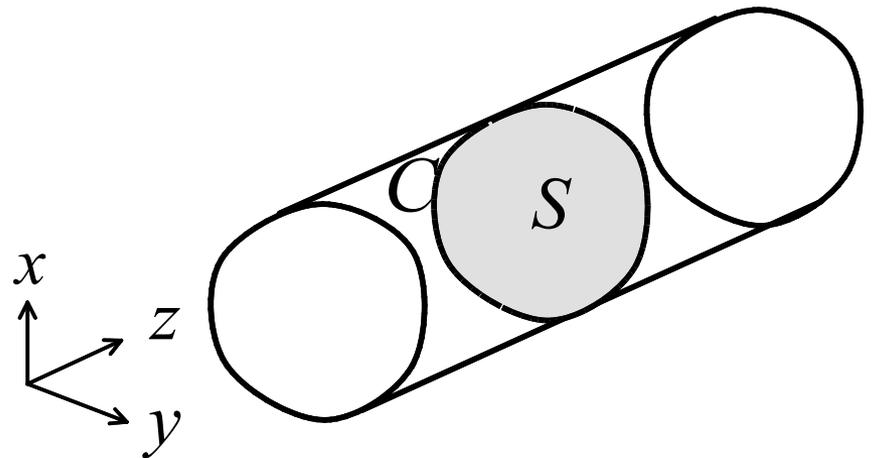
$$\begin{cases} \mathbf{E} = \sum_u \left(A_u \mathbf{E}_u^{(+)} + B_u \mathbf{E}_u^{(-)} \right) \\ \mathbf{H} = \sum_u \left(A_u \mathbf{H}_u^{(+)} + B_u \mathbf{H}_u^{(-)} \right) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{モード関数} \\ \text{モード分布} \\ \text{伝搬定数} \end{array} \begin{cases} \mathbf{E}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_u(x, y) \exp(\mp \gamma_u z) \\ \mathbf{H}_u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_u(x, y) \exp(\mp \gamma_u z) \end{cases}$$

u : モードの番号 (TEM, TE_{mn} , TM_{mn})

モード関数は導波路問題の固有値問題を解いて得られる。つまり、非励振の問題の解である。モード解析によって、モードの分布とそのモードの伝搬定数が得られる。

モード関数の直交性

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{E}_u^{(\pm)} \times \mathbf{H}_v^{(+)}). d\mathbf{S} &= +\delta_{uv} e^{(\mp \gamma_u - \gamma_v)z} \\ \iint_S (\mathbf{E}_u^{(\pm)} \times \mathbf{H}_v^{(-)}). d\mathbf{S} &= -\delta_{uv} e^{(\mp \gamma_u + \gamma_v)z} \\ \delta_{uv} &= 1 (u=v), 0 (u \neq v) \end{aligned}$$



速度(位相速度と群速度)

位相速度

$$v_{pu} = \frac{\omega}{\beta_u} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_{cu}^2}}$$

エネルギー伝送速度

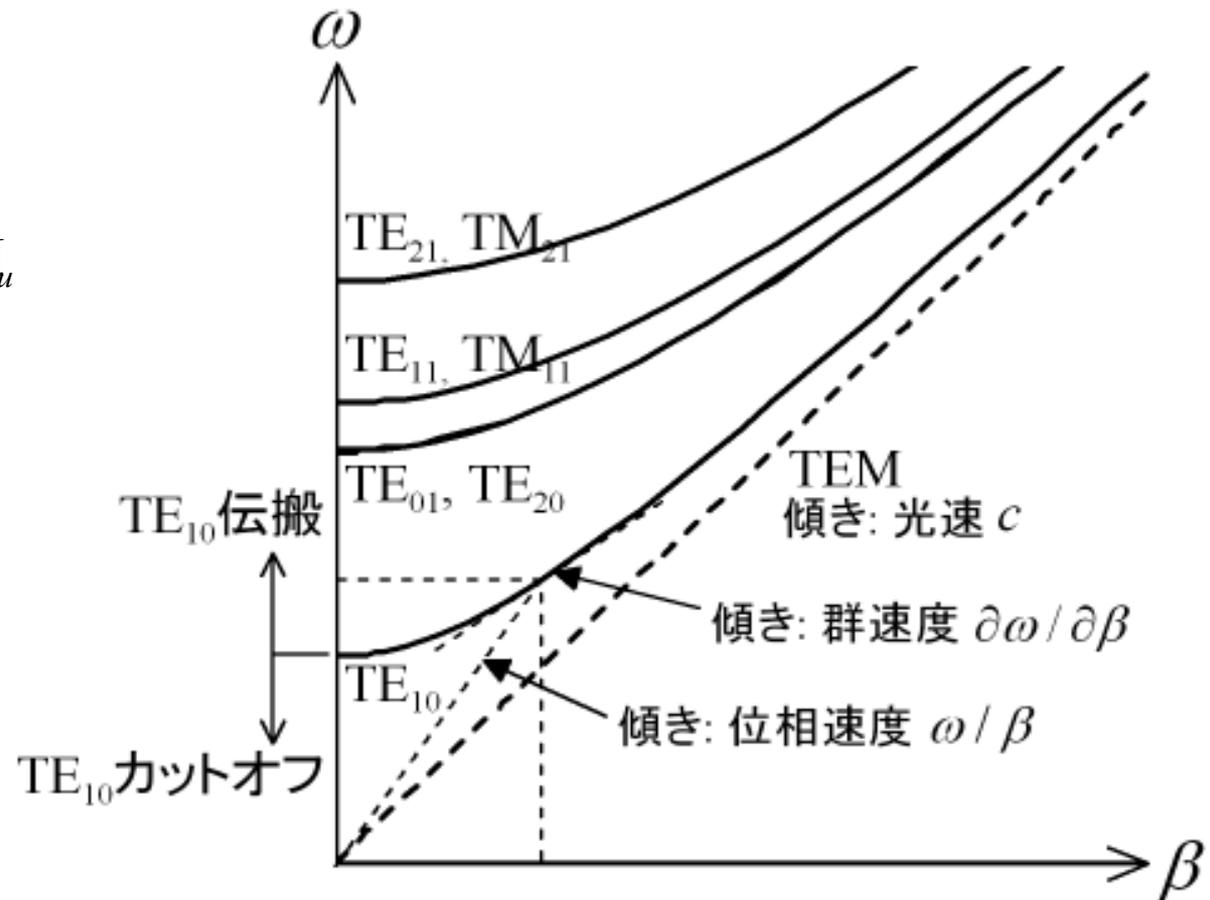
$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon |\mathbf{E}_u|^2 dv + \frac{1}{2} \iiint_V \mu |\mathbf{H}_u|^2 dv$$

$$v_{eu} = \frac{P}{W}$$

群速度

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}$$

$$v_p v_g = c^2$$



電力

$$P = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \right]$$

$$P = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \iint_S \left(\sum_u A_u \mathbf{E}_{tu}^{(+)} \right) \times \left(- \sum_u A_u^* \mathbf{H}_{tu}^{(-)} \right) \cdot d\mathbf{S} \right]$$

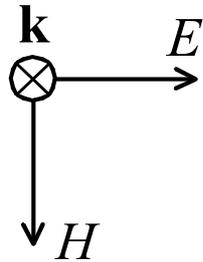
$$= \frac{1}{2} \sum_u |A_u|^2 \quad [W]$$

