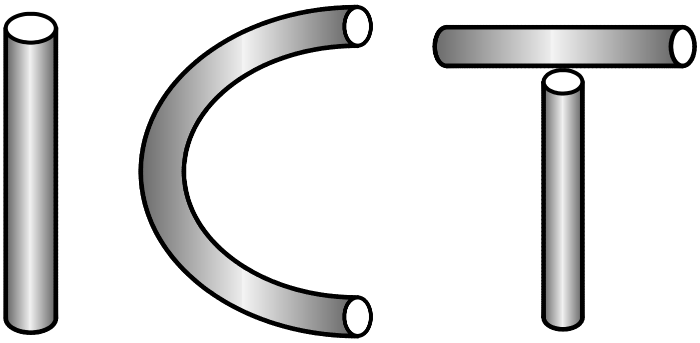
ICT(Improved Circuit Theory)入門

2002/11 **東京工業大学 平野拓一**



目次

1. はじめに

ICT(Improved Circuit Theory) [1]は 1969 年に稲垣によって開発された線状アンテナアレーの効率良い解析手法である。給電モデルは柔軟性が低く、間隙容量が無視できる程度のデルタギャップ給電で近似することができるモデルに限られる。ICT より以前に、より汎用性が高い解析手法である**モーメント法(Method of Moments, Moment Method)**[2] [3] [4]が誕生していたが、昔のコンピュータの能力は貧弱だったので線状アンテナアレーの解析に適した ICT は計算速度が速く、メモリ効率が良く八木・宇田アンテナ(図 1)などの線状アンテナアレーの CAD ソフトとして使うのに適していると思われた。そこで元々の論文では述べられていなかった給電点がオフセットされた線状アンテナアレーの解析もできるようになり、また基底関数も様々なものを取り込んで改良されていった。しかし、その後コンピュータが急速に発達し、線状アンテナアレーのモーメント法解析も多少時間がかかるが難なくこなせるようになった。その他にもコンピュータの発達とともに**有限要素法(FEM, Finite Element Method)**, **FDTD 法(Finite Difference Time Domain method)**などの様々な電磁界解析手法も発達してきた。そのようにして一度衰退したかに思えた ICT であるが、近年アダプティブアレーアンテナの研究が盛んになり、素子間相互結合を含めたアレーアンテナ特性の正確な評価が求められるようになり、演算量が劇的に増えたのでまた ICT が注目を集めている。アダプティブアレーアンテナは図 2 に示すように PHS などの基地局として使われ始めた。

ICT はモーメント法解析と非常によく似ている。実は ICT はモーメント法のガラーキン法を用いた解析と同じなのだが、基底関数として全域基底関数を用い、連立方程式を導出する際に**変分原理(Variational principle)**(付録 A.1)を用いるのが特徴である。モーメント法解析を行う場合はあまり意識しないが、その数値解が収束することを説明するためにはより数学的な言葉である変分原理を使って考察することができる。変分原理は物理学の解析力学の分野でよく用いられる。ガラーキン法を用いて１素子ダイポールアンテナの境界値問題の積分方程式を解くことは電流分布の汎関数であるアンテナの入力インピーダンスの変分問題を解くことと全く等価である（それぞれの方法で式を導出してみればわかる)。言い換えるとアンテナの入力インピーダンス（電流分布の汎関数と見なす）はモーメント法で解くべき積分方程式の生成汎関数になっている。ICT は１素子ダイポールの変分原理を多素子ダイポールアレーに拡張し、その問題を解くための積分方程式と等価な生成汎関数の停留条件を与えている。生成汎関数はわからないのだが、停留条件を与えているので問題を解くのに十分である。しかし、変分原理の考え方は慣れないと理解できないので、本稿では境界値問題から積分方程式を導出し、モーメント法と同様に素直に定式化する。しかし、ガラーキン法を用いれば変分原理を用いても全く同じ行列方程式が得られる。これについては後の章で説明する。

また本稿では ICT の原理と計算法を示すだけでなく、Mathematica を用いたインピーダンス行列の効率的な計算法を紹介する。単純だが、式が長くて非常に煩雑な計算が Mathematica を使うといとも簡単に計算できることに感動していただきたい。

図 1 八木・宇田アンテナ

図 2 PHS の基地局（東急大井町線緑ヶ丘駅にて）

2. 問題

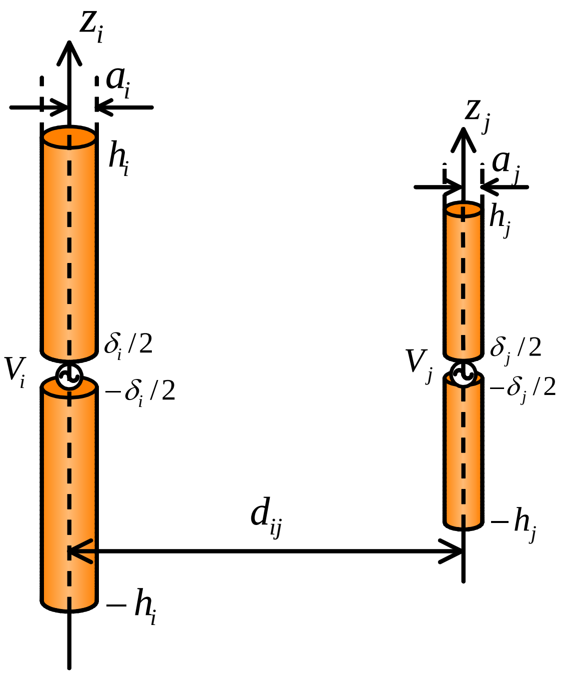


図 3 線状アンテナアレー

図 3 に示すような線状アンテナアレーの解析を行う。給電ギャップ間$|z_i| \le \delta_i/2$では電磁界は一定であると仮定する。導体棒はN本あるとする。

3. 支配方程式

導体棒上で電界の接線成分が 0 になるという境界条件より、図 3 の系が満たすべき方程式は次のようになる（線電流を仮定してもよい理由は付録 A.3 参照）。

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{-h_j}^{h_j} G_{ij}(z_i, z_j) I_j(z_j) dz_j = -V_i u_i(z_i) \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{1}$$

G_{ij}はアンテナj上の電流がアンテナiに作る電界のz_i成分を求めるグリーン関数であり、次のようになる。

$$G_{ij}(z_i, z_j) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right)\frac{\exp\left(-jk_0\sqrt{(z_i - z_j)^2 + d^2}\right)}{\sqrt{(z_i - z_j)^2 + d^2}} \tag{2}$$

ここで、$d = d_{ij}(i \ne j), a_i(i = j)$である。異なるアンテナのときはその中心間の距離とし、同じアンテナのときはそのアンテナの半径とする。

u_i はギャップ間で

$$u_i(z_i)=\begin{cases}1/\delta_i & (|z_i|\le\delta_i/2)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

で定義される。よって、$V_i u_i(z_i)$ はギャップ間の電界を表す。また、$u_i(z_i)$ の積分値は

$$\int_{-h_i}^{h_i} u_i(z_i)dz_i=\int_{-\delta_i/2}^{\delta_i/2}\frac{1}{\delta_i}dz_i=1$$

であり、常に 1 なので間隙を無限に小さくしたときは $u_i(z_i)$ はデルタ関数 $\delta(z_i)$ に近づく。

4. モーメント法（ガラーキン法）の適用

論文[1]に書かれているように最初から変分原理を用いると難しくて理解し難いので、ここではまずモーメント法を適用して解くべき行列方程式を導出し、後の章でそれが変分原理によって導出した方程式と等価であることを証明する。

4.1 離散化（基底関数で展開）

アンテナ i 上の電流分布 I_i を次のように基底関数 $f_i^l(l=1,\cdots,M)$ の和で表す。

$$I_i(z_i)=\sum_{l=1}^{M} I_i^l f_i^l(z_i) \tag{3}$$

また、$\sum_{l=1}^{M} I_i^l$ を給電点 $z_i=0$ の電流 $I_i(0)$ とするために $f_i^l(0)=1$ と規格化しておく。I_i^l は未知数であり、NM 個の未知数があることになる。電流分布は給電点付近で十分滑らかであり、給電間隙は非常に小さいとみなせるので、電流値も給電間隙内で一定であると仮定する。式(3)を式(1)に代入すると

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_j}^{h_j} G_{ij}(z_i,z_j)\sum_{m=1}^{M} I_j^m f_j^m(z_j)dz_j=-V_i u_i(z_i) \qquad (i=1,\cdots,N)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_j^m\int_{-h_j}^{h_j} G_{ij}(z_i,z_j) f_j^m(z_j)dz_j=-V_i u_i(z_i) \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{4}$$

4.2 ガラーキン法の適用

ここで、式(4)に対してガラーキン法（重み付け残差法で、重み関数に基底関数と同じものを用いる方法。付録 A.2 参照）を適用する。つまり、各アンテナ $i(i=1,\cdots,N)$ に対して $f_i^l(z_i)$ ($l=1,\cdots,M$)をかけて $[-h_i,h_i]$ の区間で積分する(NM 個の連立方程式を得る)。

$$\int_{-h_i}^{h_i} f_i^l(z_i)\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_j^m\int_{-h_j}^{h_j} G_{ij}(z_i,z_j) f_j^m(z_j)dz_j dz_i=-V_i\int_{-h_i}^{h_i} f_i^l(z_i)u_i(z_i)dz_i$$

$$(i=1,\cdots,N;\ l=1,\cdots,M)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_j^m \int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^l(z_i) G_{ij}(z_i, z_j) f_j^m(z_j) dz_j dz_i = -V_i \int_{-h_i}^{h_i} f_i^l(z_i) u_i(z_i) dz_i$$

$$(i = 1, \cdots, N;\ l = 1, \cdots, M)$$

ここで、

$$Z_{ij}^{lm} = \int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^l(z_i) G_{ij}(z_i, z_j) f_j^m(z_j) dz_j dz_i$$

$$V_i^l = V_i \int_{-h_i}^{h_i} f_i^l(z_i) u_i(z_i) dz_i$$

とおくと、

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_j^m Z_{ij}^{lm} = -V_i^l \qquad (i = 1, \cdots, N;\ l = 1, \cdots, M) \tag{5}$$

行列形式で書いてまとめると、

$$\left[\begin{array}{c:c:c} [Z_{ij}^{11}] & \cdots & [Z_{ij}^{1M}] \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline [Z_{ij}^{M1}] & \cdots & [Z_{ij}^{MM}] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} [I_j^1] \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline [I_j^M] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -[V_j^1] \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline -[V_j^M] \end{array}\right]$$

小行列は次のようになる。

$$[Z_{ij}^{lm}] = \begin{bmatrix} Z_{11}^{lm} & \cdots & Z_{1N}^{lm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}^{lm} & \cdots & Z_{NN}^{lm} \end{bmatrix}$$

$$[I_j^m] = \begin{bmatrix} I_1^m \\ \vdots \\ I_N^m \end{bmatrix}, \quad [V_j^m] = \begin{bmatrix} V_1^m \\ \vdots \\ V_N^m \end{bmatrix}$$

行列要素はは次のようになる。

$$Z_{ij}^{lm} = \int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^l(z_i) G_{ij}(z_i, z_j) f_j^m(z_j) dz_j dz_i$$

$$V_i^l = V_i \int_{-h_i}^{h_i} f_i^l(z_i) u_i(z_i) dz_i \overset{\delta_i \to 0}{=} V_i \int_{-h_i}^{h_i} f_i^l(z_i) \delta(z_i) dz_i = V_i$$

4.3 基底関数の特異点の回避

次章の基底関数を見ると、(1),(2)の基底関数は

$$k_0 h_i = 2\pi \frac{h_i}{\lambda} = n\pi$$

つまり、h_i が半波長の整数倍となるとき分母が０となり、インピーダンス行列が計算できない。

実際には特異点の分類では「除去可能な特異点」となる。
(3)の基底関数も同様に特異点が存在し、

$$k_0 h_i = 2\pi\frac{h_i}{\lambda} = \frac{n\pi}{2}$$

つまり、h_i が 1/4 波長の整数倍となるとき分母が 0 となる。
こうして数値的にインピーダンス行列が計算できなくなってしまう場合を回避するために次のように工夫する。D_i^l を $f_i^l(z_i)$ の分母とすると、式(5)より、

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_j^m Z_{ij}^{lm} = -V_i^l \qquad (i = 1,\cdots,N\,;\ l = 1,\cdots,M\,)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{I_j^m}{D_j^m}\left(D_i^l Z_{ij}^{lm} D_j^m\right) = -D_i^l V_i^l \qquad (i = 1,\cdots,N\,;\ l = 1,\cdots,M\,)$$

ここで、新たに I_j^m を $\frac{I_j^m}{D_j^m}$ と、Z_{ij}^{lm} を $D_i^l Z_{ij}^{lm} D_j^m$ と、V_i^l を $D_i^l V_i^l$ と置き換えて考えると 4.2 の結果がそのまま使え、数値計算上も問題無い。

$$i_j^m = \frac{I_j^m}{D_j^m},\ z_{ij}^{lm} = D_i^l Z_{ij}^{lm} D_j^m,\ v_i^l = D_i^l V_i^l \tag{6}$$

とおくと、

行列形式で書いてまとめると、

$$\left[\begin{array}{c:c:c} \left[z_{ij}^{11}\right] & \cdots & \left[z_{ij}^{1M}\right] \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \left[z_{ij}^{M1}\right] & \cdots & \left[z_{ij}^{MM}\right] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \left[i_j^1\right] \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \left[i_j^M\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\left[v_j^1\right] \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline -\left[v_j^M\right] \end{array}\right]$$

小行列は次のようになる。

$$\left[z_{ij}^{lm}\right] = \begin{bmatrix} z_{11}^{lm} & \cdots & z_{1N}^{lm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1}^{lm} & \cdots & z_{NN}^{lm} \end{bmatrix}$$

$$\left[i_j^m\right] = \begin{bmatrix} i_1^m \\ \vdots \\ i_N^m \end{bmatrix},\quad \left[v_j^m\right] = \begin{bmatrix} v_1^m \\ \vdots \\ v_N^m \end{bmatrix}$$

行列要素は次のようになる。

$$z_{ij}^{lm}=\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\{D_i^l f_i^l(z_i)\}G_{ij}(z_i,z_j)\{D_j^m f_j^m(z_j)\}dz_j dz_i$$

$$v_i^l=V_i\int_{-h_i}^{h_i}\{D_i^l f_i^l(z_i)\}u_i(z_i)dz_i \overset{\delta_i\to 0}{=} V_i\int_{-h_i}^{h_i}\{D_i^l f_i^l(z_i)\}\delta(z_i)dz_i=V_iD_i^l$$

ここで、D_i^l は $f_i^l(z_i)$ の分母だから、$D_i^l f_i^l(z_i)$ は $f_i^l(z_i)$ の分子を意味する。

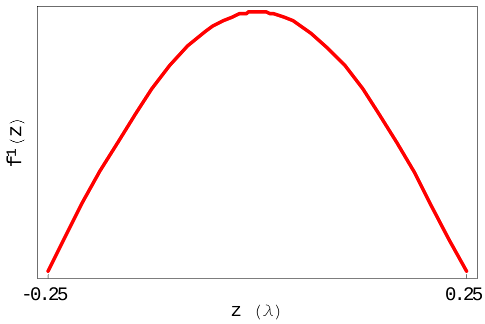
5. 基底関数

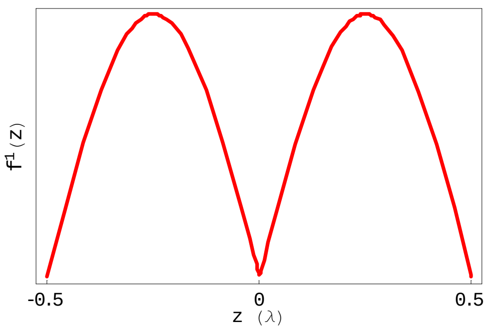
提案されている３つの基底関数を紹介する。ICT のもとの論文[1]では(1)と(2)の２つの基底関数が用いられている。それを **Storer Two-Term ICT** と呼ぶ。そして、長いアンテナに対しても適用できるように(3)の基底関数が導入された[5]。(1)と(3)の基底関数を用いるとき **Tai Two-Trem ICT** と呼ぶ。また、(1), (2), (3)の全ての基底関数を用いるとき、**Three-Term ICT** と呼ぶ。

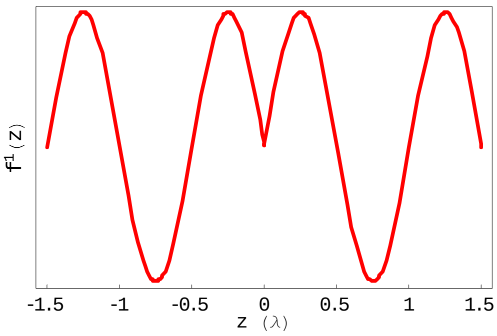
(1) Sinusoid

$$f_i^1(z_i)=\frac{\sin\{k_0(h_i-|z_i|)\}}{\sin(k_0h_i)}$$

伝送線路や半波長ダイポールアンテナの近似解析でよく用いる正弦波である。アンテナの端 $|z_i|=h_i$ で電流が０になるようにしてある。また、分母の $\sin(k_0h_i)$ は $z_i=0$ の給電点で大きさを１にするための規格化係数である。