直交性

各モードは独立な情報を伝送できる。



波数ベクトル

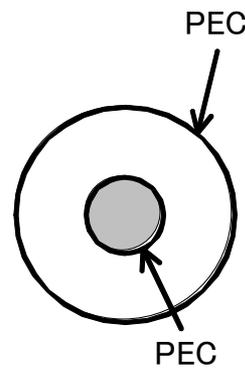


(a) 自由空間

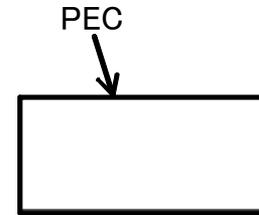
PEC(金属)



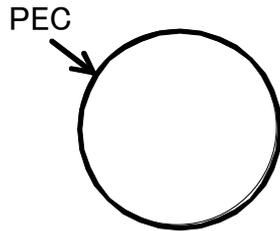
(b) 平行二本線路
(レツヘル線路)



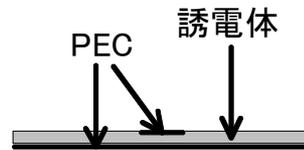
(c) 同軸線路



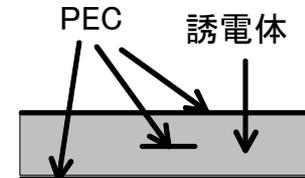
(d) 方形導波管



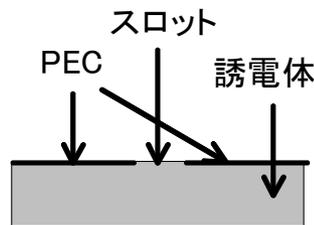
(e) 円形導波管



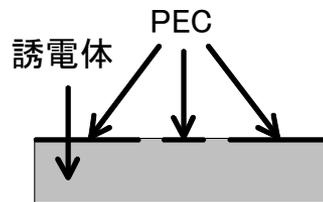
(f) マイクロストリップ線路



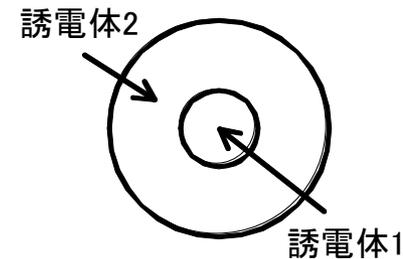
(g) ストリップ線路
(トリプレート線路)



(h) スロット線路



(i) コプレーナガイド

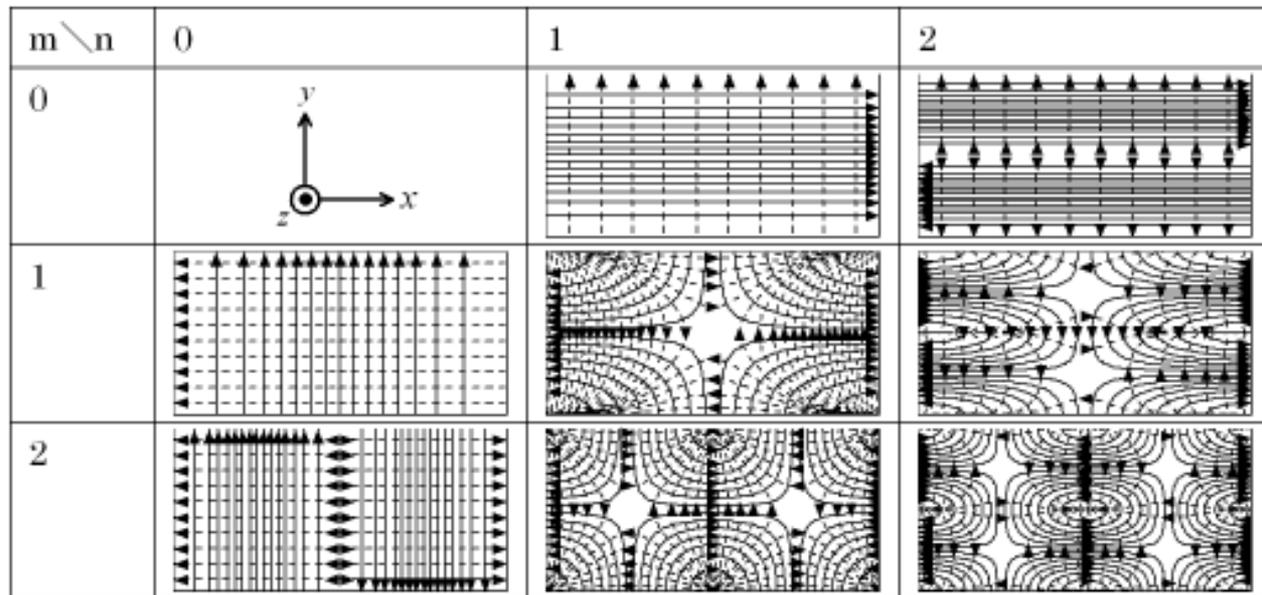


(j) 光ファイバ

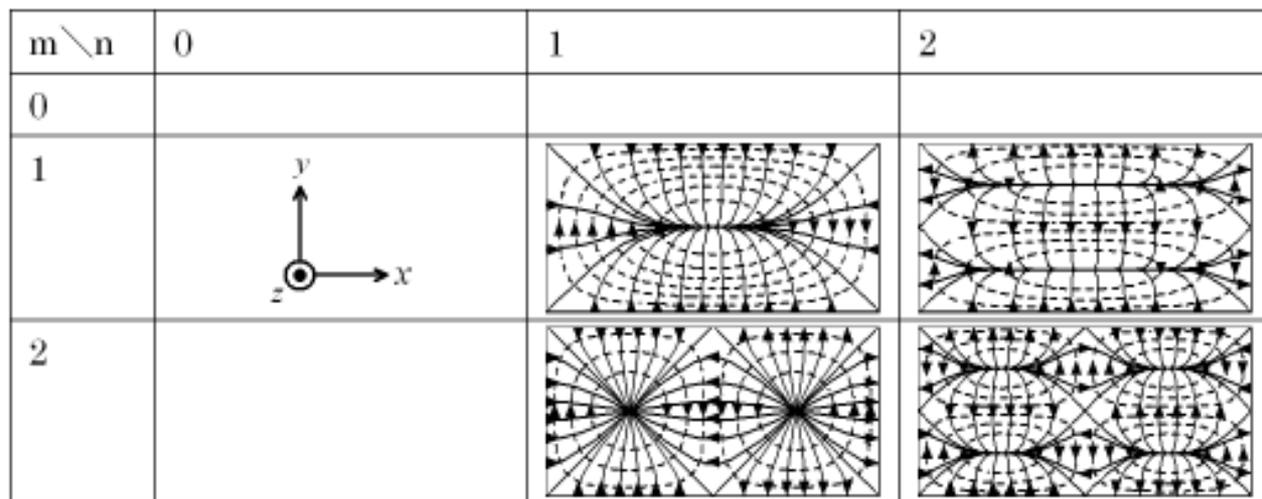
方形導波管の断面内のモード関数分布

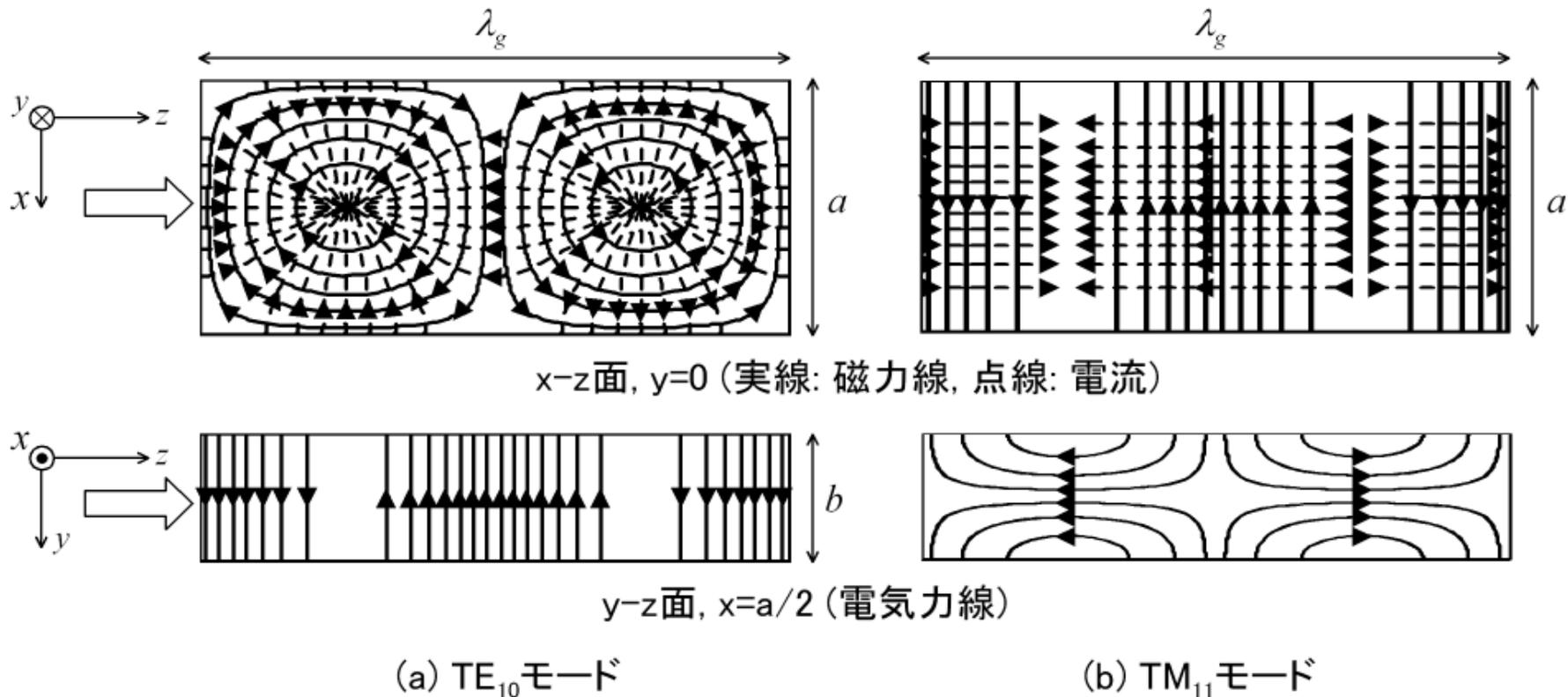
(実線: 電気力線, 点線: 磁力線)

TE_{mn} モード



TM_{mn} モード





アンテナ・無線ハンドブック, オーム社, pp.17-41 (I編-3章), 2006年10月.

カットオフ周波数

fcu (GHz)

Analytic

FEM

(1,0): 2.58

Mode1: 2.58

(0,1): 5.15

Mode2: 5.13

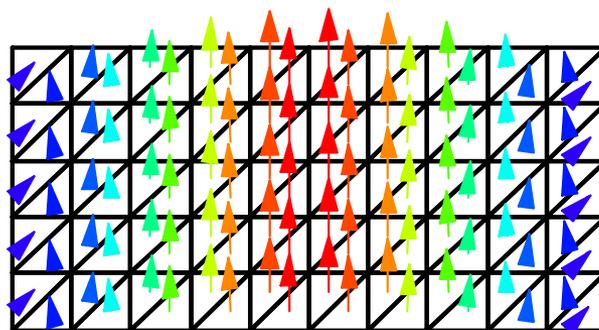
(2,0): 5.16

Mode3: 5.30

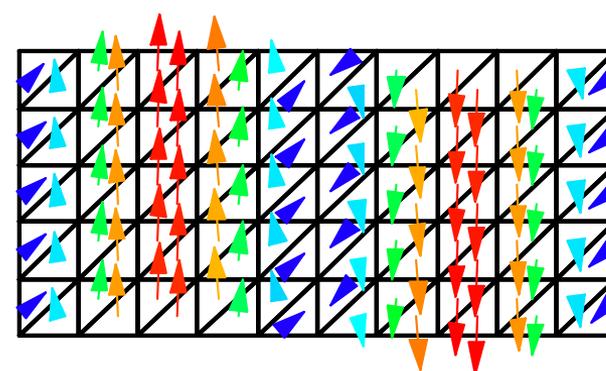
(1,1): 5.76

Mode4: 5.92

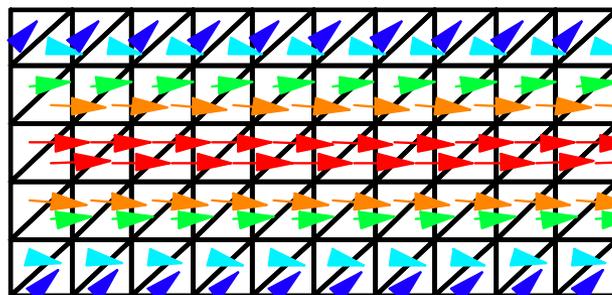
Mode1



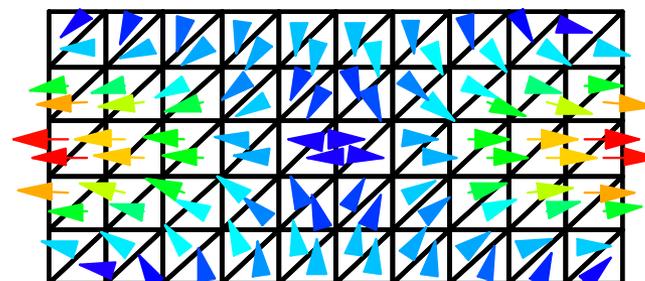
Mode2



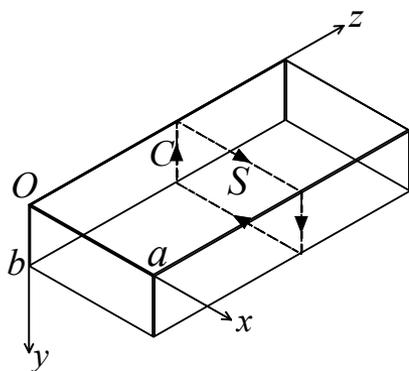
Mode3



Mode4



高次モードではより多くのメッシュ分割が必要



標準方形導波管: WRJ-4 (58.1 mm x 29.1 mm)

方形導波管のカットオフ波数

TE_{mn}, TM_{mn}モードのカットオフ波数

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{TEモード} \quad m+n \neq 0 \\ \text{TMモード} \quad mn \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\omega_c \sqrt{\mu\varepsilon} = k_c$$

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

標準方形導波管: WRJ-4 (58.1 mm x 29.1 mm)

f _{cu} (GHz)		n					
			0	1	2	3	4
m	0	0.00E+00	5.15E+00	1.03E+01	1.55E+01	2.06E+01	
	1	2.58E+00	5.76E+00	1.06E+01	1.57E+01	2.08E+01	
	2	5.16E+00	7.29E+00	1.15E+01	1.63E+01	2.12E+01	
	3	7.74E+00	9.30E+00	1.29E+01	1.73E+01	2.20E+01	
	4	1.03E+01	1.15E+01	1.46E+01	1.86E+01	2.30E+01	

- 中島将光: マイクロ波工学 基礎と原理, 森北出版, 1975.
- アンテナ・無線ハンドブック, オーム社, pp.17-41 (I編-3章), 2006年10月.