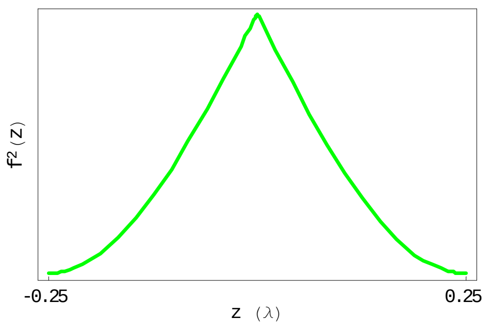


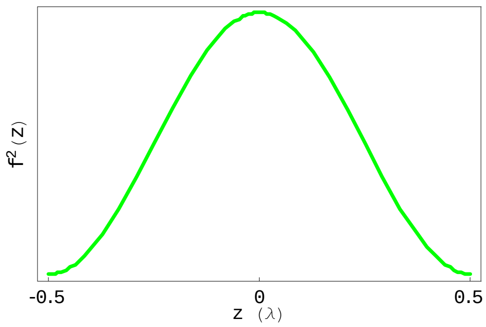


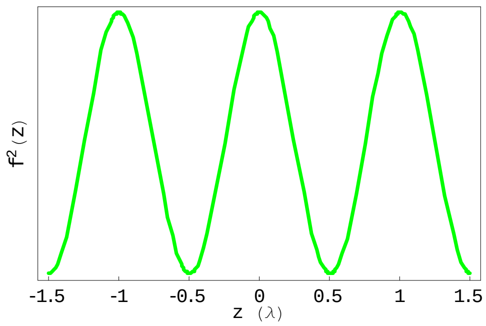


(2) Storer

$$f_i^{\,2}(z_i)=\frac{1-\cos\{k_0(h_i-|z_i|)\}}{1-\cos(k_0 h_i)}$$

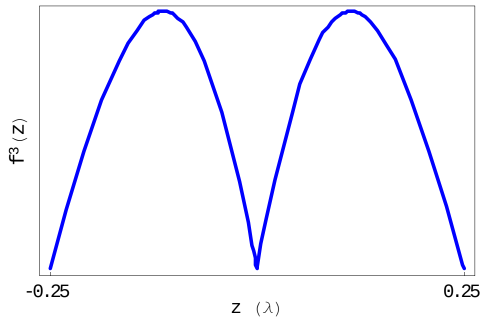


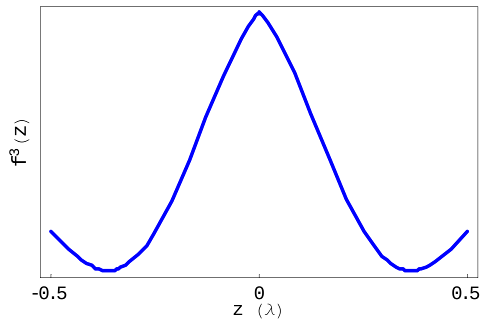


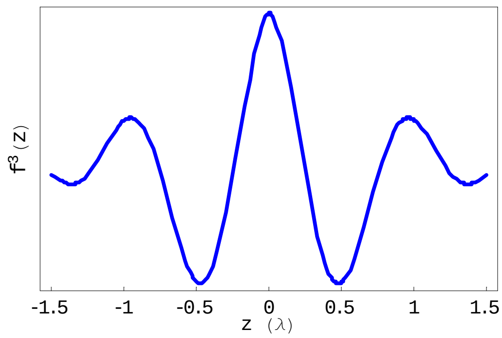


(3) Tai

$$f_i^{\,3}(z_i)=\frac{k_0\left(h_i-|z_i|\right)\cos\left\{k_0\left(h_i-|z_i|\right)\right\}}{k_0 h_i\cos\left(k_0 h_i\right)}$$







6. インピーダンス行列要素の計算

6.1 インピーダンス行列要素計算の簡単化

6.1.1 微分項の簡単化

インピーダンス行列は

$$
\begin{aligned}
Z_{ij}^{lm} &= \int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^{\,l}(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)\,f_j^{\,m}(z_j)dz_jdz_i \\
&= -\frac{j\omega\mu}{4\pi}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^{\,l}(z_i)\left(1+\frac{1}{k_0^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial z_i^{\,2}}\right)\frac{\exp\left(-jk_0\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2}\right)}{\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2}}f_j^{\,m}(z_j)dz_jdz_i \\
&= -\frac{j\omega\mu}{4\pi}[\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^{\,l}(z_i)\,f_j^{\,m}(z_j)\frac{\exp\left(-jk_0\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2}\right)}{\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2}}dz_jdz_i \\
&\qquad +\frac{1}{k_0^{\,2}}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^{\,l}(z_i)\,f_j^{\,m}(z_j)\frac{\partial^2}{\partial z_i^{\,2}}\frac{\exp\left(-jk_0\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2}\right)}{\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2}}dz_jdz_i\,]
\end{aligned}
$$

で与えられるが、これを直接計算するのはz_iの２階編微分を含み、厄介である。そこで、モーメント法のルーフトップ基底関数でよく用いられる手法であるが、「電流はアンテナ終端で０である」ということを利用してより簡単な計算法に帰着することができる。

[補題]

$$\phi=\frac{\exp(-jk_0r)}{r}=\frac{\exp(-jk_0\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2})}{\sqrt{(z_i-z_j)^2+d^2}}$$

とすると、$\phi=g(z_i-z_j)$という関数形をしている。

$$\frac{\partial g}{\partial z_i}=-\frac{\partial g}{\partial z_j}$$

二項目の積分の計算

$$\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^{\,l}(z_i)\,f_j^{\,m}(z_j)\frac{\partial^2}{\partial z_i^{\,2}}g(z_i-z_j)dz_jdz_i$$

$$=-\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^l(z_i)f_j^m(z_j)\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}g(z_i-z_j)dz_j dz_i$$

z_j の積分に関して部分積分をすると

$$=-\int_{-h_i}^{h_i}\left\{\left[f_i^l(z_i)f_j^m(z_j)\frac{\partial}{\partial z_i}g(z_i-z_j)\right]_{-h_j}^{h_j}-\int_{-h_j}^{h_j}\left[f_i^l(z_i)\frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_i}g(z_i-z_j)\right]dz_j\right\}dz_i$$

アンテナの両端で電流の値が０となる基底関数 $f_j^m(h_j)=f_j^m(-h_j)=0$ を用いているので、

$$=\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\left[f_i^l(z_i)\frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_i}g(z_i-z_j)\right]dz_j dz_i$$

z_i の積分に関して部分積分をすると

$$=\int_{-h_j}^{h_j}\left\{\left[f_i^l(z_i)\frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j}g(z_i-z_j)\right]_{-h_i}^{h_i}-\int_{-h_i}^{h_i}\left[\frac{\partial f_i^l(z_i)}{\partial z_i}\frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j}g(z_i-z_j)\right]dz_i\right\}dz_j$$

アンテナの両端で電流の値が０となる基底関数 $f_i^l(h_j)=f_i^l(-h_j)=0$ を用いているので、

$$=-\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\left[\frac{\partial f_i^l(z_i)}{\partial z_i}\frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j}g(z_i-z_j)\right]dz_i dz_j$$

6.1.2 変数変換

$$Z_{ij}^{lm}=-\frac{j\omega\mu}{4\pi}[\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^l(z_i)f_j^m(z_j)g(z_i-z_j)dz_j dz_i$$
$$-\frac{1}{k_0{}^2}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\frac{\partial f_i^l(z_i)}{\partial z_i}\frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j}g(z_i-z_j)dz_j dz_i]$$

$$=-\frac{j\omega\mu}{4\pi k_0}[k_0\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} f_i^l(z_i)f_j^m(z_j)g(z_i-z_j)dz_j dz_i$$
$$-\frac{1}{k_0}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\frac{\partial f_i^l(z_i)}{\partial z_i}\frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j}g(z_i-z_j)dz_j dz_i]$$

$$-\frac{j\omega\mu}{4\pi k_0}=-\frac{j\omega\mu}{4\pi\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=-\frac{j\eta_0}{4\pi}=-\frac{j120\pi}{4\pi}=-j30$$

$$= -j30[k_0 \int_{-h_i}^{h_i} \int_{-h_j}^{h_j} f_i^l(z_i) f_j^m(z_j) g(z_i - z_j) dz_j dz_i$$

$$- \frac{1}{k_0} \int_{-h_i}^{h_i} \int_{-h_j}^{h_j} \frac{\partial f_i^l(z_i)}{\partial z_i} \frac{\partial f_j^m(z_j)}{\partial z_j} g(z_i - z_j) dz_j dz_i]$$

ここで、

$x_1 = k_0 z_i, x_2 = k_0 z_j$，$D = k_0 d$　とおくと、$L_1 = k_0 h_i, L_2 = k_0 h_j$ として

z_i	$-h_i$	$\to$	h_i
x_1	$-L_1$	$\to$	L_1

z_j	$-h_j$	$\to$	h_j
x_2	$-L_2$	$\to$	L_2

$$J = \begin{vmatrix} \partial z_i / \partial x_1 & \partial z_i / \partial x_2 \\ \partial z_j / \partial x_1 & \partial z_j / \partial x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/k_0 & 0 \\ 0 & 1/k_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{k_0{}^2}$$

となる。

$$= -j30[k_0 \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} f_i^l(x_1) f_j^m(x_2) \frac{k_0 \exp(-j\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2})}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2}} \frac{1}{k_0{}^2} dx_1 dx_2$$

$$- \frac{1}{k_0} \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \left\{ k_0 \frac{\partial f_i^l(x_1)}{\partial x_1} \right\} \left\{ k_0 \frac{\partial f_j^m(x_2)}{\partial x_2} \right\} \frac{k_0 \exp(-j\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2})}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2}} \frac{1}{k_0{}^2} dx_1 dx_2]$$

$$= -j30[\int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} f_i^l(x_1) f_j^m(x_2) \frac{\exp(-j\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2})}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2}} dx_1 dx_2$$

$$- \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \frac{\partial f_i^l(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial f_j^m(x_2)}{\partial x_2} \frac{\exp(-j\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2})}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2}} dx_1 dx_2]$$

まとめると、

$$Z_{ij}^{lm} = -j30 \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \left[f_i^l(x_1) f_j^m(x_2) - \frac{\partial f_i^l(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial f_j^m(x_2)}{\partial x_2} \right] \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

ここで、

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{\exp(-j\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2})}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + D^2}}$$

$$L_1 = k_0 h_i, L_2 = k_0 h_j$$

$$D = k_0 d$$

6.2 インピーダンス行列要素の計算

これからインピーダンス行列要素を計算する。ICT は一度式を計算すればモーメント法などに比べて計算が非常に高速で、使用メモリも少なくて済む。しかし、式の導出にものすごい労力を費やす必要がある。それは避けては通れないことだが、本稿では単純作業となる式の導出には Mathematica を用いる。Mathematica の記号数式処理機能をうまく利用するといかに人間の労力が軽減できるかを実感して欲しい。

また、インピーダンス行列要素の計算結果を見るとわかるが、非常に式が長く、書き写すだけでも間違える。よって、論文などに載っている式はそのまま信用しない方が良い（実際に論文にも間違いがある)。本テキストに掲載した式は手で書き写した訳ではないので間違いが無いはずだが、これだけ式が長いと読者が本テキストを読みながらプログラミングを行う際には読み間違えて入力をミスすることは確実である。そこで、入力した後は参考として掲載した数値積分による確認用の値と合うかどうか確認した方がよい。

6.2.1 Z_{ij}^{11}

$$f_i^1(z_i)=\frac{\sin\{k_0(h_i-|z_i|)\}}{\sin(k_0h_i)}$$

リアクションの計算では 4.3 節、6.1.2 節の議論より次の関数の計算に集中する。

$$f^1(x)=\sin(L-|x|)$$

この式は x の符号によって場合分けする必要があるので、積分範囲を図 4 に示すように分割する。

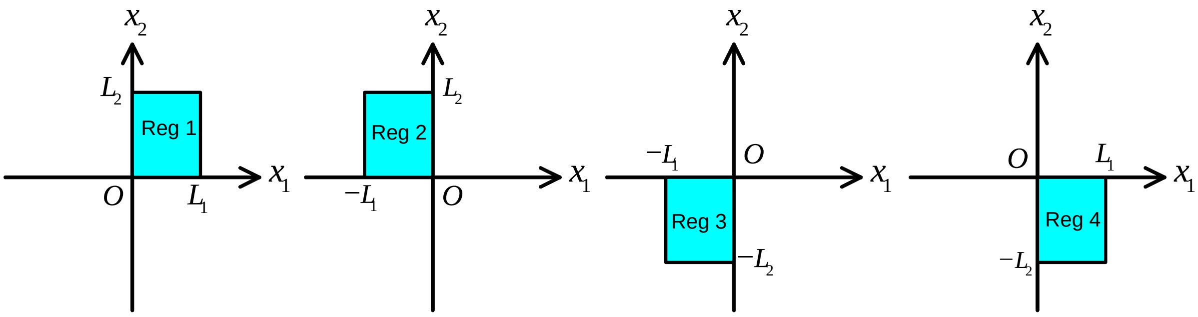


図 4 積分範囲の分割

$$f^1(x)=\begin{cases}\sin(L-x) & (x\ge 0)\\ \sin(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^1(x_1)=\begin{cases}\sin(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) \quad \cdots ① \\ \sin(L_1+x_1) & (x_1\le 0) \quad \cdots ② \end{cases} \\ f^1(x_2)=\begin{cases}\sin(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) \quad \cdots ③ \\ \sin(L_2+x_2) & (x_2\le 0) \quad \cdots ④ \end{cases} \end{array}\right.$$

ここで、リアクション計算の準備として微分も計算しておく

$$f^{1'}(x)=\begin{cases}-\cos(L-x) & (x\ge 0) \\ \cos(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{1'}(x_1)=\begin{cases}-\cos(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) \quad \cdots ⑤ \\ \cos(L_1+x_1) & (x_1\le 0) \quad \cdots ⑥ \end{cases} \\ f^{1'}(x_2)=\begin{cases}-\cos(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) \quad \cdots ⑦ \\ \cos(L_2+x_2) & (x_2\le 0) \quad \cdots ⑧ \end{cases} \end{array}\right.$$

リアクションを計算する。

$$Z_{ij}^{11}=-j30\int_{-L_1}^{L_1}\int_{-L_2}^{L_2}\left[f^1(x_1)f^1(x_2)-f^{1'}(x_1)f^{1'}(x_2)\right]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$\begin{aligned}=-j30[&\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\ &+\int_{-L_1}^{0}\int_0^{L_2}\{②③-⑥⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\ &+\int_{-L_1}^{0}\int_{-L_2}^{0}\{②④-⑥⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\ &+\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2\,]\end{aligned}$$

ここで、

$$(\text{第３項})=\int_{-L_1}^{0}\int_{-L_2}^{0}\{②④-⑥⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$x_1\to -x_1,\ x_2\to -x_2$$

$$=\int_{L_1}^{0}\int_{L_2}^{0}\{①③-⑤⑦\}\psi(-x_1,-x_2)(-dx_1)(-dx_2)$$

$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2=(\text{第１項})$$

$$(\text{第２項})=\int_{-L_1}^{0}\int_0^{L_2}\{②③-⑥⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$x_1\to -x_1,\ x_2\to -x_2$$

$$=\int_{L_1}^{0}\int_0^{-L_2}\{①④-⑤⑧\}\psi(-x_1,-x_2)(-dx_1)(-dx_2)$$

$$=\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2=(\text{第４項})$$

$$=-j60[\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$+\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2]$$

ここで、

$$P=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{\sin(L_1-x_1)\sin(L_2-x_2)-\cos(L_1-x_1)\cos(L_2-x_2)\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \quad \text{(1st term)}$$

$$Q=\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$=\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{\sin(L_1-x_1)\sin(L_2+x_2)+\cos(L_1-x_1)\cos(L_2+x_2)\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \quad \text{(2nd term)}$$

とおくと、

$$=-j60[P+Q]$$

$\boxed{\text{P の計算}}$

$$P=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{\sin(L_1-x_1)\sin(L_2-x_2)-\cos(L_1-x_1)\cos(L_2-x_2)\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}[-\frac{1}{2}\{\cos(L_1+L_2-(x_1+x_2))-\cos(L_1-L_2-(x_1-x_2))\}$$
$$-\frac{1}{2}\{\cos(L_1+L_2-(x_1+x_2))+\cos(L_1-L_2-(x_1-x_2))\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

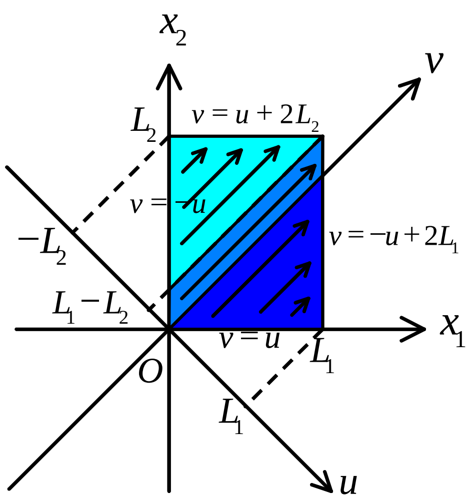
$$=-\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\cos(L_1+L_2-(x_1+x_2))\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

ここで、

$$\begin{cases}u=x_1-x_2\\ v=x_1+x_2\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=(u+v)/2\\ x_2=(-u+v)/2\end{cases}$$

と置換積分すると、

$$J=\begin{vmatrix}\partial x_1/\partial u & \partial x_1/\partial v\\ \partial x_2/\partial u & \partial x_2/\partial v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$



なぜこのような変換になるかというと、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

となり、(u,v) 座標は (x_1,x_2) 座標を 45 度回転させて $\sqrt{2}$ 倍したものだからである。

ついでに、 $p = L_1 - L_2, q = L_1 + L_2$ とおく

$$= \left[\int_{u=-L_2}^{L_1-L_2} \int_{v=-u}^{u+2L_2} dudv + \int_{u=L_1-L_2}^{0} \int_{v=-u}^{-u+2L_1} dudv + \int_{u=0}^{L_1} \int_{v=u}^{-u+2L_1} dudv \right]$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}\cos(q-v) \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}} \right\}$$

v に関しては公式を使って積分できる。
u に関しての積分のときは

$$C_D(x) = 2\int_0^x \cos u \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}} du$$
$$= E_i\left(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)\right) - E_i\left(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)\right)$$

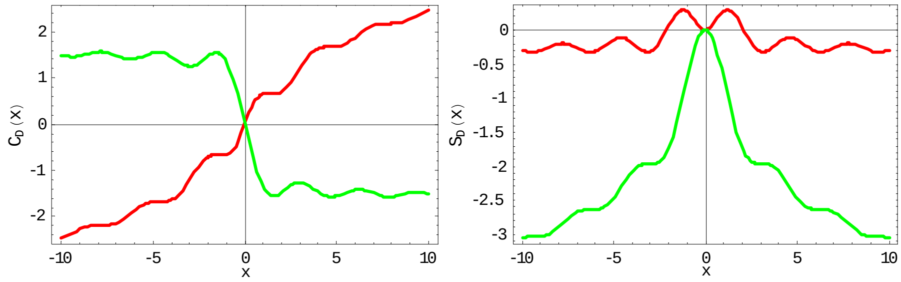
$$S_D(x) = 2\int_0^x \sin u \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}} du$$
$$= jE_i\left(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)\right) + jE_i\left(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)\right) - 2jE_i(-jD)$$