Cの計算

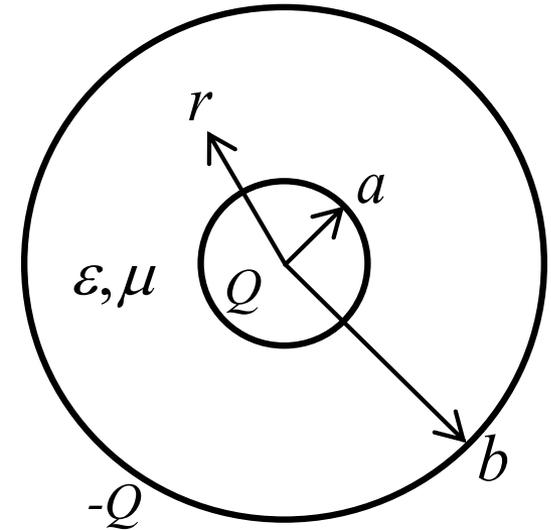
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV \quad \text{ガウスの法則}$$

$$\epsilon E_r \cdot 2\pi r = Q$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon r}$$

$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon} [\log r]_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \log \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\log \frac{b}{a}}$$



Lの計算

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{アンペアの法則}$$

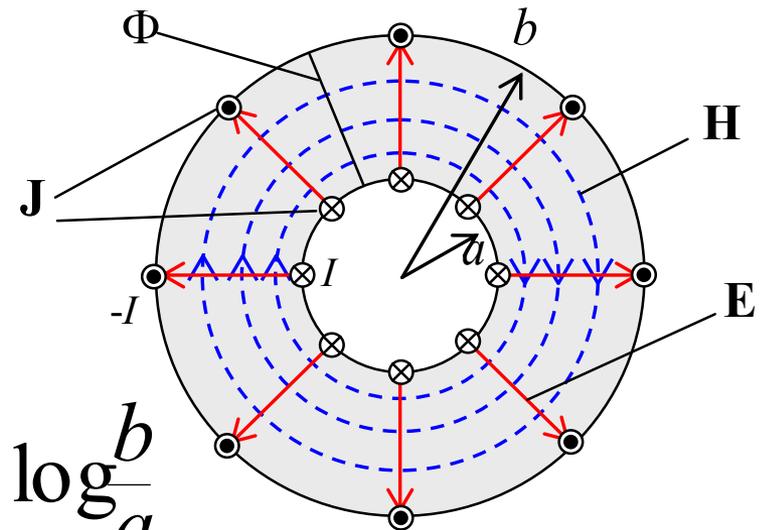
$$H_\phi \cdot 2\pi r = I \quad H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\frac{\Phi}{\mu} = \int_a^b H_\phi dr = \frac{I}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

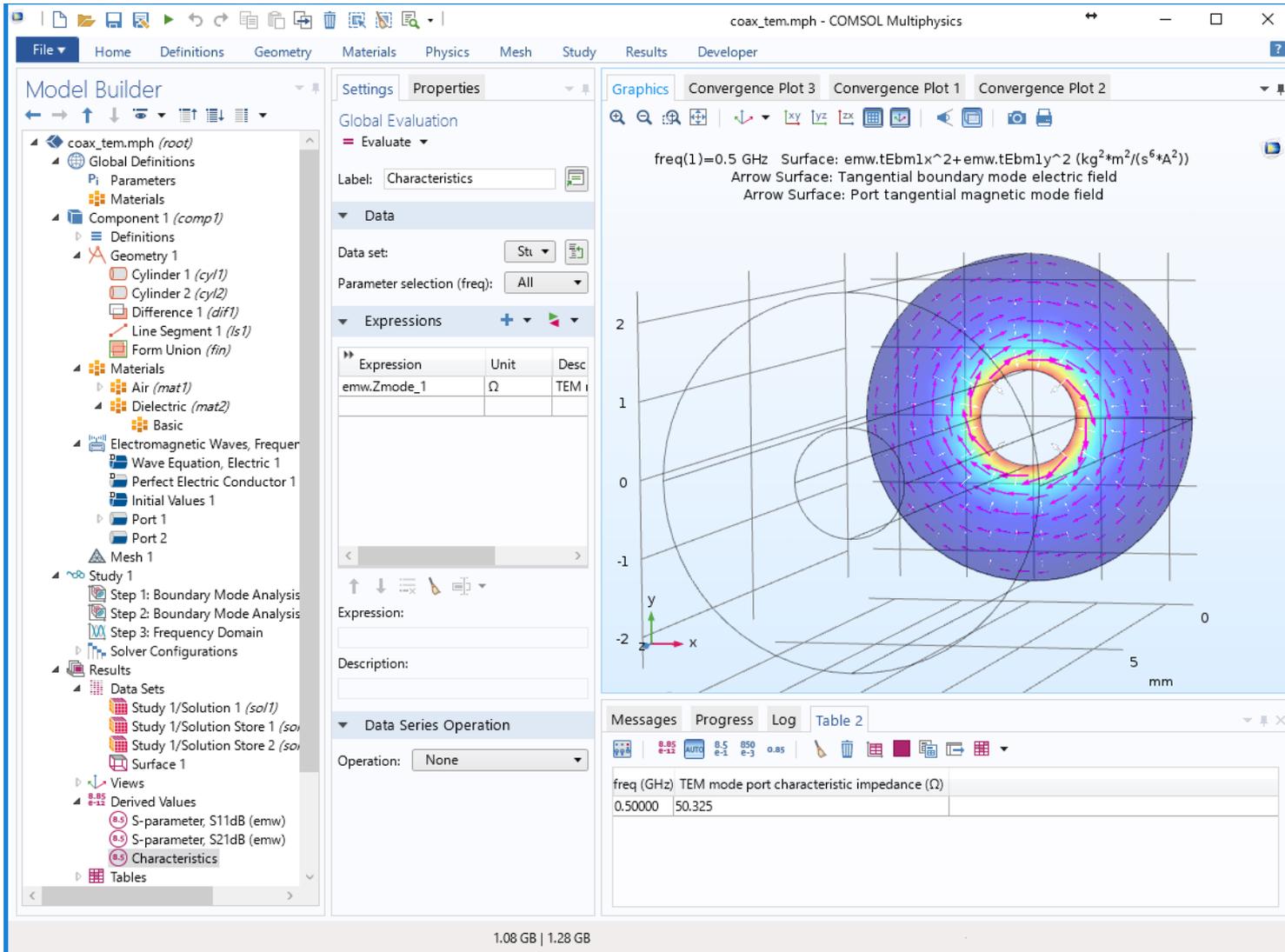
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