という関数を定義すると、これらの関数で表すことが出来る。 E_i は

$$E_i(z) = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

で定義される**指数積分関数**であり、多くの数値計算用サブルーチンで利用できる。

$C_D(x)$は偶関数の0からxまでの積分なので奇関数となり、$S_D(x)$は奇関数の0からxまでの積分なので偶関数となる。$D=1$のときの一例を次の図に示す。



この計算は単純で面倒なので、Mathematicaを利用して次のように計算する。

P

■vで積分

```
In[1]:= f[u_, v_] := -1/2 * Cos[(L1 + L2) - v] * ψ[u];
        pvint1[1] = Simplify[
          Integrate[f[u, v], {v, -u, u + 2 * L2}]
         ];
        pvint1[2] = Simplify[
          Integrate[f[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
         ];
        pvint1[3] = Simplify[
          Integrate[f[u, v], {v, u, -u + 2 * L1}]
         ];
```

■uで積分

変換規則の適用

```
In[5]:= Do[
         pvint2[i] =
          TrigExpand[pvint1[i]] /. {Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2} //
           Simplify,
         {i, 1, 3}
        ]
```

定積分だから上端を代入した値から

下端を代入した値を引く

```
In[6]:= P =
         ((pvint2[1] /. u → L1 - L2) - (pvint2[1] /. u → -L2)) +
          ((pvint2[2] /. u → 0) - (pvint2[2] /. u → L1 - L2)) +
          ((pvint2[3] /. u → L1) - (pvint2[3] /. u → 0)) /.
          {Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u]} // Simplify

Out[6]= 1/2 (Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1] - Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
          Cos[L1] Cos[L2] Sd[L2] - Cd[L1] Cos[L2] Sin[L1] + Cd[L1 - L2] Cos[L2] Sin[L1] -
          Cd[L1 - L2] Cos[L1] Sin[L2] - Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2])

In[7]:= Collect[P, {Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Cd[L1], Sd[L1], Cd[L2], Sd[L2]}]

Out[7]= 1/2 Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1] - 1/2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
         1/2 Cos[L1] Cos[L2] Sd[L2] - 1/2 Cd[L1] Cos[L2] Sin[L1] -
         1/2 Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] + 1/2 Cd[L1 - L2] (Cos[L2] Sin[L1] - Cos[L1] Sin[L2])
```

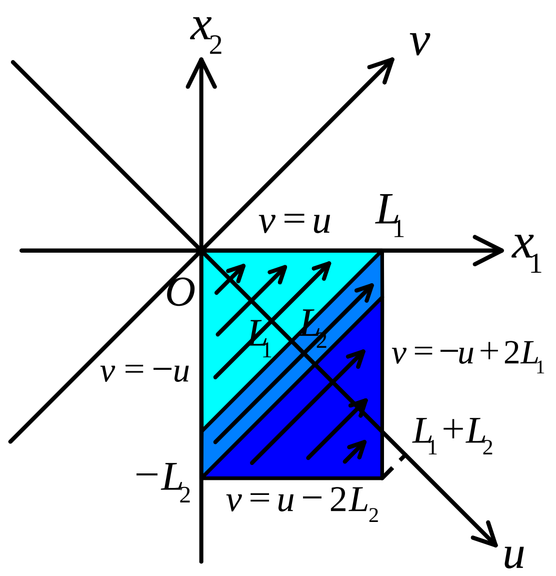
Qの計算

$$Q = \int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{\sin(L_1 - x_1)\sin(L_2 + x_2) + \cos(L_1 - x_1)\cos(L_2 + x_2)\}\psi(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}[-\frac{1}{2}\{\cos(L_1+L_2-(x_1-x_2))-\cos(L_1-L_2-(x_1+x_2))\}$$
$$+\frac{1}{2}\{\cos(L_1+L_2-(x_1-x_2))+\cos(L_1-L_2-(x_1+x_2))\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\cos(L_1-L_2-(x_1+x_2))\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

P の場合と同様の置換積分を行う。ただし、積分範囲は異なり、次の図のようになる。



$$=\left[\int_{u=0}^{L_1}\int_{v=-u}^{u}dudv+\int_{u=L_1}^{L_2}\int_{v=-u}^{-u+2L_1}dudv+\int_{u=L_2}^{L_1+L_2}\int_{v=u-2L_2}^{-u+2L_1}dudv\right]$$
$$\left\{\frac{1}{2}\cos(p-v)\frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}}\right\}$$

Mathematica で計算すると

Q

■ vで積分

```
In[1]:= g[u_, v_] := 1/2 * Cos[(L1 - L2) - v] * ψ[u];
  qvint1[1] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, -u, u}]
    ];
  qvint1[2] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
    ];
  qvint1[3] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, u - 2 * L2, -u + 2 * L1}]
    ];
```

■ uで積分

```
In[5]:= Do[
   qvint2[i] =
    TrigExpand[qvint1[i]] /. {Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2} //
     Simplify,
   {i, 1, 3}
  ]

In[6]:= Q =
   ((qvint2[1] /. u → L1) - (qvint2[1] /. u → 0)) +
     ((qvint2[2] /. u → L2) - (qvint2[2] /. u → L1)) +
     ((qvint2[3] /. u → L1 + L2) - (qvint2[3] /. u → L2)) /.
    {Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u]} // Simplify

Out[6]= 1/2 (Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1] + Cos[L1] Cos[L2] Sd[L2] -
    Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1 + L2] - Cd[L1] Cos[L2] Sin[L1] + Cd[L1 + L2] Cos[L2] Sin[L1] -
    Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] + Cd[L1 + L2] Cos[L1] Sin[L2] + Sd[L1 + L2] Sin[L1] Sin[L2])

In[7]:= Collect[Q, {Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Cd[L1], Sd[L1], Cd[L2], Sd[L2]}]

Out[7]= 1/2 Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1] + 1/2 Cos[L1] Cos[L2] Sd[L2] - 1/2 Cd[L1] Cos[L2] Sin[L1] -
   1/2 Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] + 1/2 (-Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1 + L2] +
     Cd[L1 + L2] Cos[L2] Sin[L1] + Cd[L1 + L2] Cos[L1] Sin[L2] + Sd[L1 + L2] Sin[L1] Sin[L2])
```

まとめると、

Z11

```
In[15]:= -I*60*(P+Q) // Simplify

Out[15]= -30 ⅈ (2 Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1] - Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
        2 Cos[L1] Cos[L2] Sd[L2] - Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1 + L2] - 2 Cd[L1] Cos[L2] Sin[L1] +
        Cd[L1 - L2] Cos[L2] Sin[L1] + Cd[L1 + L2] Cos[L2] Sin[L1] - Cd[L1 - L2] Cos[L1] Sin[L2] -
        2 Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] + Cd[L1 + L2] Cos[L1] Sin[L2] + Sd[L1 + L2] Sin[L1] Sin[L2])
```

■ L1=L2=Lのとき

```
In[16]:= -I*60*(P+Q) /. {L1 → L, L2 → L} /. {Cd[0] → 0, Sd[0] → 0} // Simplify

Out[16]= -30 ⅈ (4 Cos[L]^2 Sd[L] - Cos[2 L] Sd[2 L] + (-2 Cd[L] + Cd[2 L]) Sin[2 L])
```

[確認＆デバッグのノウハウ]

この式変形は単純だけど式がすごく長いので人間にとっては間違いやすい。そのために Mathematica を用いて式変形しているのだが、合っているのかどうか不安である。そこで、次のようにL_1, L_2, Dに適当な値を代入して数値積分で直接計算した値と比較して同じになることを確認することをお薦めする。

今導出した式に適当な値を代入する。

Closed Form

```
In[17]:= L1 = 1;
         L2 = 2;
         d = 3;
         ψ[u_] := Exp[-I*Sqrt[u^2 + d^2]] / Sqrt[u^2 + d^2];
         Cd[x_] := 2*NIntegrate[Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         Sd[x_] := 2*NIntegrate[Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];

In[23]:= -I*60*(P+Q)

Out[23]= 5.83341 + 20.8354 ⅈ
```

直接数値積分した値と比較する。

Numerical Integration

```
In[24]:= Clear[L, d];
L[1] = 1;
L[2] = 2;
d = 3;
ψ[u_] := Exp[-I * √(u^2 + d^2)] / √(u^2 + d^2);
f1[i_, x_] = Sin[L[i] - Abs[x]];
df1[i_, x_] = Sign[-x] * Cos[L[i] - Abs[x]];
-I * 30 * NIntegrate[(f1[1, x1] * f1[2, x2] - df1[1, x1] * df1[2, x2]) * ψ[x1 - x2],
  {x1, -L[1], L[1]}, {x2, -L[2], L[2]}]

Out[31]= 5.83341 + 20.8354 i
```

これらが一致しているのだから導出した式は合っているに違いない。まだ不安なときはいくつか他の適当な値を L_1, L_2, D に代入してどんな L_1, L_2, D に対しても両方の結果が一致することを確認する。

6.2.2 $Z_{ij}^{12} (= Z_{ji}^{21})$

$$f^1(x) = \begin{cases} \sin(L-x) & (x \ge 0) \\ \sin(L+x) & (x \le 0) \end{cases}, \quad f^2(x) = \begin{cases} 1-\cos(L-x) & (x \ge 0) \\ 1-\cos(L+x) & (x \le 0) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^1(x_1) = \begin{cases} \sin(L_1 - x_1) & (x_1 \ge 0) & \cdots① \\ \sin(L_1 + x_1) & (x_1 \le 0) & \cdots② \end{cases} \\ f^2(x_2) = \begin{cases} 1-\cos(L_2 - x_2) & (x_2 \ge 0) & \cdots③ \\ 1-\cos(L_2 + x_2) & (x_2 \le 0) & \cdots④ \end{cases} \end{array}\right.$$

$$f^{1'}(x) = \begin{cases} -\cos(L-x) & (x \ge 0) \\ \cos(L+x) & (x \le 0) \end{cases}, \quad f^{2'}(x) = \begin{cases} -\sin(L-x) & (x \ge 0) \\ \sin(L+x) & (x \le 0) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{1'}(x_1) = \begin{cases} -\cos(L_1 - x_1) & (x_1 \ge 0) & \cdots⑤ \\ \cos(L_1 + x_1) & (x_1 \le 0) & \cdots⑥ \end{cases} \\ f^{2'}(x_2) = \begin{cases} -\sin(L_2 - x_2) & (x_2 \ge 0) & \cdots⑦ \\ \sin(L_2 + x_2) & (x_2 \le 0) & \cdots⑧ \end{cases} \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{P の計算}}$

$$P = \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} \{①③ - ⑤⑦\}\psi(x_1, x_2)dx_1dx_2$$
$$= \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} [\sin(L_1 - x_1)\{1-\cos(L_2 - x_2)\} - \cos(L_1 - x_1)\sin(L_2 - x_2)]\psi(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

■積和公式適用関数の定義

```
In[1]:= TrigTimesToAdd[f_] := Module[{a, b},
          f /. {Sin[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] + Sin[(a-b)*u]),
            Cos[a_*u]*Sin[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] - Sin[(a-b)*u]),
            Cos[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Cos[(a+b)*u] + Cos[(a-b)*u]),
            Sin[a_*u]*Sin[b_*u] → -1/2 (Cos[(a+b)*u] - Cos[(a-b)*u]),
            Cos[a_*u]^2 → 1/2 (Cos[2*a*u] + 1),
            Sin[a_*u]^2 → -1/2 (Cos[2*a*u] - 1)}];
```

P

■vで積分

In[2]:=
```
jacobi = 1/2;
f[u_, v_] :=
  jacobi * (Sin[L1 - x1] * (1 - Cos[L2 - x2]) - Cos[L1 - x1] * Sin[L2 - x2]) * ψ[u] /.
   {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
pvint1[1] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, -u, u + 2 * L2}]
  ];
pvint1[2] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
  ];
pvint1[3] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, u, -u + 2 * L1}]
  ];
```

■uで積分

In[7]:=
```
Do[
  pvint2[i] =
   Expand[ TrigTimesToAdd[TrigExpand[pvint1[i]]]] /.
     {Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2, ψ[u_] → Ed[u] / 2} // Simplify,
  {i, 1, 3}
 ]
```

In[8]:=
```
P =
  ((pvint2[1] /. u → L1 - L2) - (pvint2[1] /. u → -L2)) +
    ((pvint2[2] /. u → 0) - (pvint2[2] /. u → L1 - L2)) +
    ((pvint2[3] /. u → L1) - (pvint2[3] /. u → 0)) /.
   {Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
    Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify
```

Out[8]=

$$\frac{1}{2}\,(\mathrm{Cd}[L1-L2]\,\mathrm{Cos}[L1-L2]+\mathrm{Cd}[L2]\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Cos}[L2]+\mathrm{Ed}[L1]-\mathrm{Ed}[L1-L2]-\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Ed}[L2]-\mathrm{Sd}[L1]\,\mathrm{Sin}[L1]+\mathrm{Cos}[L2]\,\mathrm{Sd}[L1-L2]\,\mathrm{Sin}[L1]+\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2]-\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L1-L2]\,\mathrm{Sin}[L2]+\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L2]\,\mathrm{Sin}[L2]-\mathrm{Cd}[L1]\,(\mathrm{Cos}[L1]+\mathrm{Sin}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2]))$$

In[9]:=
```
Collect[P, {Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
  Cd[L2], Sd[L2]}]
```

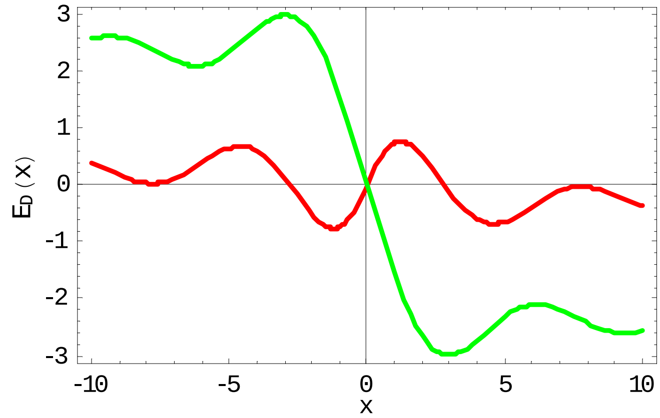
Out[9]=

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cd}[L1-L2]\,\mathrm{Cos}[L1-L2]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Cd}[L2]\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Cos}[L2]+\frac{\mathrm{Ed}[L1]}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{Ed}[L1-L2]-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Ed}[L2]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L2]\,\mathrm{Sin}[L2]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sd}[L1-L2]\,(\mathrm{Cos}[L2]\,\mathrm{Sin}[L1]-\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2])+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sd}[L1]\,(-\mathrm{Sin}[L1]+\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2])+\frac{1}{2}\,\mathrm{Cd}[L1]\,(-\mathrm{Cos}[L1]-\mathrm{Sin}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2])$$

ここでは、

$$E_D(x) = 2\int_0^x \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}}du$$
$$= 2\int_{\log(D)}^{\log(\sqrt{x^2+D^2}+x)} \exp\left(-j\frac{1}{2}\left\{\exp(t)+D^2\exp(-t)\right\}\right)dt$$

という関数が定義され、使われた。$D=1$ のときの $E_D(x)$ のグラフの例を次に示す。この関数は偶関数の 0 から x までの積分なので奇関数となる。D が小さいとき、後者の表現を用いた方が数値計算が速く収束する。



Q の計算

$$Q = \int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$= \int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\left[\sin(L_1-x_1)\{1-\cos(L_2+x_2)\}+\cos(L_1-x_1)\sin(L_2+x_2)\right]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Q

■vで積分

In[10]:=
```
jacobi = 1/2;
g[u_, v_] :=
  jacobi * (Sin[L1 - x1] * (1 - Cos[L2 + x2]) + Cos[L1 - x1] * Sin[L2 + x2]) * ψ[u] /.
   {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
qvint1[1] = Simplify[
    Integrate[g[u, v], {v, -u, u}]
  ];
qvint1[2] = Simplify[
    Integrate[g[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
  ];
qvint1[3] = Simplify[
    Integrate[g[u, v], {v, u - 2 * L2, -u + 2 * L1}]
  ];
```

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "qvint1" is similar to existing symbol "pvint1".

■uで積分

In[15]:=
```
Do[
 qvint2[i] =
  Expand[ TrigTimesToAdd[TrigExpand[qvint1[i]]]] /.
     {Cos[u_ / 2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Cd[d / 2, u / 2],
      Sin[u_ / 2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Sd[d / 2, u / 2]} /.
    {Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2, ψ[u_] → Ed[u] / 2} //
   Simplify,
 {i, 1, 3}
]
```

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "qvint2" is similar to existing symbol "pvint2".

In[16]:=
```
Q =
 ((qvint2[1] /. u→ L1) - (qvint2[1] /. u → 0)) +
   ((qvint2[2] /. u→ L2) - (qvint2[2] /. u→ L1)) +
   ((qvint2[3] /. u→ L1 + L2) - (qvint2[3] /. u→ L2)) /.
  {Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
   Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify
```

Out[16]=
$$\frac{1}{2}(\mathrm{Cd}[L2]\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Cos}[L2]-\mathrm{Cd}[L1+L2]\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Cos}[L2]-\mathrm{Ed}[L1]-\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Ed}[L2]+\mathrm{Ed}[L1+L2]+\mathrm{Sd}[L1]\,\mathrm{Sin}[L1]-\mathrm{Cos}[L2]\,\mathrm{Sd}[L1+L2]\,\mathrm{Sin}[L1]+\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2]+\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L2]\,\mathrm{Sin}[L2]-\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L1+L2]\,\mathrm{Sin}[L2]+\mathrm{Cd}[L1+L2]\,\mathrm{Sin}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2]+\mathrm{Cd}[L1]\,(\mathrm{Cos}[L1]-\mathrm{Sin}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2]))$$

In[17]:=
```
Collect[Q, {Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
   Cd[L2], Sd[L2]}]
```

Out[17]=
$$\frac{1}{2}\mathrm{Cd}[L2]\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Cos}[L2]-\frac{\mathrm{Ed}[L1]}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L2]\,\mathrm{Sin}[L2]+\frac{1}{2}\mathrm{Sd}[L1]\,(\mathrm{Sin}[L1]+\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2])+\frac{1}{2}\mathrm{Cd}[L1]\,(\mathrm{Cos}[L1]-\mathrm{Sin}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2])+\frac{1}{2}(-\mathrm{Cd}[L1+L2]\,\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Cos}[L2]-\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Ed}[L2]+\mathrm{Ed}[L1+L2]-\mathrm{Cos}[L2]\,\mathrm{Sd}[L1+L2]\,\mathrm{Sin}[L1]-\mathrm{Cos}[L1]\,\mathrm{Sd}[L1+L2]\,\mathrm{Sin}[L2]+\mathrm{Cd}[L1+L2]\,\mathrm{Sin}[L1]\,\mathrm{Sin}[L2])$$

Z12

```
In[18]:= -I*60*(P+Q) // Simplify

Out[18]= -30 ⅈ (Cd[L1 - L2] Cos[L1 - L2] + 2 Cd[L2] Cos[L1] Cos[L2] -
         Cd[L1 + L2] Cos[L1] Cos[L2] - Ed[L1 - L2] - 2 Cos[L1] Ed[L2] +
         Ed[L1 + L2] + Cos[L2] Sd[L1 - L2] Sin[L1] - Cos[L2] Sd[L1 + L2] Sin[L1] +
         2 Cos[L1] Sd[L1] Sin[L2] - Cos[L1] Sd[L1 - L2] Sin[L2] + 2 Cos[L1] Sd[L2] Sin[L2] -
         Cos[L1] Sd[L1 + L2] Sin[L2] - 2 Cd[L1] Sin[L1] Sin[L2] + Cd[L1 + L2] Sin[L1] Sin[L2])
```

■ L1=L2=Lのとき

```
In[19]:= -I*60*(P+Q) /. {L1 → L, L2 → L} /. {Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Ed[0] → 0} //
          Simplify

Out[19]= -30 ⅈ (2 Cd[L] Cos[2 L] - Cd[2 L] Cos[2 L] -
         2 Cos[L] Ed[L] + Ed[2 L] + 2 Sd[L] Sin[2 L] - Sd[2 L] Sin[2 L])
```

[確認]

Closed Form

```
In[20]:= L1 = 1;
         L2 = 2;
         d = 3;
```

$$\psi[u\_] := \frac{\mathrm{Exp}\left[-I*\sqrt{u^2+d^2}\right]}{\sqrt{u^2+d^2}};$$

```
         Cd[x_] := 2*NIntegrate[Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         Sd[x_] := 2*NIntegrate[Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         Ed[x_] := 2*NIntegrate[ψ[u], {u, 0, x}];

In[27]:= -I*60*(P+Q)

Out[27]= 4.35738 + 16.9133 ⅈ
```

Numerical Integration

In[28]:=
```
Clear[L, d];
L[1] = 1;
L[2] = 2;
d = 3;
ψ[u_] := Exp[-I * Sqrt[u^2 + d^2]] / Sqrt[u^2 + d^2];
f1[i_, x_] = Sin[L[i] - Abs[x]];
df1[i_, x_] = Sign[-x] * Cos[L[i] - Abs[x]];
f2[i_, x_] = 1 - Cos[L[i] - Abs[x]];
df2[i_, x_] = Sign[-x] * Sin[L[i] - Abs[x]];
-I * 30 * NIntegrate[(f1[1, x1] * f2[2, x2] - df1[1, x1] * df2[2, x2]) * ψ[x1 - x2],
  {x1, -L[1], L[1]}, {x2, -L[2], L[2]}]
```

Out[37]= 4.35738 + 16.9133 i

6.2.3 Z_{ij}^{22}

$$f^2(x)=\begin{cases}1-\cos(L-x) & (x\ge 0)\\ 1-\cos(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^2(x_1)=\begin{cases}1-\cos(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) & \cdots ①\\ 1-\cos(L_1+x_1) & (x_1\le 0) & \cdots ②\end{cases} \\ f^2(x_2)=\begin{cases}1-\cos(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) & \cdots ③\\ 1-\cos(L_2+x_2) & (x_2\le 0) & \cdots ④\end{cases}\end{array}\right.$$

$$f^{2\,\prime}(x)=\begin{cases}-\sin(L-x) & (x\ge 0)\\ \sin(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{2\,\prime}(x_1)=\begin{cases}-\sin(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) & \cdots ⑤\\ \sin(L_1+x_1) & (x_1\le 0) & \cdots ⑥\end{cases} \\ f^{2\,\prime}(x_2)=\begin{cases}-\sin(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) & \cdots ⑦\\ \sin(L_2+x_2) & (x_2\le 0) & \cdots ⑧\end{cases}\end{array}\right.$$

P の計算

$$P=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left[\{1-\cos(L_1-x_1)\}\{1-\cos(L_2-x_2)\}-\sin(L_1-x_1)\sin(L_2-x_2)\right]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

■積和公式適用関数の定義

```
In[1]:= TrigTimesToAdd[f_] := Module[{a, b},
    f /. {Sin[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] + Sin[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]*Sin[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] - Sin[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Cos[(a+b)*u] + Cos[(a-b)*u]),
      Sin[a_*u]*Sin[b_*u] → -1/2 (Cos[(a+b)*u] - Cos[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]^2 → 1/2 (Cos[2*a*u] + 1),
      Sin[a_*u]^2 → -1/2 (Cos[2*a*u] - 1)}];
```

P

■vで積分

```
In[2]:= jacobi = 1/2;
f[u_, v_] :=
  jacobi*((1 - Cos[L1 - x1])*(1 - Cos[L2 - x2]) - Sin[L1 - x1]*Sin[L2 - x2])*ψ[u] /.
   {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
pvint1[1] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, -u, u + 2*L2}]
  ];
pvint1[2] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, -u, -u + 2*L1}]
  ];
pvint1[3] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, u, -u + 2*L1}]
  ];
```

■uで積分

```
In[7]:= Do[
  pvint2[i] =
   Expand[TrigTimesToAdd[TrigExpand[pvint1[i]]]] /.
    {(u_)*ψ[u_] → Ud[u]/2, Cos[u_]*ψ[u_] → Cd[u]/2, Cos[u_]*ψ[u_] → Cd[u]/2,
     Sin[u_]*ψ[u_] → Sd[u]/2, ψ[u_] → Ed[u]/2} // Simplify,
  {i, 1, 3}
 ]

In[8]:= P =
  ((pvint2[1] /. u→ L1- L2) - (pvint2[1] /. u→ -L2)) +
   ((pvint2[2] /. u→ 0) - (pvint2[2] /. u→ L1- L2)) +
   ((pvint2[3] /. u→ L1) - (pvint2[3] /. u→ 0)) /.
  {Ud[0] → 0, Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u],
   Sd[-u_] → Sd[u], Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify
```

Out[8]=
$$\frac{1}{2}\big((-L1+L2)\,Ed[L1-L2]+L2\,Ed[L2]+Cos[L1]\,Sd[L1]-Cos[L1]\,Cos[L2]\,Sd[L1-L2]+Cos[L2]\,Sd[L2]-Cd[L1]\,Sin[L1]+Cd[L1-L2]\,Cos[L2]\,Sin[L1]+Cd[L2]\,Cos[L2]\,Sin[L1]-Ed[L2]\,Sin[L1]+Ed[L1]\,(L1-Sin[L2])-Cd[L2]\,Sin[L2]+Cd[L1]\,Cos[L1]\,Sin[L2]-Cd[L1-L2]\,Cos[L1]\,Sin[L2]+Sd[L1]\,Sin[L1]\,Sin[L2]-Sd[L1-L2]\,Sin[L1]\,Sin[L2]+Sd[L2]\,Sin[L1]\,Sin[L2]-Ud[L1]+Ud[L1-L2]-Ud[L2]\big)$$

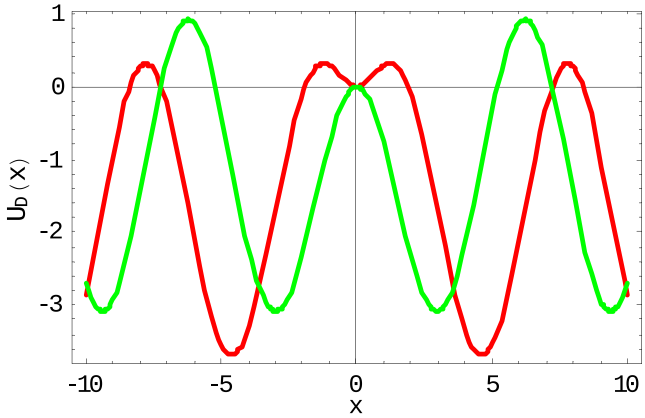
```
In[9]:= Collect[P, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1],
   Sd[L1], Ed[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2]}]
```

Out[9]=
$$\frac{1}{2}(-L1+L2)\,Ed[L1-L2]+\frac{1}{2}Ed[L2]\,(L2-Sin[L1])+\frac{1}{2}Ed[L1]\,(L1-Sin[L2])+$$
$$\frac{1}{2}Cd[L2]\,(Cos[L2]\,Sin[L1]-Sin[L2])+\frac{1}{2}Cd[L1-L2]\,(Cos[L2]\,Sin[L1]-Cos[L1]\,Sin[L2])+$$
$$\frac{1}{2}Cd[L1]\,(-Sin[L1]+Cos[L1]\,Sin[L2])+$$
$$\frac{1}{2}Sd[L1-L2]\,(-Cos[L1]\,Cos[L2]-Sin[L1]\,Sin[L2])+$$
$$\frac{1}{2}Sd[L1]\,(Cos[L1]+Sin[L1]\,Sin[L2])+$$
$$\frac{1}{2}Sd[L2]\,(Cos[L2]+Sin[L1]\,Sin[L2])-\frac{Ud[L1]}{2}+\frac{1}{2}Ud[L1-L2]-\frac{Ud[L2]}{2}$$

ここでは、

$$
\begin{aligned}
U_D(x) &= 2\int_0^x u \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}}du \\
&= -2j\left\{\exp(-jD) - \exp(-j\sqrt{D^2+x^2})\right\}
\end{aligned}
$$

という関数が定義され、使われた。幸運にも解析的に積分できる(Mathematica で直接計算可)。$D=1$ のときの $U_D(x)$ のグラフの例を次に示す。この関数は奇関数の 0 から x までの積分なので偶関数となる。



Q の計算

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\left[\{1-\cos(L_1-x_1)\}\{1-\cos(L_2+x_2)\}+\sin(L_1-x_1)\sin(L_2+x_2)\right]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2
\end{aligned}
$$

Q

■vで積分

```
In[10]:= jacobi = 1/2;
g[u_, v_] :=
  jacobi*((1 - Cos[L1 - x1])*(1 - Cos[L2 + x2]) + Sin[L1 - x1]*Sin[L2 + x2])*ψ[u] /.
   {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
qvint1[1] = Simplify[
   Integrate[g[u, v], {v, -u, u}]
  ];
qvint1[2] = Simplify[
   Integrate[g[u, v], {v, -u, -u + 2*L1}]
  ];
qvint1[3] = Simplify[
   Integrate[g[u, v], {v, u - 2*L2, -u + 2*L1}]
  ];

General::spell1 : Possible spelling error: new
   symbol name "qvint1" is similar to existing symbol "pvint1".
```

■uで積分

```
In[15]:= Do[
  qvint2[i] =
   Expand[TrigTimesToAdd[TrigExpand[qvint1[i]]]] /.
     {Cos[u_/2]*ψ[u_] → Exp[-2*I]*Cd[d/2, u/2],
      Sin[u_/2]*ψ[u_] → Exp[-2*I]*Sd[d/2, u/2]} /.
    {(u_)*ψ[u_] → Ud[u]/2, Cos[u_]*ψ[u_] → Cd[u]/2, Cos[u_]*ψ[u_] → Cd[u]/2,
     Sin[u_]*ψ[u_] → Sd[u]/2, ψ[u_] → Ed[u]/2} // Simplify,
  {i, 1, 3}
 ]

General::spell1 : Possible spelling error: new
   symbol name "qvint2" is similar to existing symbol "pvint2".

In[16]:= Q =
  ((qvint2[1] /. u → L1) - (qvint2[1] /. u → 0)) +
    ((qvint2[2] /. u → L2) - (qvint2[2] /. u → L1)) +
    ((qvint2[3] /. u → L1 + L2) - (qvint2[3] /. u → L2)) /.
   {Ud[0] → 0, Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u],
    Sd[-u_] → Sd[u], Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify
```

Out[16]= $\frac{1}{2}$ (L1 Ed[L1 + L2] + L2 Ed[L1 + L2] - Cos[L1] Sd[L1] -
 Cos[L2] Sd[L2] + Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1 + L2] + Cd[L1] Sin[L1] +
 Cd[L2] Cos[L2] Sin[L1] - Cd[L1 + L2] Cos[L2] Sin[L1] - Ed[L2] (L2 + Sin[L1]) +
 Cd[L2] Sin[L2] + Cd[L1] Cos[L1] Sin[L2] - Cd[L1 + L2] Cos[L1] Sin[L2] +
 Sd[L1] Sin[L1] Sin[L2] + Sd[L2] Sin[L1] Sin[L2] - Sd[L1 + L2] Sin[L1] Sin[L2] -
 Ed[L1] (L1 + Sin[L2]) + Ud[L1] + Ud[L2] - Ud[L1 + L2])

```
In[17]:= Collect[Q, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1],
   Sd[L1], Ed[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2]}]
```

Out[17]= $\frac{1}{2}$ Ed[L2] (-L2 - Sin[L1]) + $\frac{1}{2}$ Ed[L1] (-L1 - Sin[L2]) +
 $\frac{1}{2}$ Cd[L2] (Cos[L2] Sin[L1] + Sin[L2]) + $\frac{1}{2}$ Cd[L1] (Sin[L1] + Cos[L1] Sin[L2]) +
 $\frac{1}{2}$ Sd[L1] (-Cos[L1] + Sin[L1] Sin[L2]) +
 $\frac{1}{2}$ Sd[L2] (-Cos[L2] + Sin[L1] Sin[L2]) + $\frac{\text{Ud[L1]}}{2}$ + $\frac{\text{Ud[L2]}}{2}$ + $\frac{1}{2}$
 (L1 Ed[L1 + L2] + L2 Ed[L1 + L2] + Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1 + L2] - Cd[L1 + L2] Cos[L2] Sin[L1] -
 Cd[L1 + L2] Cos[L1] Sin[L2] - Sd[L1 + L2] Sin[L1] Sin[L2] - Ud[L1 + L2])

Z22

In[18]:= `-I*60*(P+Q) // Simplify`

Out[18]= 30 ⅈ ((L1 - L2) Ed[L1 - L2] - (L1 + L2) Ed[L1 + L2] + Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1 - L2] -
Cos[L1] Cos[L2] Sd[L1 + L2] - Cd[L1 - L2] Cos[L2] Sin[L1] -
2 Cd[L2] Cos[L2] Sin[L1] + Cd[L1 + L2] Cos[L2] Sin[L1] + 2 Ed[L2] Sin[L1] -
2 Cd[L1] Cos[L1] Sin[L2] + Cd[L1 - L2] Cos[L1] Sin[L2] + Cd[L1 + L2] Cos[L1] Sin[L2] +
2 Ed[L1] Sin[L2] - 2 Sd[L1] Sin[L1] Sin[L2] + Sd[L1 - L2] Sin[L1] Sin[L2] -
2 Sd[L2] Sin[L1] Sin[L2] + Sd[L1 + L2] Sin[L1] Sin[L2] - Ud[L1 - L2] + Ud[L1 + L2])

■ L1=L2=Lのとき

In[19]:= `-I*60*(P+Q) /. {L1→L, L2→L} /. {Ud[0]→0, Cd[0]→0, Sd[0]→0, Ed[0]→0} // Simplify`

Out[19]= -30 ⅈ (2 L Ed[2 L] + Cos[2 L] Sd[2 L] - 4 Ed[L] Sin[L] +
4 Sd[L] Sin[L]^2 + 2 Cd[L] Sin[2 L] - Cd[2 L] Sin[2 L] - Ud[2 L])

[確認]

Closed Form

In[20]:=
```
L1 = 1;
L2 = 2;
d = 3;
```

$$\psi[u\_] := \frac{\mathrm{Exp}[-I*\sqrt{u^2+d^2}]}{\sqrt{u^2+d^2}};$$

```
Ud[x_] := 2*NIntegrate[u*ψ[u], {u, 0, x}];
Cd[x_] := 2*NIntegrate[Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
Sd[x_] := 2*NIntegrate[Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
Ed[x_] := 2*NIntegrate[ψ[u], {u, 0, x}];
```

In[28]:= `-I*60*(P+Q)`

Out[28]= 1.49363 + 5.89048 ⅈ

Numerical Integration

In[29]:=
```
Clear[L, d];
L[1] = 1;
L[2] = 2;
d = 3;
```

$$\psi[u\_] := \frac{\mathrm{Exp}\left[-I * \sqrt{u^2 + d^2}\right]}{\sqrt{u^2 + d^2}};$$

```
f2[i_, x_] = 1 - Cos[L[i] - Abs[x]];
df2[i_, x_] = Sign[-x] * Sin[L[i] - Abs[x]];
-I * 30 * NIntegrate[(f2[1, x1] * f2[2, x2] - df2[1, x1] * df2[2, x2]) * ψ[x1 - x2],
  {x1, -L[1], L[1]}, {x2, -L[2], L[2]}]
```