特性インピーダンス

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\log \frac{b}{a}}{2\pi}$$



COMSOL



$$\begin{aligned} \text{In}[1] := & \mathbf{a} = (1.4 / 2) * 10^{-3}; \\ & \mathbf{b} = \mathbf{a} + 1.7 * 10^{-3}; \\ & \epsilon \mathbf{r} = 2.2; \\ & \mu \mathbf{r} = 1.; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[5] := & \epsilon \theta = 8.85418782 * 10^{-12}; \\ & \mu \theta = 1.25663706 * 10^{-6}; \\ & \epsilon = \epsilon \mathbf{r} * \epsilon \theta; \\ & \mu = \mu \mathbf{r} * \mu \theta; \end{aligned}$$

$$\text{cap} = \frac{2 * \pi * \epsilon}{\text{Log}\left[\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right]}$$

$$\text{ind} = \frac{\mu}{2 * \pi} \text{Log}\left[\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right]$$

$$\mathbf{z} \theta = \sqrt{\frac{\text{ind}}{\text{cap}}}$$

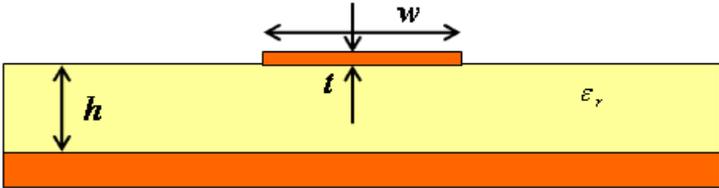
$$\text{Out}[9] = 9.93322 * 10^{-11}$$

$$\text{Out}[10] = 2.46429 * 10^{-7}$$

$$\text{Out}[11] = 49.8082$$

Microstrip Line

2010.10.30 Takuichi Hirano



Input

Dielectric constant	ϵ_r	<input type="text" value="4.3"/>
Height of dielectric layer	h	<input type="text" value="1.57"/> mm
Width of signal line	w	<input type="text" value="3"/> mm
Thickness of signal line	t	<input type="text" value="0.035"/> mm

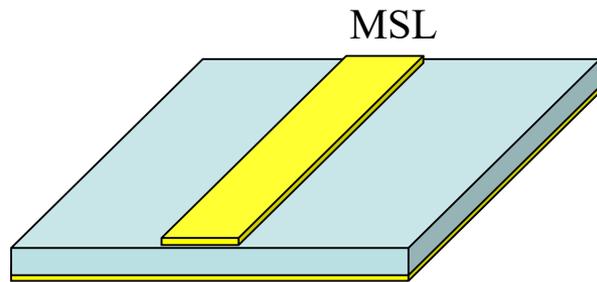
Output

Characteristic impedance	Z_0	<input type="text" value="50.02461928316401"/> Ohms
Effective relative permittivity	ϵ_{eff}	<input type="text" value="3.2615306862454085"/>

$$\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{reff}}$$

$$\beta = 2\pi / \lambda_g$$

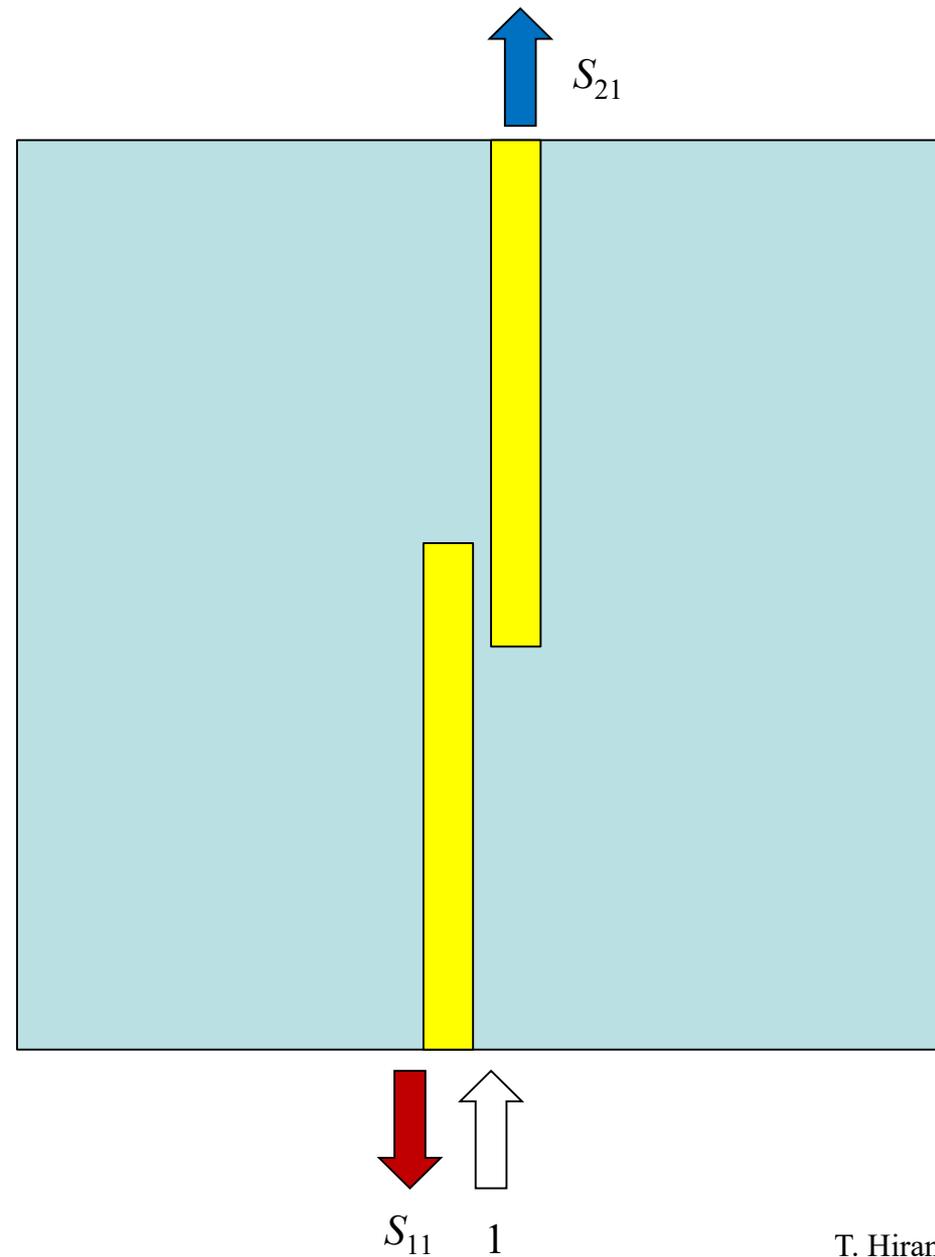
http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/mw_circuit/transmission_lines/