Out[36]= 1.49363 + 5.89048 ⅈ

6.2.4 $Z_{ij}^{13}(=Z_{ji}^{31})$

$$f^1(x)=\begin{cases}\sin(L-x) & (x\ge 0)\\ \sin(L+x) & (x\le 0)\end{cases},\quad f^3(x)=\begin{cases}(L-x)\cos(L-x) & (x\ge 0)\\ (L+x)\cos(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^1(x_1)=\begin{cases}\sin(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) & \cdots①\\ \sin(L_1+x_1) & (x_1\le 0) & \cdots②\end{cases}\\ f^3(x_2)=\begin{cases}(L_2-x_2)\cos(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) & \cdots③\\ (L_2+x_2)\cos(L_2+x_2) & (x_2\le 0) & \cdots④\end{cases}\end{array}\right.$$

$$f^{1\prime}(x)=\begin{cases}-\cos(L-x) & (x\ge 0)\\ \cos(L+x) & (x\le 0)\end{cases},\quad f^{3\prime}(x)=\begin{cases}-\cos(L-x)+(L-x)\sin(L-x) & (x\ge 0)\\ \cos(L+x)-(L+x)\sin(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{1\prime}(x_1)=\begin{cases}-\cos(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) & \cdots⑤\\ \cos(L_1+x_1) & (x_1\le 0) & \cdots⑥\end{cases}\\ f^{3\prime}(x_2)=\begin{cases}-\cos(L_2-x_2)+(L_2-x_2)\sin(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) & \cdots⑦\\ \cos(L_2+x_2)-(L_2+x_2)\sin(L_2+x_2) & (x_2\le 0) & \cdots⑧\end{cases}\end{array}\right.$$

P の計算

$$\begin{aligned}P&=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}[\sin(L_1-x_1)\{(L_2-x_2)\cos(L_2-x_2)\}\\ &\qquad-\{-\cos(L_1-x_1)\}\{-\cos(L_2-x_2)+(L_2-x_2)\sin(L_2-x_2)\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}[\sin(L_1-x_1)\{(L_2-x_2)\cos(L_2-x_2)\}\\ &\qquad-\{-\cos(L_1-x_1)\}\{-\cos(L_2-x_2)+(L_2-x_2)\sin(L_2-x_2)\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2\end{aligned}$$

■積和公式適用関数の定義

```
In[1]:= TrigTimesToAdd[f_] := Module[{a, b},
    f /. {Sin[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] + Sin[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]*Sin[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] - Sin[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Cos[(a+b)*u] + Cos[(a-b)*u]),
      Sin[a_*u]*Sin[b_*u] → -1/2 (Cos[(a+b)*u] - Cos[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]^2 → 1/2 (Cos[2*a*u] + 1),
      Sin[a_*u]^2 → -1/2 (Cos[2*a*u] - 1)}];
```

P

■vで積分

```
In[2]:= jacobi = 1/2;
        f[u_, v_] :=
          jacobi * (Sin[L1 - x1] * ((L2 - x2) * Cos[L2 - x2]) -
              (-Cos[L1 - x1]) * (-Cos[L2 - x2] + (L2 - x2) * Sin[L2 - x2])) * ψ[u] /.
           {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
        pvint1[1] = Simplify[
            Integrate[f[u, v], {v, -u, u + 2 * L2}]
          ];
        pvint1[2] = Simplify[
            Integrate[f[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
          ];
        pvint1[3] = Simplify[
            Integrate[f[u, v], {v, u, -u + 2 * L1}]
          ];
```

■uで積分

```
In[8]:= Do[
          pvint2[i] =
           Expand[ TrigTimesToAdd[TrigExpand[pvint1[i]]]] /.
             {((u_)^2 * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU2d[u] / 2, ((u_)^2 * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU2d[u] / 2,
              ((u_) * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU1d[u] / 2, ((u_) * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU1d[u] / 2,
              (u_) * ψ[u_] → Ud[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2,
              Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2, ψ[u_] → Ed[u] / 2} // Simplify,
          {i, 1, 3}
        ]

In[9]:= P =
         ((pvint2[1] /. u → L1 - L2) - (pvint2[1] /. u → -L2)) +
           ((pvint2[2] /. u → 0) - (pvint2[2] /. u → L1 - L2)) +
           ((pvint2[3] /. u → L1) - (pvint2[3] /. u → 0)) /.
          {CU1d[0] → 0, CU2d[0] → 0, SU1d[0] → 0, SU2d[0] → 0, Ud[0] → 0, Cd[0] → 0,
           Sd[0] → 0,  Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
           CU1d[-u_] → CU1d[u], CU2d[-u_] → -CU2d[u], SU1d[-u_] → -SU1d[u],
           SU2d[-u_] → SU2d[u], Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify

Out[9]= 1/2 (Cos[L1 - L2] CU1d[L1] - L1 Cos[L2] Sd[L1] Sin[L1] + L1 Cos[L1] Sd[L1] Sin[L2] -
          L2 Cos[L1] Sd[L1] Sin[L2] - Sd[L1 - L2] ((-L1 + L2) Cos[L2] Sin[L1] + L1 Cos[L1] Sin[L2]) -
          Cd[L1] (L1 Cos[L1] Cos[L2] + (L1 - L2) Sin[L1] Sin[L2]) +
          Cd[L1 - L2] (L1 Cos[L1] Cos[L2] + (L1 - L2) Sin[L1] Sin[L2]) +
          Cos[L2] Sin[L1] SU1d[L1] - Cos[L1] Sin[L2] SU1d[L1] -
          Sin[L1] (CU1d[L1 - L2] Sin[L2] + Cos[L2] SU1d[L1 - L2]) - Cos[L1] (L2 Cd[L1 - L2] Cos[L2] +
             Cos[L2] CU1d[L1 - L2] - Sin[L2] (L2 Sd[L1 - L2] + SU1d[L1 - L2])) -
          Cos[L1] (L2 Cd[L2] Cos[L2] - Cos[L2] CU1d[L2] + Sin[L2] (L2 Sd[L2] - SU1d[L2])))

In[10]:= Collect[P, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], CU1d[L1 - L2],
           CU2d[L1 - L2], SU1d[L1 - L2], SU2d[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
           CU1d[L1], CU2d[L1], SU1d[L1], SU2d[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2],
           CU1d[L2], CU2d[L2], SU1d[L2], SU2d[L2]}]

Out[10]= -1/2 L2 Cd[L2] Cos[L1] Cos[L2] + 1/2 Cos[L1 - L2] CU1d[L1] +
          1/2 Cos[L1] Cos[L2] CU1d[L2] - 1/2 L2 Cos[L1] Sd[L2] Sin[L2] +
          1/2 Sd[L1] (-L1 Cos[L2] Sin[L1] + L1 Cos[L1] Sin[L2] - L2 Cos[L1] Sin[L2]) +
          1/2 Sd[L1 - L2] (-(-L1 + L2) Cos[L2] Sin[L1] - L1 Cos[L1] Sin[L2] + L2 Cos[L1] Sin[L2]) +
          1/2 CU1d[L1 - L2] (-Cos[L1] Cos[L2] - Sin[L1] Sin[L2]) +
          1/2 Cd[L1] (-L1 Cos[L1] Cos[L2] - (L1 - L2) Sin[L1] Sin[L2]) +
          1/2 Cd[L1 - L2] (L1 Cos[L1] Cos[L2] - L2 Cos[L1] Cos[L2] + (L1 - L2) Sin[L1] Sin[L2]) +
          1/2 (Cos[L2] Sin[L1] - Cos[L1] Sin[L2]) SU1d[L1] +
          1/2 (-Cos[L2] Sin[L1] + Cos[L1] Sin[L2]) SU1d[L1 - L2] + 1/2 Cos[L1] Sin[L2] SU1d[L2]
```

ここでは、

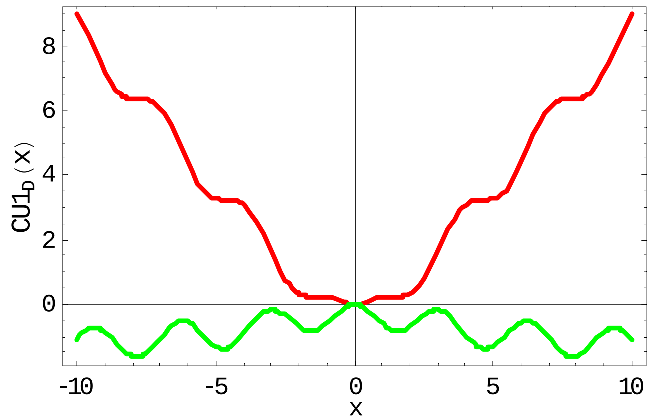
$$CU1_D(x) = 2\int_0^x u\cos u \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}}du$$

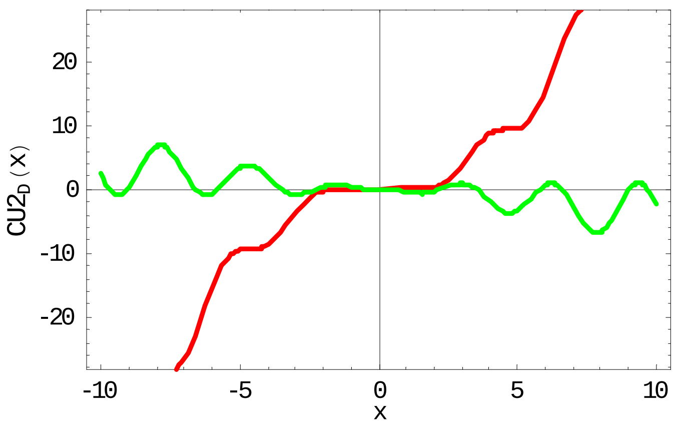
$$CU2_D(x) = 2\int_0^x u^2\cos u \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}}du$$

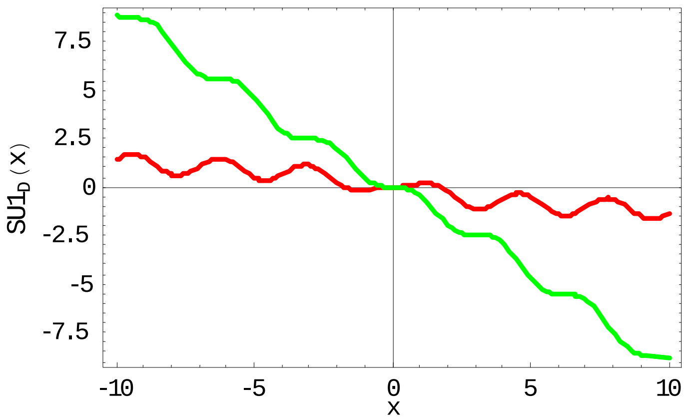
$$SU1_D(x) = 2\int_0^x u\sin u \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}}du$$

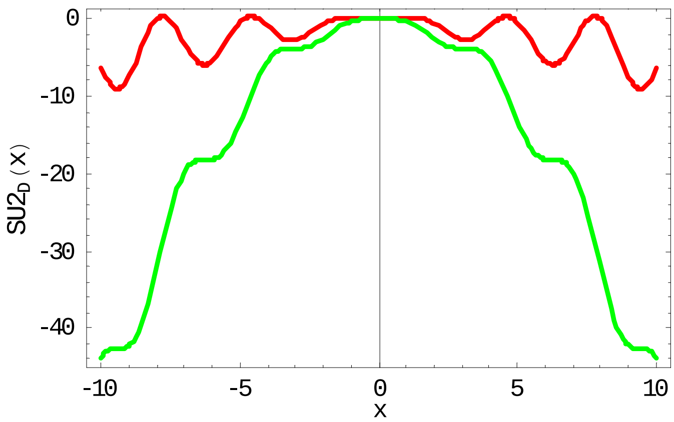
$$SU2_D(x) = 2\int_0^x u^2\sin u \frac{\exp(-j\sqrt{u^2+D^2})}{\sqrt{u^2+D^2}}du$$

という関数が定義され、使われた。以前に定義した特殊関数$C_D(x), S_D(x)$などを使えば解析的に積分できる(6.3 節参照)。$D=1$のときの$CU1_D(x), CU2_D(x), SU1_D(x), SU2_D(x)$のグラフの例を次に示す。









$\boxed{\text{Q の計算}}$

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{\textcircled{1}\textcircled{4}-\textcircled{5}\textcircled{8}\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}[\sin(L_1-x_1)\{(L_2+x_2)\cos(L_2+x_2)\} \\
&\qquad -\{-\cos(L_1-x_1)\}\{\cos(L_2+x_2)-(L_2+x_2)\sin(L_2+x_2)\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2
\end{aligned}
$$

Q

■vで積分

```
In[16]:= jacobi = 1/2;
g[u_, v_] :=
  jacobi * (Sin[L1 - x1] * ((L2 + x2) * Cos[L2 + x2]) +
      Cos[L1 - x1] * (Cos[L2 + x2] - (L2 + x2) * Sin[L2 + x2])) * ψ[u] /.
   {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
qvint1[1] = Simplify[
   Integrate[g[u, v], {v, -u, u}]
  ];
qvint1[2] = Simplify[
   Integrate[g[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
  ];
qvint1[3] = Simplify[
   Integrate[g[u, v], {v, u - 2 * L2, -u + 2 * L1}]
  ];
```

■uで積分

```
In[22]:= Do[
  qvint2[i] =
   Expand[TrigTimesToAdd[TrigExpand[qvint1[i]]]] /.
     {Cos[u_ / 2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Cd[d / 2, u / 2],
      Sin[u_ / 2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Sd[d / 2, u / 2]} /.
    {((u_)^2 * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU2d[u] / 2, ((u_)^2 * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU2d[u] / 2,
     ((u_) * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU1d[u] / 2, ((u_) * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU1d[u] / 2,
     (u_) * ψ[u_] → Ud[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2,
     Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2, ψ[u_] → Ed[u] / 2} // Simplify,
  {i, 1, 3}
 ]

In[23]:= Q =
  ((qvint2[1] /. u → L1) - (qvint2[1] /. u → 0)) +
    ((qvint2[2] /. u → L2) - (qvint2[2] /. u → L1)) +
    ((qvint2[3] /. u → L1 + L2) - (qvint2[3] /. u → L2)) /.
   {CU1d[0] → 0, CU2d[0] → 0, SU1d[0] → 0, SU2d[0] → 0, Ud[0] → 0, Cd[0] → 0,
    Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
    CU1d[-u_] → CU1d[u], CU2d[-u_] → -CU2d[u], SU1d[-u_] → -SU1d[u],
    SU2d[-u_] → SU2d[u], Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify

Out[23]= 1/4 (-2 L2 Cd[L2] Cos[L1] Cos[L2] + 2 L1 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] +
    2 L2 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] + 2 Cos[L1 + L2] CU1d[L1] + Cos[L1 - L2] CU1d[L2] +
    Cos[L1 + L2] CU1d[L2] - 2 Cos[L1 + L2] CU1d[L1 + L2] + L2 Sd[L1] Sin[L1 - L2] +
    L2 Sd[L2] Sin[L1 - L2] + Cd[L1] (-2 L1 Cos[L1] Cos[L2] + 2 (L1 + L2) Sin[L1] Sin[L2]) -
    2 L1 Sd[L1] Sin[L1 + L2] - L2 Sd[L1] Sin[L1 + L2] - L2 Sd[L2] Sin[L1 + L2] +
    2 L1 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 L2 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 Sin[L1 + L2] SU1d[L1] -
    Sin[L1 - L2] SU1d[L2] + Sin[L1 + L2] SU1d[L2] - 2 Sin[L1 + L2] SU1d[L1 + L2])

In[24]:= Collect[Q, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], CU1d[L1 - L2],
   CU2d[L1 - L2], SU1d[L1 - L2], SU2d[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
   CU1d[L1], CU2d[L1], SU1d[L1], SU2d[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2],
   CU1d[L2], CU2d[L2], SU1d[L2], SU2d[L2]}]

Out[24]= -1/2 L2 Cd[L2] Cos[L1] Cos[L2] +
  1/2 Cos[L1 + L2] CU1d[L1] + 1/4 (Cos[L1 - L2] + Cos[L1 + L2]) CU1d[L2] +
  1/4 Cd[L1] (-2 L1 Cos[L1] Cos[L2] + 2 (L1 + L2) Sin[L1] Sin[L2]) +
  1/4 Sd[L2] (L2 Sin[L1 - L2] - L2 Sin[L1 + L2]) +
  1/4 Sd[L1] (L2 Sin[L1 - L2] - 2 L1 Sin[L1 + L2] - L2 Sin[L1 + L2]) +
  1/2 Sin[L1 + L2] SU1d[L1] + 1/4 (-Sin[L1 - L2] + Sin[L1 + L2]) SU1d[L2] +
  1/4 (2 L1 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] + 2 L2 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] - 2 Cos[L1 + L2] CU1d[L1 + L2] +
    2 L1 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 L2 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 Sin[L1 + L2] SU1d[L1 + L2])
```

Z13

```
In[25]:= -I*60*(P+Q) // Simplify

Out[25]= 30 i (-(L1-L2) Cd[L1-L2] Cos[L1-L2] + 2 L2 Cd[L2] Cos[L1] Cos[L2] -
        L1 Cd[L1+L2] Cos[L1+L2] - L2 Cd[L1+L2] Cos[L1+L2] - Cos[L1-L2] CU1d[L1] -
        Cos[L1+L2] CU1d[L1] + Cos[L1-L2] CU1d[L1-L2] - Cos[L1-L2] CU1d[L2] -
        Cos[L1+L2] CU1d[L2] + Cos[L1+L2] CU1d[L1+L2] + L1 Sd[L1] Sin[L1-L2] -
        L2 Sd[L1] Sin[L1-L2] - L1 Sd[L1-L2] Sin[L1-L2] + L2 Sd[L1-L2] Sin[L1-L2] -
        L2 Sd[L2] Sin[L1-L2] + 2 Cd[L1] (L1 Cos[L1] Cos[L2] - L2 Sin[L1] Sin[L2]) +
        L1 Sd[L1] Sin[L1+L2] + L2 Sd[L1] Sin[L1+L2] + L2 Sd[L2] Sin[L1+L2] -
        L1 Sd[L1+L2] Sin[L1+L2] - L2 Sd[L1+L2] Sin[L1+L2] -
        Sin[L1-L2] SU1d[L1] - Sin[L1+L2] SU1d[L1] + Sin[L1-L2] SU1d[L1-L2] +
        Sin[L1-L2] SU1d[L2] - Sin[L1+L2] SU1d[L2] + Sin[L1+L2] SU1d[L1+L2])
```

■ L1=L2=Lのとき

```
In[26]:= -I*60*(P+Q) /. {L1→L, L2→L} /.
         {Ud[0]→0, Cd[0]→0, Sd[0]→0, Ed[0]→0, CU1d[0]→0, CU2d[0]→0, SU1d[0]→0,
          SU2d[0]→0} // Simplify

Out[26]= 30 i (-2 L Cd[2 L] Cos[2 L] + L Cd[L] (1+3 Cos[2 L]) -
        2 CU1d[L] - 2 Cos[2 L] CU1d[L] + Cos[2 L] CU1d[2 L] + 3 L Sd[L] Sin[2 L] -
        2 L Sd[2 L] Sin[2 L] - 2 Sin[2 L] SU1d[L] + Sin[2 L] SU1d[2 L])
```

[確認]

Closed Form

In[20]:= L1 = 1;
L2 = 2;
d = 3;

$$\psi[u\_] := \frac{\mathrm{Exp}\left[-I*\sqrt{u^2+d^2}\right]}{\sqrt{u^2+d^2}};$$

```
Ud[x_] := 2*NIntegrate[u*ψ[u], {u, 0, x}];
Cd[x_] := 2*NIntegrate[Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
Sd[x_] := 2*NIntegrate[Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
Ed[x_] := 2*NIntegrate[ψ[u], {u, 0, x}];
CU1d[x_] := 2*NIntegrate[u*Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
CU2d[x_] := 2*NIntegrate[u^2*Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
SU1d[x_] := 2*NIntegrate[u*Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
SU2d[x_] := 2*NIntegrate[u^2*Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
```

```
In[32]:= -I*60*(P+Q)

Out[32]= 1.83253 + 4.8028 i
```

Numerical Integration

```
In[33]:= Clear[L, d];
L[1] = 1;
L[2] = 2;
d = 3;
ψ[u_] := Exp[-I * Sqrt[u^2 + d^2]] / Sqrt[u^2 + d^2];
f1[i_, x_] = Sin[L[i] - Abs[x]];
df1[i_, x_] = Sign[-x] * Cos[L[i] - Abs[x]];
f3[i_, x_] = (L[i] - Abs[x]) * Cos[L[i] - Abs[x]];
df3[i_, x_] = Sign[-x] * (Cos[L[i] - Abs[x]] - (L[i] - Abs[x]) * Sin[L[i] - Abs[x]]);
-I * 30 * NIntegrate[(f1[1, x1] * f3[2, x2] - df1[1, x1] * df3[2, x2]) * ψ[x1 - x2],
  {x1, -L[1], L[1]}, {x2, -L[2], L[2]}]

Out[42]= 1.83253 + 4.8028 i
```

6.2.5 Z_{ij}^{33}

$$f^3(x)=\begin{cases}(L-x)\cos(L-x) & (x\geq 0)\\ (L+x)\cos(L+x) & (x\leq 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^3(x_1)=\begin{cases}(L_1-x_1)\cos(L_1-x_1) & (x_1\geq 0) & \cdots① \\ (L_1+x_1)\cos(L_1+x_1) & (x_1\leq 0) & \cdots②\end{cases} \\ f^3(x_2)=\begin{cases}(L_2-x_2)\cos(L_2-x_2) & (x_2\geq 0) & \cdots③ \\ (L_2+x_2)\cos(L_2+x_2) & (x_2\leq 0) & \cdots④\end{cases}\end{array}\right.$$

$$f^{3'}(x)=\begin{cases}-\cos(L-x)+(L-x)\sin(L-x) & (x\geq 0)\\ \cos(L+x)-(L+x)\sin(L+x) & (x\leq 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{3'}(x_1)=\begin{cases}-\cos(L_1-x_1)+(L_1-x_1)\sin(L_1-x_1) & (x_1\geq 0) & \cdots⑤ \\ \cos(L_1+x_1)-(L_1+x_1)\sin(L_1+x_1) & (x_1\leq 0) & \cdots⑥\end{cases} \\ f^{3'}(x_2)=\begin{cases}-\cos(L_2-x_2)+(L_2-x_2)\sin(L_2-x_2) & (x_2\geq 0) & \cdots⑦ \\ \cos(L_2+x_2)-(L_2+x_2)\sin(L_2+x_2) & (x_2\leq 0) & \cdots⑧\end{cases}\end{array}\right.$$

P の計算

$$P=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}[\{(L_1-x_1)\cos(L_1-x_1)\}\{(L_2-x_2)\cos(L_2-x_2)\}$$
$$-\{-\cos(L_1-x_1)+(L_1-x_1)\sin(L_1-x_1)\}\{-\cos(L_2-x_2)+(L_2-x_2)\sin(L_2-x_2)\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

■積和公式適用関数の定義

```
In[1]:= TrigTimesToAdd[f_] := Module[{a, b},
        f /. {Sin[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] + Sin[(a-b)*u]),
          Cos[a_*u]*Sin[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] - Sin[(a-b)*u]),
          Cos[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Cos[(a+b)*u] + Cos[(a-b)*u]),
          Sin[a_*u]*Sin[b_*u] → -1/2 (Cos[(a+b)*u] - Cos[(a-b)*u]),
          Cos[a_*u]^2 → 1/2 (Cos[2*a*u] + 1),
          Sin[a_*u]^2 → -1/2 (Cos[2*a*u] - 1)}];
```

P

■vで積分

```
In[2]:= jacobi = 1/2;
  f[u_, v_] :=
    jacobi * (((L1 - x1) * Cos[L1 - x1]) * ((L2 - x2) * Cos[L2 - x2]) -
        (-Cos[L1 - x1] + (L1 - x1) * Sin[L1 - x1]) * (-Cos[L2 - x2] + (L2 - x2) * Sin[L2 - x2])) *
     ψ[u] /. {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
  pvint1[1] = Simplify[
     Integrate[f[u, v], {v, -u, u + 2 * L2}]
    ];
  pvint1[2] = Simplify[
     Integrate[f[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
    ];
  pvint1[3] = Simplify[
     Integrate[f[u, v], {v, u, -u + 2 * L1}]
    ];
```

■uで積分

```
In[8]:= Do[
   pvint2[i] =
    Expand[ TrigTimesToAdd[TrigExpand[pvint1[i]]]] /.
      {((u_)^2 * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU2d[u] / 2, ((u_)^2 * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU2d[u] / 2,
       ((u_) * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU1d[u] / 2, ((u_) * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU1d[u] / 2,
       (u_) * ψ[u_] → Ud[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2,
       Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2, ψ[u_] → Ed[u] / 2} // Simplify,
   {i, 1, 3}
  ]
```

```
In[9]:= P =
   ((pvint2[1] /. u → L1 - L2) - (pvint2[1] /. u → -L2)) +
     ((pvint2[2] /. u → 0) - (pvint2[2] /. u → L1 - L2)) +
     ((pvint2[3] /. u → L1) - (pvint2[3] /. u → 0)) /.
    {CU1d[0] → 0, CU2d[0] → 0, SU1d[0] → 0, SU2d[0] → 0, Ud[0] → 0, Cd[0] → 0,
     Sd[0] → 0,  Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
     CU1d[-u_] → CU1d[u], CU2d[-u_] → -CU2d[u], SU1d[-u_] → -SU1d[u], SU2d[-u_] → SU2d[u],
     Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify
```

```
Out[9]= 1/4 (-L2 Cd[L2] Cos[L1] Cos[L2] + Cos[L1 - L2] CU1d[L1] - Cos[L1 - L2] CU1d[L1 - L2] +
    Cos[L1 - L2] CU1d[L2] + 1/2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] - L1^2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] +
    L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + 1/2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] - L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] -
    Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] + L1^2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] - 2 L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
    L2^2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] + 1/2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] + L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] -
    L2^2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] + 1/2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] - L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] +
    2 L1 L2 Cd[L2] Cos[L2] Sin[L1] - L2^2 Cd[L2] Cos[L2] Sin[L1] - 2 L1 CU1d[L1] Sin[L1 - L2] +
    L2 CU1d[L1] Sin[L1 - L2] + 2 L1 CU1d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - 2 L2 CU1d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] -
    L1 CU1d[L2] Sin[L1 - L2] + 2 L2 CU1d[L2] Sin[L1 - L2] + CU2d[L1] Sin[L1 - L2] -
    CU2d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - CU2d[L2] Sin[L1 - L2] - L1 Sd[L1] Sin[L1 - L2] +
    L1 Sd[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - L2 Sd[L1 - L2] Sin[L1 - L2] + L2 Sd[L2] Sin[L1 - L2] +
    Cd[L1 - L2] ((L1 - L2) Cos[L1 - L2] - (-1 + L1^2 - 2 L1 L2 + L2^2) Sin[L1 - L2]) -
    Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] + L2^2 Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] - L2 Cd[L2] Sin[L1] Sin[L2] - Cd[L1]
     (Sin[L1] (Cos[L2] - L1^2 Cos[L2] + L1 Sin[L2]) + L1 Cos[L1] (Cos[L2] + (L1 - 2 L2) Sin[L2])) -
    L2 CU1d[L1] Sin[L1 + L2] - L1 CU1d[L2] Sin[L1 + L2] + 2 L1 Cos[L1 - L2] SU1d[L1] -
    L2 Cos[L1 - L2] SU1d[L1] + L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1] + Sin[L1 - L2] SU1d[L1] -
    2 L1 Cos[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] + 2 L2 Cos[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] -
    Sin[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] - L1 Cos[L1 - L2] SU1d[L2] +
    2 L2 Cos[L1 - L2] SU1d[L2] + L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L2] - Sin[L1 - L2] SU1d[L2] -
    Cos[L1 - L2] SU2d[L1] + Cos[L1 - L2] SU2d[L1 - L2] - Cos[L1 - L2] SU2d[L2])
```

```
In[10]:= Collect[P, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], CU1d[L1 - L2],
    CU2d[L1 - L2], SU1d[L1 - L2], SU2d[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
    CU1d[L1], CU2d[L1], SU1d[L1], SU2d[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2],
    CU1d[L2], CU2d[L2], SU1d[L2], SU2d[L2]}]
```

```
Out[10]= 1/4 CU2d[L1] Sin[L1 - L2] - 1/4 CU2d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] -
   1/4 CU2d[L2] Sin[L1 - L2] + 1/4 Sd[L1] (1/2 Cos[L1 - L2] - L1^2 Cos[L1 - L2] +
     L1 L2 Cos[L1 - L2] + 1/2 Cos[L1 + L2] - L1 L2 Cos[L1 + L2] - L1 Sin[L1 - L2]) +
   1/4 CU1d[L1 - L2] (-Cos[L1 - L2] + 2 L1 Sin[L1 - L2] - 2 L2 Sin[L1 - L2]) +
   1/4 Sd[L1 - L2] (-Cos[L1 - L2] + L1^2 Cos[L1 - L2] -
     2 L1 L2 Cos[L1 - L2] + L2^2 Cos[L1 - L2] + L1 Sin[L1 - L2] - L2 Sin[L1 - L2]) +
   1/4 Sd[L2] (1/2 Cos[L1 - L2] + L1 L2 Cos[L1 - L2] - L2^2 Cos[L1 - L2] +
     1/2 Cos[L1 + L2] - L1 L2 Cos[L1 + L2] + L2 Sin[L1 - L2]) +
   1/4 Cd[L1 - L2] ((L1 - L2) Cos[L1 - L2] - (-1 + L1^2 - 2 L1 L2 + L2^2) Sin[L1 - L2]) +
   1/4 Cd[L2] (-L2 Cos[L1] Cos[L2] + 2 L1 L2 Cos[L2] Sin[L1] - L2^2 Cos[L2] Sin[L1] -
     Cos[L1] Sin[L2] + L2^2 Cos[L1] Sin[L2] - L2 Sin[L1] Sin[L2]) + 1/4 Cd[L1]
  (-Sin[L1] (Cos[L2] - L1^2 Cos[L2] + L1 Sin[L2]) - L1 Cos[L1] (Cos[L2] + (L1 - 2 L2) Sin[L2])) +
   1/4 CU1d[L2] (Cos[L1 - L2] - L1 Sin[L1 - L2] + 2 L2 Sin[L1 - L2] - L1 Sin[L1 + L2]) +
   1/4 CU1d[L1] (Cos[L1 - L2] - 2 L1 Sin[L1 - L2] + L2 Sin[L1 - L2] - L2 Sin[L1 + L2]) +
   1/4 (2 L1 Cos[L1 - L2] - L2 Cos[L1 - L2] + L2 Cos[L1 + L2] + Sin[L1 - L2]) SU1d[L1] +
   1/4 (-2 L1 Cos[L1 - L2] + 2 L2 Cos[L1 - L2] - Sin[L1 - L2]) SU1d[L1 - L2] +
   1/4 (-L1 Cos[L1 - L2] + 2 L2 Cos[L1 - L2] + L1 Cos[L1 + L2] - Sin[L1 - L2]) SU1d[L2] -
   1/4 Cos[L1 - L2] SU2d[L1] + 1/4 Cos[L1 - L2] SU2d[L1 - L2] - 1/4 Cos[L1 - L2] SU2d[L2]
```

$\boxed{\text{Q の計算}}$

$$Q=\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}[\{(L_1-x_1)\cos(L_1-x_1)\}\{(L_2+x_2)\cos(L_2+x_2)\}$$

$$-\{-\cos(L_1-x_1)+(L_1-x_1)\sin(L_1-x_1)\}\{\cos(L_2+x_2)-(L_2+x_2)\sin(L_2+x_2)\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Q

■vで積分

```
In[16]:= jacobi = 1/2;
  g[u_, v_] :=
   jacobi * (((L1 - x1) * Cos[L1 - x1]) * ((L2 + x2) * Cos[L2 + x2]) -
       (-Cos[L1 - x1] + (L1 - x1) * Sin[L1 - x1]) * (Cos[L2 + x2] - (L2 + x2) * Sin[L2 + x2])) * ψ[u] /.
    {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
  qvint1[1] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, -u, u}]
    ];
  qvint1[2] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
    ];
  qvint1[3] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, u - 2 * L2, -u + 2 * L1}]
    ];
```

■uで積分

```
In[22]:= Do[
   qvint2[i] =
    Expand[ TrigTimesToAdd[TrigExpand[qvint1[i]]]] /.
       {Cos[u_/2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Cd[d/2, u/2],
        Sin[u_/2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Sd[d/2, u/2]} /.
      {((u_)^2 * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU2d[u]/2, ((u_)^2 * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU2d[u]/2,
       ((u_) * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU1d[u]/2, ((u_) * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU1d[u]/2,
       (u_) * ψ[u_] → Ud[u]/2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u]/2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u]/2,
       Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u]/2, ψ[u_] → Ed[u]/2} // Simplify,
   {i, 1, 3}
  ]

In[23]:= Q =
   ((qvint2[1] /. u → L1) - (qvint2[1] /. u → 0)) +
     ((qvint2[2] /. u → L2) - (qvint2[2] /. u → L1)) +
     ((qvint2[3] /. u → L1 + L2) - (qvint2[3] /. u → L2)) /.
    {CU1d[0] → 0, CU2d[0] → 0, SU1d[0] → 0, SU2d[0] → 0, Ud[0] → 0, Cd[0] → 0,
     Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
     CU1d[-u_] → CU1d[u], CU2d[-u_] → -CU2d[u], SU1d[-u_] → -SU1d[u], SU2d[-u_] → SU2d[u],
     Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify

Out[23]= 1/4 (L1 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] + L2 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] +
    Cos[L1 + L2] CU1d[L1] + Cos[L1 + L2] CU1d[L2] - Cos[L1 + L2] CU1d[L1 + L2] +
    1/2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + 1/2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] -
    L1^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] - L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] + 1/2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] +
    L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] + 1/2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] - L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] -
    L2^2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] - Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + L1^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] +
    2 L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + L2^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + L2 CU1d[L1] Sin[L1 - L2] -
    L1 CU1d[L2] Sin[L1 - L2] + Cd[L1] (Sin[L1] ((-1 + L1^2) Cos[L2] + L1 Sin[L2]) +
       L1 Cos[L1] (-Cos[L2] + (L1 + 2 L2) Sin[L2])) + Cd[L2]
     (L2 Sin[L1] ((2 L1 + L2) Cos[L2] + Sin[L2]) + Cos[L1] (-L2 Cos[L2] + (-1 + L2^2) Sin[L2])) +
    Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - L1^2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 L1 L2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] -
    L2^2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 L1 CU1d[L1] Sin[L1 + L2] -
    L2 CU1d[L1] Sin[L1 + L2] - L1 CU1d[L2] Sin[L1 + L2] - 2 L2 CU1d[L2] Sin[L1 + L2] +
    2 L1 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 L2 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] +
    CU2d[L1] Sin[L1 + L2] + CU2d[L2] Sin[L1 + L2] - CU2d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] -
    L1 Sd[L1] Sin[L1 + L2] - L2 Sd[L2] Sin[L1 + L2] + L1 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] +
    L2 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - L2 Cos[L1 - L2] SU1d[L1] + 2 L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L1] +
    L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1] + Sin[L1 + L2] SU1d[L1] - L1 Cos[L1 - L2] SU1d[L2] +
    L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L2] + 2 L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L2] + Sin[L1 + L2] SU1d[L2] -
    2 L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] - 2 L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] - Sin[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] -
    Cos[L1 + L2] SU2d[L1] - Cos[L1 + L2] SU2d[L2] + Cos[L1 + L2] SU2d[L1 + L2])

In[24]:= Collect[Q, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], CU1d[L1 - L2],
    CU2d[L1 - L2], SU1d[L1 - L2], SU2d[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
    CU1d[L1], CU2d[L1], SU1d[L1], SU2d[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2],
    CU1d[L2], CU2d[L2], SU1d[L2], SU2d[L2]}]

Out[24]= 1/4 Cd[L1]
    (Sin[L1] ((-1 + L1^2) Cos[L2] + L1 Sin[L2]) + L1 Cos[L1] (-Cos[L2] + (L1 + 2 L2) Sin[L2])) + 1/4 Cd[
     L2] (L2 Sin[L1] ((2 L1 + L2) Cos[L2] + Sin[L2]) + Cos[L1] (-L2 Cos[L2] + (-1 + L2^2) Sin[L2])) +
   1/4 CU2d[L1] Sin[L1 + L2] + 1/4 CU2d[L2] Sin[L1 + L2] +
   1/4 Sd[L1] (1/2 Cos[L1 - L2] + L1 L2 Cos[L1 - L2] +
      1/2 Cos[L1 + L2] - L1^2 Cos[L1 + L2] - L1 L2 Cos[L1 + L2] - L1 Sin[L1 + L2]) +
   1/4 CU1d[L2] (Cos[L1 + L2] - L1 Sin[L1 - L2] - L1 Sin[L1 + L2] - 2 L2 Sin[L1 + L2]) +
   1/4 Sd[L2] (1/2 Cos[L1 - L2] + L1 L2 Cos[L1 - L2] +
      1/2 Cos[L1 + L2] - L1 L2 Cos[L1 + L2] - L2^2 Cos[L1 + L2] - L2 Sin[L1 + L2]) +
   1/4 CU1d[L1] (Cos[L1 + L2] + L2 Sin[L1 - L2] - 2 L1 Sin[L1 + L2] - L2 Sin[L1 + L2]) +
   1/4 (-L2 Cos[L1 - L2] + 2 L1 Cos[L1 + L2] + L2 Cos[L1 + L2] + Sin[L1 + L2]) SU1d[L1] +
   1/4 (-L1 Cos[L1 - L2] + L1 Cos[L1 + L2] + 2 L2 Cos[L1 + L2] + Sin[L1 + L2]) SU1d[L2] -
   1/4 Cos[L1 + L2] SU2d[L1] - 1/4 Cos[L1 + L2] SU2d[L2] +
   1/4 (L1 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] + L2 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] - Cos[L1 + L2] CU1d[L1 + L2] -
     Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + L1^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + 2 L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] +
     L2^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - L1^2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] -
     2 L1 L2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - L2^2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] +
     2 L1 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 L2 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - CU2d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] +
     L1 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + L2 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] -
     2 L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] - Sin[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] + Cos[L1 + L2] SU2d[L1 + L2])
```