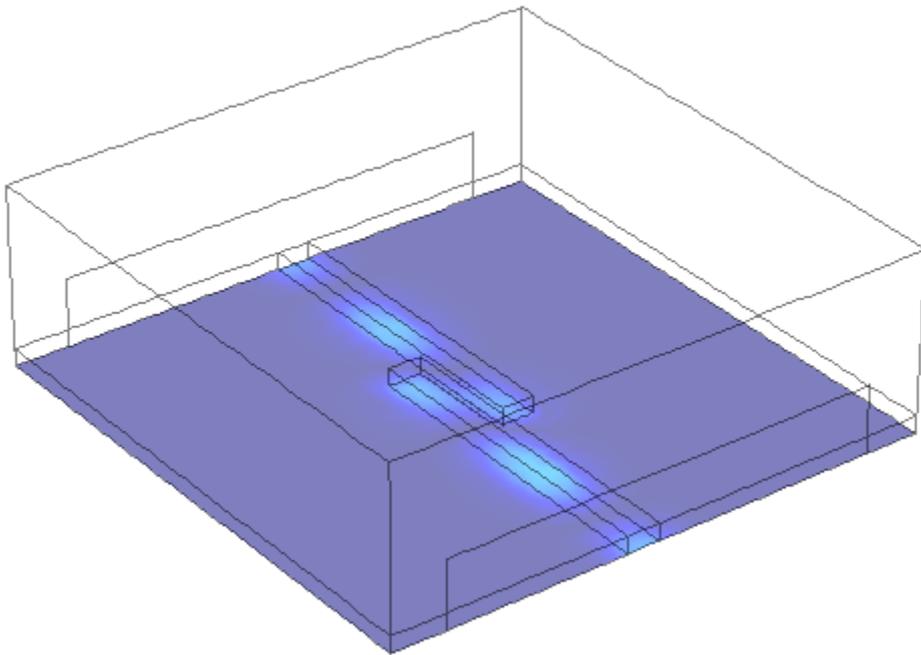


入力電力: 1

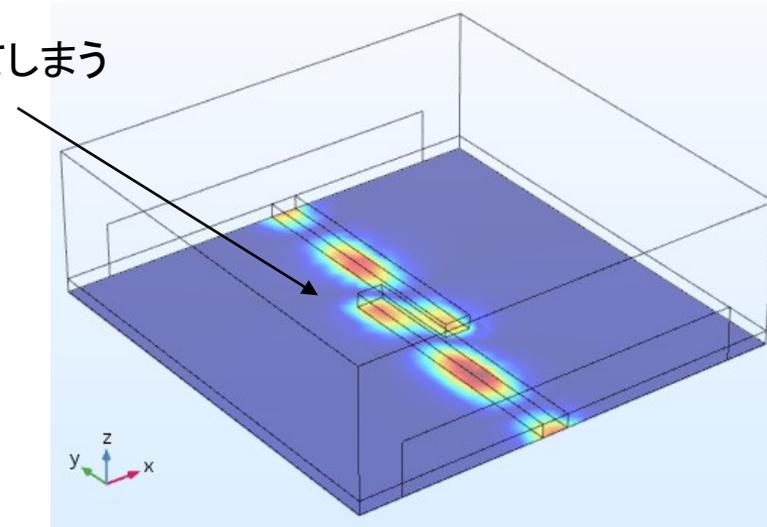
出力電力: $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2$