Z33

```
In[25]:= -I*60*(P+Q) // Simplify

Out[25]= -15 i (-2 L2 Cd[L2] Cos[L1] Cos[L2] + L1 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] + L2 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] +
    Cos[L1 - L2] CU1d[L1] + Cos[L1 + L2] CU1d[L1] - Cos[L1 - L2] CU1d[L1 - L2] +
    Cos[L1 - L2] CU1d[L2] + Cos[L1 + L2] CU1d[L2] - Cos[L1 + L2] CU1d[L1 + L2] +
    Cos[L1 - L2] Sd[L1] - L1^2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + 2 L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + Cos[L1 + L2] Sd[L1] -
    L1^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] - 2 L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] - Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
    L1^2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] - 2 L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] + L2^2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
    Cos[L1 - L2] Sd[L2] + 2 L1 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] - L2^2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] +
    Cos[L1 + L2] Sd[L2] - 2 L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] - L2^2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] -
    Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + L1^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + 2 L1 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] +
    L2^2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + 4 L1 L2 Cd[L2] Cos[L2] Sin[L1] - 2 L1 CU1d[L1] Sin[L1 - L2] +
    2 L2 CU1d[L1] Sin[L1 - L2] + 2 L1 CU1d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - 2 L2 CU1d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] -
    2 L1 CU1d[L2] Sin[L1 - L2] + 2 L2 CU1d[L2] Sin[L1 - L2] + CU2d[L1] Sin[L1 - L2] -
    CU2d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - CU2d[L2] Sin[L1 - L2] - L1 Sd[L1] Sin[L1 - L2] +
    L1 Sd[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - L2 Sd[L1 - L2] Sin[L1 - L2] + L2 Sd[L2] Sin[L1 - L2] +
    Cd[L1 - L2] ((L1 - L2) Cos[L1 - L2] - (-1 + L1^2 - 2 L1 L2 + L2^2) Sin[L1 - L2]) -
    2 Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] + 2 L2^2 Cd[L2] Cos[L1] Sin[L2] +
    2 Cd[L1] ((-1 + L1^2) Cos[L2] Sin[L1] + L1 Cos[L1] (-Cos[L2] + 2 L2 Sin[L2])) +
    Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - L1^2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 L1 L2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] -
    L2^2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 L1 CU1d[L1] Sin[L1 + L2] - 2 L2 CU1d[L1] Sin[L1 + L2] -
    2 L1 CU1d[L2] Sin[L1 + L2] - 2 L2 CU1d[L2] Sin[L1 + L2] + 2 L1 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] +
    2 L2 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + CU2d[L1] Sin[L1 + L2] + CU2d[L2] Sin[L1 + L2] -
    CU2d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - L1 Sd[L1] Sin[L1 + L2] - L2 Sd[L2] Sin[L1 + L2] +
    L1 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + L2 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 L1 Cos[L1 - L2] SU1d[L1] -
    2 L2 Cos[L1 - L2] SU1d[L1] + 2 L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L1] + 2 L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1] +
    Sin[L1 - L2] SU1d[L1] + Sin[L1 + L2] SU1d[L1] - 2 L1 Cos[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] +
    2 L2 Cos[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] - Sin[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] - 2 L1 Cos[L1 - L2] SU1d[L2] +
    2 L2 Cos[L1 - L2] SU1d[L2] + 2 L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L2] + 2 L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L2] -
    Sin[L1 - L2] SU1d[L2] + Sin[L1 + L2] SU1d[L2] - 2 L1 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] -
    2 L2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] - Sin[L1 + L2] SU1d[L1 + L2] -
    Cos[L1 - L2] SU2d[L1] - Cos[L1 + L2] SU2d[L1] + Cos[L1 - L2] SU2d[L1 - L2] -
    Cos[L1 - L2] SU2d[L2] - Cos[L1 + L2] SU2d[L2] + Cos[L1 + L2] SU2d[L1 + L2])
```

■ L1=L2=Lのとき

```
In[26]:= -I*60*(P+Q) /. {L1 -> L, L2 -> L} /.
    {Ud[0] -> 0, Cd[0] -> 0, Sd[0] -> 0, Ed[0] -> 0, CU1d[0] -> 0, CU2d[0] -> 0, SU1d[0] -> 0,
    SU2d[0] -> 0} // Simplify

Out[26]= -15 i (2 CU1d[L] + 2 Cos[2 L] CU1d[L] - Cos[2 L] CU1d[2 L] + 2 Sd[L] + 2 L^2 Sd[L] + 2 Cos[2 L] Sd[L] -
    6 L^2 Cos[2 L] Sd[L] - Cos[2 L] Sd[2 L] + 4 L^2 Cos[2 L] Sd[2 L] - 8 L CU1d[L] Sin[2 L] +
    4 L CU1d[2 L] Sin[2 L] + 2 CU2d[L] Sin[2 L] - CU2d[2 L] Sin[2 L] - 2 L Sd[L] Sin[2 L] +
    2 L Sd[2 L] Sin[2 L] + Cd[L] (-4 L Cos[L]^2 - 4 Cos[L] Sin[L] + 6 L^2 Sin[2 L]) +
    Cd[2 L] (2 L Cos[2 L] + (1 - 4 L^2) Sin[2 L]) + 8 L Cos[2 L] SU1d[L] + 2 Sin[2 L] SU1d[L] -
    4 L Cos[2 L] SU1d[2 L] - Sin[2 L] SU1d[2 L] - 2 SU2d[L] - 2 Cos[2 L] SU2d[L] + Cos[2 L] SU2d[2 L])
```

[確認]

Closed Form

In[20]:=
```
L1 = 1;
L2 = 2;
d = 3;
ψ[u_] := Exp[-I * Sqrt[u^2 + d^2]] / Sqrt[u^2 + d^2];
Ud[x_] := 2 * NIntegrate[u * ψ[u], {u, 0, x}];
Cd[x_] := 2 * NIntegrate[Cos[u] * ψ[u], {u, 0, x}];
Sd[x_] := 2 * NIntegrate[Sin[u] * ψ[u], {u, 0, x}];
Ed[x_] := 2 * NIntegrate[ψ[u], {u, 0, x}];
CU1d[x_] := 2 * NIntegrate[u * Cos[u] * ψ[u], {u, 0, x}];
CU2d[x_] := 2 * NIntegrate[u^2 * Cos[u] * ψ[u], {u, 0, x}];
SU1d[x_] := 2 * NIntegrate[u * Sin[u] * ψ[u], {u, 0, x}];
SU2d[x_] := 2 * NIntegrate[u^2 * Sin[u] * ψ[u], {u, 0, x}];
```

In[32]:=
```
-I * 60 * (P + Q)
```

Out[32]= $1.52216 + 3.98768\,i$

Numerical Integration

In[33]:=
```
Clear[L, d];
L[1] = 1;
L[2] = 2;
d = 3;
ψ[u_] := Exp[-I * Sqrt[u^2 + d^2]] / Sqrt[u^2 + d^2];
f3[i_, x_] = (L[i] - Abs[x]) * Cos[L[i] - Abs[x]];
df3[i_, x_] = Sign[-x] * (Cos[L[i] - Abs[x]] - (L[i] - Abs[x]) * Sin[L[i] - Abs[x]]);
-I * 30 * NIntegrate[(f3[1, x1] * f3[2, x2] - df3[1, x1] * df3[2, x2]) * ψ[x1 - x2],
  {x1, -L[1], L[1]}, {x2, -L[2], L[2]}]
```

Out[40]= $1.52216 + 3.98768\,i$

6.2.6 $Z_{ij}^{23}(=Z_{ji}^{32})$

$$f^2(x)=\begin{cases}1-\cos(L-x) & (x\ge 0)\\ 1-\cos(L+x) & (x\le 0)\end{cases},\quad f^3(x)=\begin{cases}(L-x)\cos(L-x) & (x\ge 0)\\ (L+x)\cos(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^2(x_1)=\begin{cases}1-\cos(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) & \cdots①\\ 1-\cos(L_1+x_1) & (x_1\le 0) & \cdots②\end{cases}\\ f^3(x_2)=\begin{cases}(L_2-x_2)\cos(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) & \cdots③\\ (L_2+x_2)\cos(L_2+x_2) & (x_2\le 0) & \cdots④\end{cases}\end{array}\right.$$

$$f^{2\prime}(x)=\begin{cases}-\sin(L-x) & (x\ge 0)\\ \sin(L+x) & (x\le 0)\end{cases},\quad f^{3\prime}(x)=\begin{cases}-\cos(L-x)+(L-x)\sin(L-x) & (x\ge 0)\\ \cos(L+x)-(L+x)\sin(L+x) & (x\le 0)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f^{2\prime}(x_1)=\begin{cases}-\sin(L_1-x_1) & (x_1\ge 0) & \cdots⑤\\ \sin(L_1+x_1) & (x_1\le 0) & \cdots⑥\end{cases}\\ f^{3\prime}(x_2)=\begin{cases}-\cos(L_2-x_2)+(L_2-x_2)\sin(L_2-x_2) & (x_2\ge 0) & \cdots⑦\\ \cos(L_2+x_2)-(L_2+x_2)\sin(L_2+x_2) & (x_2\le 0) & \cdots⑧\end{cases}\end{array}\right.$$

P の計算

$$\begin{aligned}P&=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\{①③-⑤⑦\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}[\{1-\cos(L_1-x_1)\}\{(L_2-x_2)\cos(L_2-x_2)\}\\ &\quad-\{-\sin(L_1-x_1)\}\{-\cos(L_2-x_2)+(L_2-x_2)\sin(L_2-x_2)\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2\end{aligned}$$

■積和公式適用関数の定義

```
In[1]:= TrigTimesToAdd[f_] := Module[{a, b},
    f /. {Sin[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] + Sin[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]*Sin[b_*u] → 1/2 (Sin[(a+b)*u] - Sin[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]*Cos[b_*u] → 1/2 (Cos[(a+b)*u] + Cos[(a-b)*u]),
      Sin[a_*u]*Sin[b_*u] → -1/2 (Cos[(a+b)*u] - Cos[(a-b)*u]),
      Cos[a_*u]^2 → 1/2 (Cos[2*a*u] + 1),
      Sin[a_*u]^2 → -1/2 (Cos[2*a*u] - 1)}];
```

P

■vで積分

```
In[2]:= jacobi = 1/2;
f[u_, v_] :=
  jacobi * ((1 - Cos[L1 - x1]) * ((L2 - x2) * Cos[L2 - x2]) -
     (-Sin[L1 - x1]) * (-Cos[L2 - x2] + (L2 - x2) * Sin[L2 - x2])) * ψ[u] /.
   {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
pvint1[1] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, -u, u + 2 * L2}]
  ];
pvint1[2] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
  ];
pvint1[3] = Simplify[
   Integrate[f[u, v], {v, u, -u + 2 * L1}]
  ];
```

■uで積分

```
In[8]:= Do[
  pvint2[i] =
   Expand[ TrigTimesToAdd[TrigExpand[pvint1[i]]]] /.
    {((u_)^2 * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU2d[u] / 2, ((u_)^2 * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU2d[u] / 2,
     ((u_) * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU1d[u] / 2, ((u_) * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU1d[u] / 2,
     (u_) * ψ[u_] → Ud[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u] / 2,
     Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u] / 2, ψ[u_] → Ed[u] / 2} // Simplify,
  {i, 1, 3}
 ]

In[9]:= P =
  ((pvint2[1] /. u → L1 - L2) - (pvint2[1] /. u → -L2)) +
    ((pvint2[2] /. u → 0) - (pvint2[2] /. u → L1 - L2)) +
    ((pvint2[3] /. u → L1) - (pvint2[3] /. u → 0)) /.
   {CU1d[0] → 0, CU2d[0] → 0, SU1d[0] → 0, SU2d[0] → 0, Ud[0] → 0, Cd[0] → 0,
    Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
    CU1d[-u_] → CU1d[u], CU2d[-u_] → -CU2d[u], SU1d[-u_] → -SU1d[u],
    SU2d[-u_] → SU2d[u], Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify
```

Out[9]= $\frac{1}{4}$ (2 Cd[L2] Cos[L2] + 2 Cos[L2] Ed[L1] - 2 Ed[L1 - L2] - 2 Ed[L2] + 2 L1 Cos[L1 - L2] Sd[L1] -
L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] - 2 L1 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
2 L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] - L2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] - 2 L2 Cos[L2] Sd[L2] +
L2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] - 2 L2 Cd[L2] Cos[L2] Sin[L1] + 2 CU1d[L1] Sin[L1 - L2] -
2 CU1d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] + CU1d[L2] Sin[L1 - L2] - 2 Sd[L1] Sin[L1 - L2] +
2 Sd[L1 - L2] Sin[L1 - L2] + 2 Cd[L1 - L2] (Cos[L1 - L2] + (L1 - L2) Sin[L1 - L2]) +
2 L2 Cd[L2] Sin[L2] - 2 CU1d[L2] Sin[L2] + 2 L2 Ed[L1] Sin[L2] + 2 Sd[L2] Sin[L2] -
2 Cd[L1] (Sin[L1] (L1 Cos[L2] + Sin[L2]) + Cos[L1] (Cos[L2] + (-L1 + L2) Sin[L2])) +
CU1d[L2] Sin[L1 + L2] - 2 Cos[L1 - L2] SU1d[L1] + 2 Cos[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] +
Cos[L1 - L2] SU1d[L2] + 2 Cos[L2] SU1d[L2] - Cos[L1 + L2] SU1d[L2])

```
In[10]:= Collect[P, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], CU1d[L1 - L2],
   CU2d[L1 - L2], SU1d[L1 - L2], SU2d[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
   CU1d[L1], CU2d[L1], SU1d[L1], SU2d[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2],
   CU1d[L2], CU2d[L2], SU1d[L2], SU2d[L2]}]
```

Out[10]= $-\frac{1}{2}$ Ed[L1 - L2] - $\frac{\text{Ed[L2]}}{2}$ +
$\frac{1}{4}$ Sd[L1] (2 L1 Cos[L1 - L2] - L2 Cos[L1 - L2] + L2 Cos[L1 + L2] - 2 Sin[L1 - L2]) +
$\frac{1}{2}$ CU1d[L1] Sin[L1 - L2] - $\frac{1}{2}$ CU1d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] +
$\frac{1}{4}$ Sd[L1 - L2] (-2 L1 Cos[L1 - L2] + 2 L2 Cos[L1 - L2] + 2 Sin[L1 - L2]) +
$\frac{1}{2}$ Cd[L1 - L2] (Cos[L1 - L2] + (L1 - L2) Sin[L1 - L2]) +
$\frac{1}{4}$ Sd[L2] (-L2 Cos[L1 - L2] - 2 L2 Cos[L2] + L2 Cos[L1 + L2] + 2 Sin[L2]) +
$\frac{1}{4}$ Ed[L1] (2 Cos[L2] + 2 L2 Sin[L2]) +
$\frac{1}{4}$ Cd[L2] (2 Cos[L2] - 2 L2 Cos[L2] Sin[L1] + 2 L2 Sin[L2]) -
$\frac{1}{2}$ Cd[L1] (Sin[L1] (L1 Cos[L2] + Sin[L2]) + Cos[L1] (Cos[L2] + (-L1 + L2) Sin[L2])) +
$\frac{1}{4}$ CU1d[L2] (Sin[L1 - L2] - 2 Sin[L2] + Sin[L1 + L2]) - $\frac{1}{2}$ Cos[L1 - L2] SU1d[L1] +
$\frac{1}{2}$ Cos[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] + $\frac{1}{4}$ (Cos[L1 - L2] + 2 Cos[L2] - Cos[L1 + L2]) SU1d[L2]

$\boxed{\text{Q の計算}}$

$$Q=\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}\{①④-⑤⑧\}\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=\int_0^{L_1}\int_{-L_2}^{0}[\{1-\cos(L_1-x_1)\}\{(L_2+x_2)\cos(L_2+x_2)\}$$

$$-\{-\sin(L_1-x_1)\}\{\cos(L_2+x_2)-(L_2+x_2)\sin(L_2+x_2)\}]\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Q

■vで積分

```
In[16]:= jacobi = 1/2;
  g[u_, v_] :=
    jacobi * ((1 - Cos[L1 - x1]) * ((L2 + x2) * Cos[L2 + x2]) -
        (-Sin[L1 - x1]) * (Cos[L2 + x2] - (L2 + x2) * Sin[L2 + x2])) * ψ[u] /.
     {x1 → 1/2 (u + v), x2 → 1/2 (-u + v)};
  qvint1[1] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, -u, u}]
    ];
  qvint1[2] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, -u, -u + 2 * L1}]
    ];
  qvint1[3] = Simplify[
     Integrate[g[u, v], {v, u - 2 * L2, -u + 2 * L1}]
    ];
```