損失電力: $1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2$

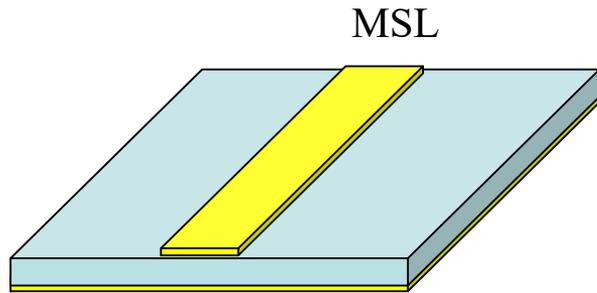




結合してしまう



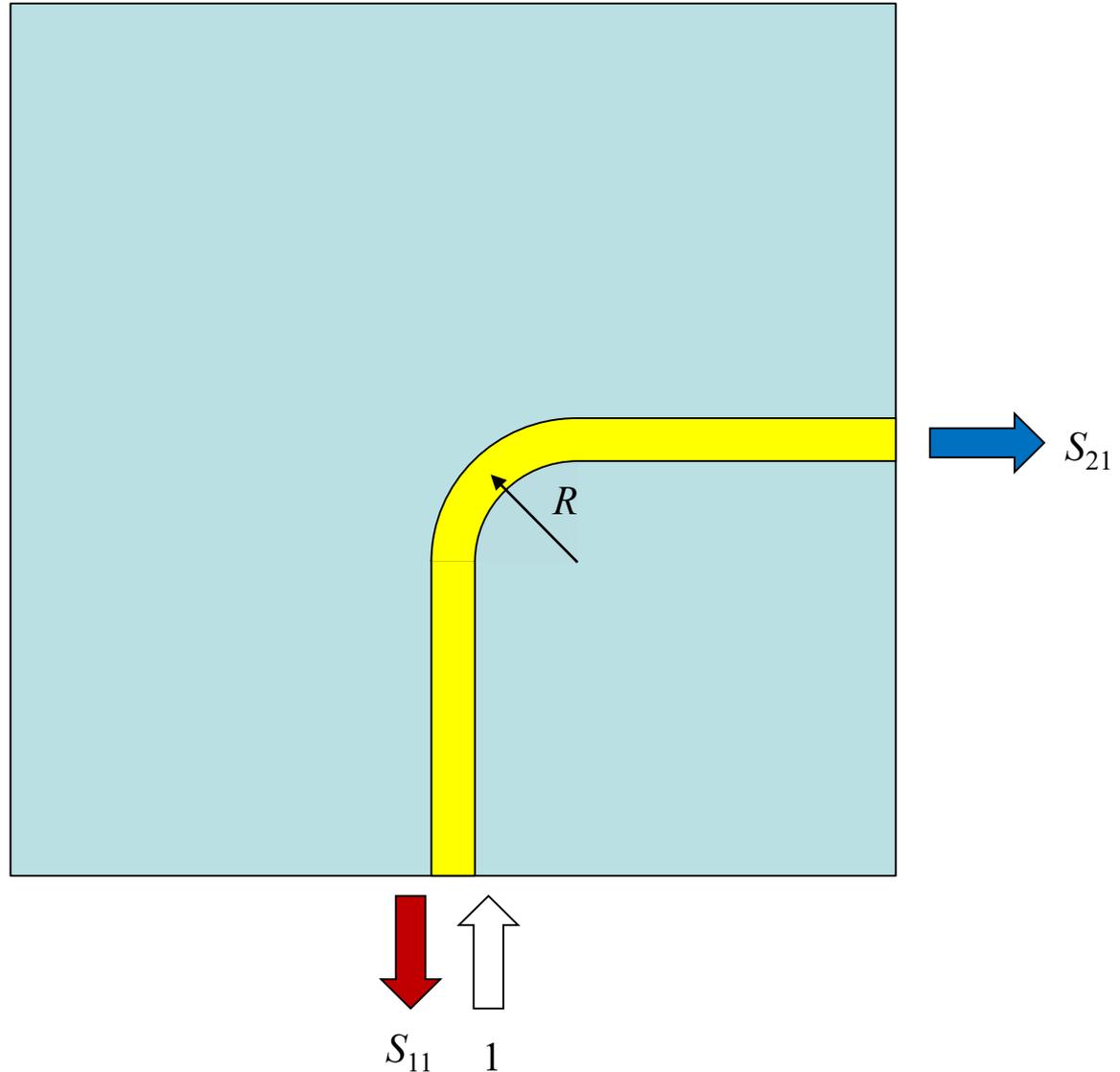
結合線路



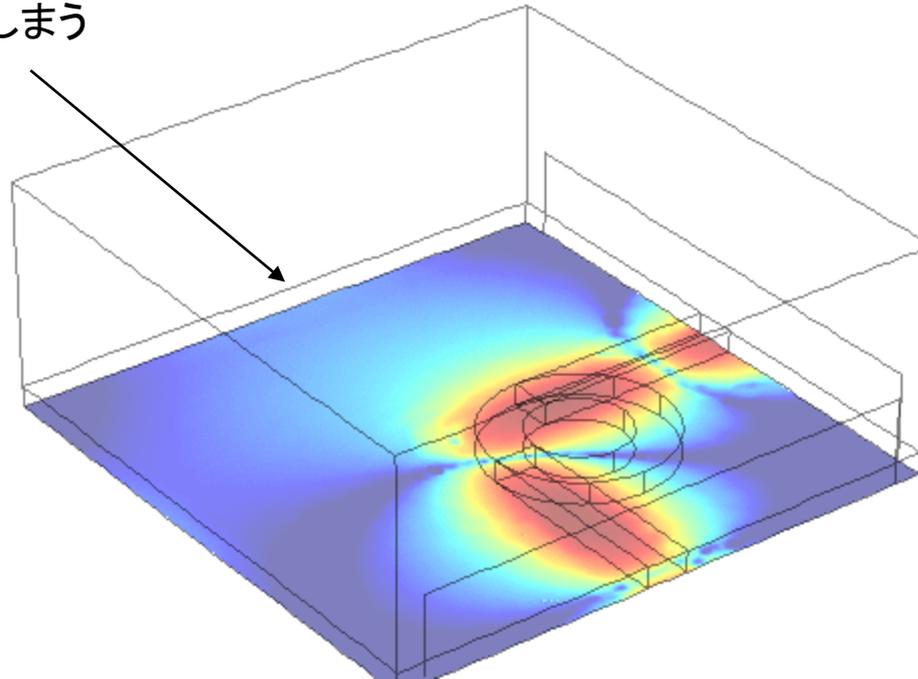
入力電力: 1

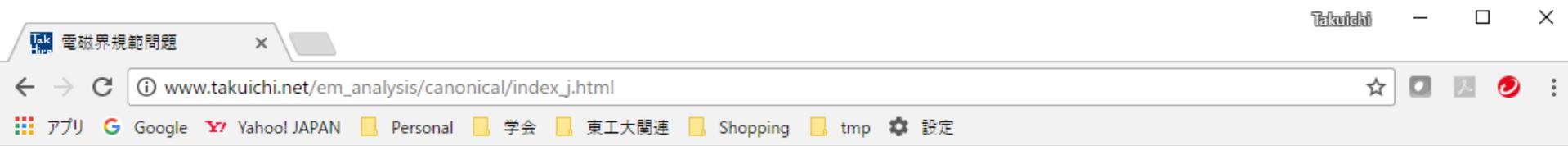
出力電力: $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2$

損失電力: $1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2$



漏れてしまう





電磁界規範問題および市販シミュレータのファイル例

2017/4/7 by T. Hirano

このページでは、電磁界解析規範問題と、その解析をするための市販シミュレータのファイルを紹介する。

まずは、導波路モード励振（ポート）の設定の仕方について確認しよう。

問題の種類	図	各シミュレータのファイル
方形導波管 (直流・低周波しか扱ったことがない人には難しいが、解析的に解が求まる最も簡単な良い規範問題)	<p>標準方形導波管: WR1-4 (WRJ-4)</p>	COMSOL (ver. 5.2a) rect wg port rect.mph rect wg port rect num.mph rect wg port rect num multimode.mph comsol_rect wg port rect.pdf (説明) comsol_rect wg port num.pdf (説明)
マイクロストリップ線路	<p>$\epsilon_r=4.5, \tan\delta=0.04$ $h=1.57 \text{ mm}, t=0.001 \text{ mm}, w=3 \text{ mm}$</p>	COMSOL (ver. 5.2a) msl_pec_port.mph msl_pec_port_tem.mph msl_port.mph comsol_msl_port.pdf (説明)

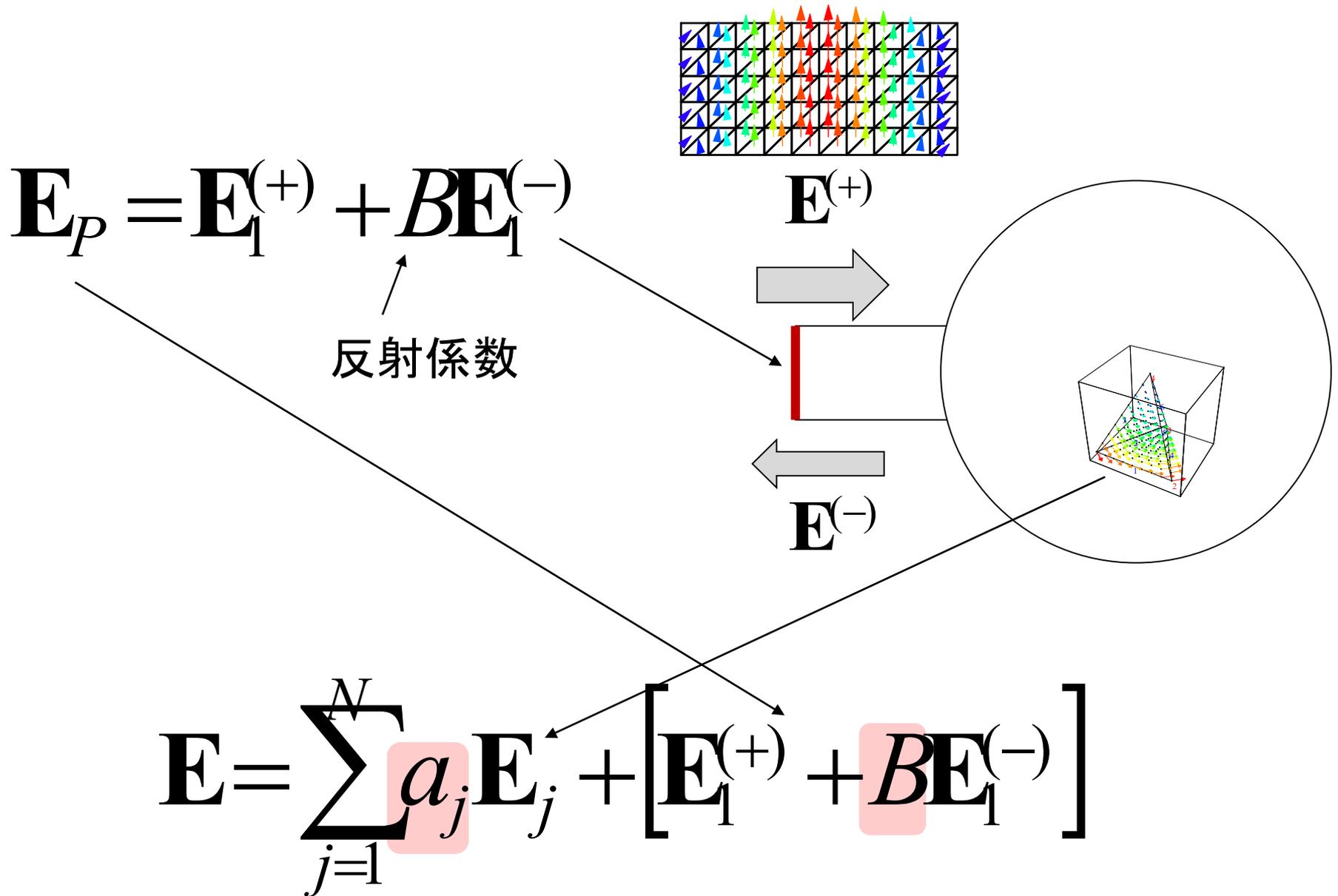
http://www.takuichi.net/em_analysis/canonical/index_j.html



導波路モードの考え方



- ✿線路は各ブロックの信号伝送に用いられる。
- ✿不連続部では電磁界の境界条件を満たすように高次モードが発生する。減衰モードはその場所を離れると指数関数的に減衰する。
- ✿線路は普通、シングルモード(単一モード)で用いる。同軸ケーブルも高周波になるほど細くなるのはこのため。マルチモード(多重モード)では線路の曲げ方等によって特性は大きく変化するので安定動作しない。
- ✿線路は断面形状が無限に続くものとしてモードを計算しているので、不連続部やコーナ一部では予期しない放射などが生じ得る。
- ✿線路の断面は理想的には2次元の無限に広い面を必要とするので(導波管のような閉構造は別)、線路を近づけると予期しない線路間の結合が起こる。



$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} & * \\
 K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} & * \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\
 K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} & * \\
 * & * & * & * & *
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 a_N \\
 B
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 \vdots \\
 F_N \\
 *
 \end{bmatrix}$$

この方程式を生成するためには、モード関数との内積を取る $e^{(\pm)}$

付録：厳密なTE, TMモードの導出

マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla = \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \hat{z} E_z$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \hat{z} H_z$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu \hat{z} H_z & \text{(A)} \\ \nabla_t \times (\hat{z} E_z) - \gamma(\hat{z} \times \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu \mathbf{H}_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon \hat{z} E_z & \text{(B)} \\ \nabla_t \times (\hat{z} H_z) - \gamma(\hat{z} \times \mathbf{H}_t) = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} &\longrightarrow (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \times (\mathbf{E}_t + \hat{z}E_z) = -j\omega\mu(\mathbf{H}_t + \hat{z}H_z) \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} &\longrightarrow (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \times (\mathbf{H}_t + \hat{z}H_z) = j\omega\varepsilon(\mathbf{E}_t + \hat{z}E_z) \end{aligned}$$

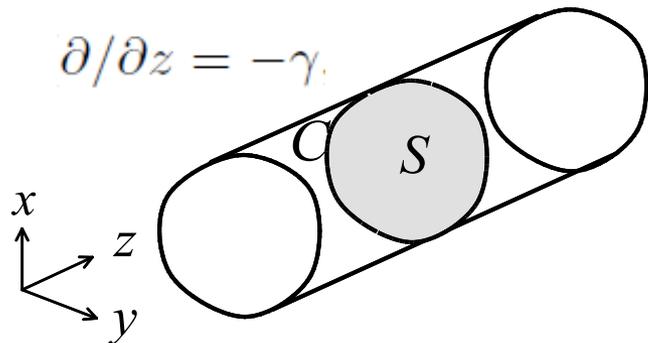
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 &\longrightarrow (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \cdot (\mathbf{E}_t + \hat{z}E_z) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 &\longrightarrow (\nabla_t - \hat{z}\gamma) \cdot (\mathbf{H}_t + \hat{z}H_z) = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = \gamma E_z \\ \nabla_t \cdot \mathbf{H}_t = \gamma H_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \mathbf{E}_t, E_z, \mathbf{H}_t \text{ and } H_z &\left\{ \begin{aligned} \nabla \times (V\mathbf{A}) &= \nabla V \times \mathbf{A} + V \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \begin{cases} \nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t = -j\omega\mu (\hat{z} \times \mathbf{H}_t) & \text{(A)の下} \\ \nabla_t H_z + \gamma \mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon (\hat{z} \times \mathbf{E}_t) & \text{(B)の下} \end{cases}$$

$\nabla_t \cdot$ (一様媒質でしか下の変形は通用しない)

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + \gamma(\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \mathbf{H}_t) \\ \nabla_t^2 H_z + \gamma(\nabla_t \cdot \mathbf{H}_t) = j\omega\varepsilon \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \mathbf{E}_t) \end{cases}$$



$$\downarrow \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + \gamma^2 E_z = j\omega\mu \hat{z} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{H}_t) & \hat{z} \cdot (\mathbf{A}) \text{の下} \\ \nabla_t^2 H_z + \gamma^2 H_z = -j\omega\varepsilon \hat{z} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) & \hat{z} \cdot (\mathbf{B}) \text{の下} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + \gamma^2 E_z = -\omega^2 \mu \varepsilon E_z \\ \nabla_t^2 H_z + \gamma^2 H_z = -\omega^2 \mu \varepsilon H_z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{カットオフ(遮断)波数} \\ k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \\ (k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}) \end{array}$$



$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) E_z = 0 \\ \nabla_t^2 H_z + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) H_z = 0 \end{cases} \quad \text{E}_z, \text{H}_z \text{は独立にヘルムホルツの方程式を満たす}$$

 $\hat{z} \times (\mathbf{C})$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\begin{cases} \hat{z} \times \nabla_t E_z + \gamma (\hat{z} \times \mathbf{E}_t) = j\omega\mu \mathbf{H}_t \\ \hat{z} \times \nabla_t H_z + \gamma (\hat{z} \times \mathbf{H}_t) = -j\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \end{cases}$$



(C)を使う

$$\begin{cases} \hat{z} \times \nabla_t E_z + \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} (\nabla_t H_z + \gamma \mathbf{H}_t) = j\omega\mu \mathbf{H}_t \\ \hat{z} \times \nabla_t H_z - \frac{\gamma}{j\omega\mu} (\nabla_t E_z + \gamma \mathbf{E}_t) = -j\omega\varepsilon \mathbf{E}_t \end{cases}$$



$$\begin{cases} j\omega\epsilon\hat{z} \times \nabla_t E_z + \gamma\nabla_t H_z = -(\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon)\mathbf{H}_t \\ j\omega\mu\hat{z} \times \nabla_t H_z - \gamma\nabla_t E_z = (\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon)\mathbf{E}_t \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbf{H}_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} (-j\omega\epsilon\hat{z} \times \nabla_t E_z - \gamma\nabla_t H_z) \\ \mathbf{E}_t = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} (j\omega\mu\hat{z} \times \nabla_t H_z - \gamma\nabla_t E_z) \end{cases}$$