■uで積分

```
In[22]:= Do[
   qvint2[i] =
    Expand[TrigTimesToAdd[TrigExpand[qvint1[i]]]] /.
       {Cos[u_/2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Cd[d/2, u/2],
        Sin[u_/2] * ψ[u_] → Exp[-2 * I] * Sd[d/2, u/2]} /.
      {((u_)^2 * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU2d[u]/2, ((u_)^2 * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU2d[u]/2,
       ((u_) * Cos[u_]) * ψ[u_] → CU1d[u]/2, ((u_) * Sin[u_]) * ψ[u_] → SU1d[u]/2,
       (u_) * ψ[u_] → Ud[u]/2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u]/2, Cos[u_] * ψ[u_] → Cd[u]/2,
       Sin[u_] * ψ[u_] → Sd[u]/2, ψ[u_] → Ed[u]/2} // Simplify,
   {i, 1, 3}
  ]

In[23]:= Q =
   ((qvint2[1] /. u → L1) - (qvint2[1] /. u → 0)) +
     ((qvint2[2] /. u → L2) - (qvint2[2] /. u → L1)) +
     ((qvint2[3] /. u → L1 + L2) - (qvint2[3] /. u → L2)) /.
    {CU1d[0] → 0, CU2d[0] → 0, SU1d[0] → 0, SU2d[0] → 0, Ud[0] → 0, Cd[0] → 0,
     Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, Ud[-u_] → Ud[u], Cd[-u_] → -Cd[u], Sd[-u_] → Sd[u],
     CU1d[-u_] → CU1d[u], CU2d[-u_] → -CU2d[u], SU1d[-u_] → -SU1d[u],
     SU2d[-u_] → SU2d[u], Ed[-u_] → -Ed[u]} // Simplify

Out[23]= 1/4 (2 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] + 2 Cos[L2] Ed[L1] +
    2 Ed[L2] - 2 Ed[L1 + L2] - L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + 2 L1 Cos[L1 + L2] Sd[L1] +
    L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] - L2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] + 2 L2 Cos[L2] Sd[L2] +
    L2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] - 2 L1 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] - 2 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] +
    CU1d[L2] Sin[L1 - L2] + 2 CU1d[L2] Sin[L2] + 2 L2 Ed[L1] Sin[L2] -
    2 Sd[L2] Sin[L2] - 2 Cd[L2] (Cos[L2] + L2 Cos[L2] Sin[L1] + L2 Sin[L2]) -
    2 Cd[L1] (Cos[L1 + L2] + L1 Cos[L2] Sin[L1] + (L1 + L2) Cos[L1] Sin[L2]) +
    2 L1 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 L2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 CU1d[L1] Sin[L1 + L2] +
    CU1d[L2] Sin[L1 + L2] - 2 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 Sd[L1] Sin[L1 + L2] +
    2 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - 2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1] + Cos[L1 - L2] SU1d[L2] -
    2 Cos[L2] SU1d[L2] - Cos[L1 + L2] SU1d[L2] + 2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2])

In[24]:= Collect[Q, {Ud[L1 - L2], Cd[L1 - L2], Sd[L1 - L2], Ed[L1 - L2], CU1d[L1 - L2],
    CU2d[L1 - L2], SU1d[L1 - L2], SU2d[L1 - L2], Ud[L1], Cd[L1], Sd[L1], Ed[L1],
    CU1d[L1], CU2d[L1], SU1d[L1], SU2d[L1], Ud[L2], Cd[L2], Sd[L2], Ed[L2],
    CU1d[L2], CU2d[L2], SU1d[L2], SU2d[L2]}]

Out[24]= Ed[L2]/2 + 1/4 Sd[L2] (-L2 Cos[L1 - L2] + 2 L2 Cos[L2] + L2 Cos[L1 + L2] - 2 Sin[L2]) -
   1/2 Cd[L2] (Cos[L2] + L2 Cos[L2] Sin[L1] + L2 Sin[L2]) + 1/4 Ed[L1] (2 Cos[L2] + 2 L2 Sin[L2]) -
   1/2 Cd[L1] (Cos[L1 + L2] + L1 Cos[L2] Sin[L1] + (L1 + L2) Cos[L1] Sin[L2]) +
   1/4 Sd[L1] (-L2 Cos[L1 - L2] + 2 L1 Cos[L1 + L2] + L2 Cos[L1 + L2] - 2 Sin[L1 + L2]) +
   1/2 CU1d[L1] Sin[L1 + L2] + 1/4 CU1d[L2] (Sin[L1 - L2] + 2 Sin[L2] + Sin[L1 + L2]) -
   1/2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1] + 1/4 (Cos[L1 - L2] - 2 Cos[L2] - Cos[L1 + L2]) SU1d[L2] +
   1/4 (2 Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] - 2 Ed[L1 + L2] - 2 L1 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] -
     2 L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + 2 L1 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 L2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] -
     2 CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + 2 Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2])
```

Z23

In[25]:= -I*60*(P+Q) // Simplify

Out[25]= 30 ⅈ (-Cd[L1 + L2] Cos[L1 + L2] - 2 Cos[L2] Ed[L1] + Ed[L1 - L2] + Ed[L1 + L2] -
L1 Cos[L1 - L2] Sd[L1] + L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1] - L1 Cos[L1 + L2] Sd[L1] -
L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1] + L1 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] - L2 Cos[L1 - L2] Sd[L1 - L2] +
L2 Cos[L1 - L2] Sd[L2] - L2 Cos[L1 + L2] Sd[L2] + L1 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] +
L2 Cos[L1 + L2] Sd[L1 + L2] + 2 L2 Cd[L2] Cos[L2] Sin[L1] - CU1d[L1] Sin[L1 - L2] +
CU1d[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - CU1d[L2] Sin[L1 - L2] + Sd[L1] Sin[L1 - L2] -
Sd[L1 - L2] Sin[L1 - L2] - Cd[L1 - L2] (Cos[L1 - L2] + (L1 - L2) Sin[L1 - L2]) -
2 L2 Ed[L1] Sin[L2] + 2 Cd[L1] (L1 Cos[L2] Sin[L1] + Cos[L1] (Cos[L2] + L2 Sin[L2])) -
L1 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] - L2 Cd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] -
CU1d[L1] Sin[L1 + L2] - CU1d[L2] Sin[L1 + L2] + CU1d[L1 + L2] Sin[L1 + L2] +
Sd[L1] Sin[L1 + L2] - Sd[L1 + L2] Sin[L1 + L2] + Cos[L1 - L2] SU1d[L1] +
Cos[L1 + L2] SU1d[L1] - Cos[L1 - L2] SU1d[L1 - L2] -
Cos[L1 - L2] SU1d[L2] + Cos[L1 + L2] SU1d[L2] - Cos[L1 + L2] SU1d[L1 + L2])

■ L1=L2=Lのとき

In[26]:= -I*60*(P+Q) /. {L1 → L, L2 → L} /.
{Ud[0] → 0, Cd[0] → 0, Sd[0] → 0, Ed[0] → 0, CU1d[0] → 0, CU2d[0] → 0, SU1d[0] → 0,
SU2d[0] → 0} // Simplify

Out[26]= 30 ⅈ (-2 Cos[L] Ed[L] + Ed[2 L] + L Sd[L] - 3 L Cos[2 L] Sd[L] +
2 L Cos[2 L] Sd[2 L] - 2 L Ed[L] Sin[L] + 2 Cd[L] Cos[L] (Cos[L] + 3 L Sin[L]) -
2 CU1d[L] Sin[2 L] + CU1d[2 L] Sin[2 L] + Sd[L] Sin[2 L] - Sd[2 L] Sin[2 L] -
Cd[2 L] (Cos[2 L] + 2 L Sin[2 L]) + 2 Cos[2 L] SU1d[L] - Cos[2 L] SU1d[2 L])

[確認]

Closed Form

```
In[20]:= L1 = 1;
         L2 = 2;
         d = 3;
         ψ[u_] := Exp[-I*Sqrt[u^2 + d^2]] / Sqrt[u^2 + d^2];
         Ud[x_] := 2*NIntegrate[u*ψ[u], {u, 0, x}];
         Cd[x_] := 2*NIntegrate[Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         Sd[x_] := 2*NIntegrate[Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         Ed[x_] := 2*NIntegrate[ψ[u], {u, 0, x}];
         CU1d[x_] := 2*NIntegrate[u*Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         CU2d[x_] := 2*NIntegrate[u^2*Cos[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         SU1d[x_] := 2*NIntegrate[u*Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];
         SU2d[x_] := 2*NIntegrate[u^2*Sin[u]*ψ[u], {u, 0, x}];

In[32]:= -I*60*(P+Q)

Out[32]= 0.631584 + 1.65777 i
```

Numerical Integration

```
In[33]:= Clear[L, d];
         L[1] = 1;
         L[2] = 2;
         d = 3;
         ψ[u_] := Exp[-I*Sqrt[u^2 + d^2]] / Sqrt[u^2 + d^2];
         f2[i_, x_] = 1 - Cos[L[i] - Abs[x]];
         df2[i_, x_] = Sign[-x] * Sin[L[i] - Abs[x]];
         f3[i_, x_] = (L[i] - Abs[x]) * Cos[L[i] - Abs[x]];
         df3[i_, x_] = Sign[-x] * (Cos[L[i] - Abs[x]] - (L[i] - Abs[x]) * Sin[L[i] - Abs[x]]);
         -I*30*NIntegrate[(f2[1, x1]*f3[2, x2] - df2[1, x1]*df3[2, x2])*ψ[x1 - x2],
           {x1, -L[1], L[1]}, {x2, -L[2], L[2]}]

Out[42]= 0.631584 + 1.65777 i
```

6.3 $C_D(x), CU1_D(x), CU2_D(x), S_D(x), SU1_D(x), SU2_D(x)$ の計算

■ $C_D(x)$ の計算

$$\int_0^x \cos u \frac{\exp\left(-j\sqrt{u^2+D^2}\right)}{\sqrt{u^2+D^2}}du$$

$j\sqrt{u^2+D^2}=v$ とおくと

$-\left(u^2+D^2\right)=v^2$, $u^2=-\left(v^2+D^2\right)$, $u=\pm j\sqrt{v^2+D^2}$, $u=j\sqrt{v^2+D^2}$

$$du=j\frac{v}{\sqrt{v^2+D^2}}dv=-\frac{v}{u}dv$$

u	0	$\rightarrow$	x
v	jD	$\rightarrow$	$j\sqrt{x^2+D^2}$

$$=j\int_{jD}^{j\sqrt{x^2+D^2}}\cos\left(j\sqrt{v^2+D^2}\right)\frac{\exp(-v)}{v}\left(-\frac{v}{u}dv\right)$$

$$=\int_{jD}^{j\sqrt{x^2+D^2}}\cosh\left(\sqrt{v^2+D^2}\right)\frac{\exp(-v)}{\sqrt{v^2+D^2}}dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{jD}^{j\sqrt{x^2+D^2}}\left\{\exp\left(\sqrt{v^2+D^2}\right)+\exp\left(-\sqrt{v^2+D^2}\right)\right\}\frac{\exp(-v)}{\sqrt{v^2+D^2}}dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{jD}^{j\sqrt{x^2+D^2}}\left[\frac{\exp\left\{\sqrt{v^2+D^2}-v\right\}}{\sqrt{v^2+D^2}}+\frac{\exp\left\{-\left(\sqrt{v^2+D^2}+v\right)\right\}}{\sqrt{v^2+D^2}}\right]dv$$

[1st term]

$$\int_{jD}^{j\sqrt{x^2+D^2}}\frac{\exp\left\{\sqrt{v^2+D^2}-v\right\}}{\sqrt{v^2+D^2}}dv$$

$\sqrt{v^2+D^2}-v=-t$ とおくと

$$-dt=\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+D^2}}-1\right)dv=-\frac{\sqrt{v^2+D^2}-v}{\sqrt{v^2+D^2}}dv=\frac{t}{\sqrt{v^2+D^2}}dv$$

$$dv=-\frac{\sqrt{v^2+D^2}}{t}dt$$

v	$jD \rightarrow j\sqrt{x^2+D^2}$
t	$jD \rightarrow j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)$

$$=\int_{jD}^{j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)}\frac{\exp(-t)}{\sqrt{v^2+D^2}}\left(-\frac{\sqrt{v^2+D^2}}{t}dt\right)$$

$$=-\int_{jD}^{j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)}\frac{\exp(-t)}{t}dt$$

$$=-\int_{jD}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{\infty}^{j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)}\frac{\exp(-t)}{t}dt$$

$$=-\int_{jD}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt-\left[-\int_{j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]$$

$$=E_i(-jD)-E_i\left(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)\right)$$

ここで、E_i は

$$E_i(z)=-\int_{-z}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt$$

で定義される指数積分関数である。

[2nd term]

$$\int_{jD}^{j\sqrt{x^2+D^2}}\frac{\exp\left\{-\left(\sqrt{v^2+D^2}+v\right)\right\}}{\sqrt{v^2+D^2}}dv$$

$\sqrt{v^2+D^2}+v=t$ とおくと

$$dt=\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+D^2}}+1\right)dv=\frac{\sqrt{v^2+D^2}+v}{\sqrt{v^2+D^2}}dv=\frac{t}{\sqrt{v^2+D^2}}dv$$

$$dv=\frac{\sqrt{v^2+D^2}}{t}dt$$

v	$jD \rightarrow j\sqrt{x^2+D^2}$
t	$jD \rightarrow j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)$

$$=\int_{jD}^{j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)}\frac{\exp(-t)}{\sqrt{v^2+D^2}}\left(\frac{\sqrt{v^2+D^2}}{t}dt\right)$$

$$=\int_{jD}^{j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)}\frac{\exp(-t)}{t}dt$$

$$=\int_{jD}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt+\int_{\infty}^{j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)}\frac{\exp(-t)}{t}dt$$

$$=-\left[-\int_{jD}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]-\int_{j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt$$

$$=-E_i(-jD)+E_i(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right))$$

よって、

$$C_D(x)=2\int_0^x\cos u\frac{\exp\left(-j\sqrt{u^2+D^2}\right)}{\sqrt{u^2+D^2}}du=E_i(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right))-E_i(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right))$$

■ $CU1_D(x)$ の計算

$$CU1_D(x)=2\int_0^x t\cos t\frac{\exp\left(-j\sqrt{t^2+D^2}\right)}{\sqrt{t^2+D^2}}dt$$

部分積分すると

$$=\left[tC_D(t)\right]_0^x-\int_0^x C_D(t)dt$$

ここで、

$$\int_0^x E_i(-j\left(\sqrt{t^2+D^2}+t\right))dt$$

$-j\left(\sqrt{t^2+D^2}+t\right)=v$ とおくと

$$-j\sqrt{t^2+D^2}=v+jt\,,\ \ -\left(t^2+D^2\right)=v^2+2jvt-t^2$$

$$-D^2=v^2+2jvt\,,\ \ t=-\frac{v^2+D^2}{2jv}$$

$$dv=-j\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+D^2}}+1\right)dt=-j\frac{\sqrt{t^2+D^2}+t}{\sqrt{t^2+D^2}}dt=\frac{v}{jv-t}dt$$

$$dt=\left(j-\frac{t}{v}\right)dv=\left(j+\frac{v^2+D^2}{2jv^2}\right)dt=\frac{j}{2}\left(1-\frac{D^2}{v^2}\right)dv$$

t	0	$\rightarrow$	x
v	$-jD$	$\rightarrow$	$-j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)$

$$\int_0^x E_i(-j\left(\sqrt{t^2+D^2}+t\right))dt = \frac{j}{2}\int_{-jD}^{-j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)}\left(1-\frac{D^2}{v^2}\right)E_i(v)dv$$

右辺の表現は Mathematica を用いて解析的に積分できる（後でまとめて示す)。
次に、

$$\int_0^x E_i(-j\left(\sqrt{t^2+D^2}-t\right))dt$$

$$-j\left(\sqrt{t^2+D^2}-t\right)=u$$ とおくと

$$-j\sqrt{t^2+D^2}=u-jt\,,\quad -\left(t^2+D^2\right)=u^2-2jut-t^2$$

$$-D^2=u^2-2jut\,,\quad t=\frac{u^2+D^2}{2ju}$$

$$du=-j\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+D^2}}-1\right)dt=-\left[-j\frac{\sqrt{t^2+D^2}-t}{\sqrt{t^2+D^2}}\right]dt=-\frac{u}{ju+t}dt$$

$$dt=-\left(j+\frac{t}{u}\right)du=-\left(j+\frac{u^2+D^2}{2ju^2}\right)du=-\frac{j}{2}\left(1-\frac{D^2}{u^2}\right)du$$

t	0	$\rightarrow$	x
u	$-jD$	$\rightarrow$	$-j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)$

$$\int_0^x E_i(-j\left(\sqrt{t^2+D^2}-t\right))dt = -\frac{j}{2}\int_{-jD}^{-j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)}\left(1-\frac{D^2}{u^2}\right)E_i(u)du$$

右辺の表現は Mathematica を用いて解析的に積分できる（後でまとめて示す)。
また、ここで、

$$\begin{cases} u=\sqrt{x^2+D^2}-x \\ v=\sqrt{x^2+D^2}+x \end{cases}$$

とおくと、 $x=\dfrac{v-u}{2}$ なので、

$$xC_D(x)=\frac{v-u}{2}C_D(\frac{v-u}{2})$$

である。よって、

CU1 D

```
In[1]:= intv = Integrate[I/2 * (1 - d^2/t^2) * ExpIntegralEi[t], {t, -I*d, -I*v}] // Simplify

Out[1]= -1/(2 v) (d^2 ⅇ^(-ⅈ v) - ⅈ ⅇ^(-ⅈ d) v - d ⅇ^(-ⅈ d) v + ⅈ ⅇ^(-ⅈ v) v -
        ⅈ d^2 v ExpIntegralEi[-ⅈ d] + (d^2 + ⅈ d^2 v - v^2) ExpIntegralEi[-ⅈ v])

In[3]:= intu = Integrate[-I/2 * (1 - d^2/t^2) * ExpIntegralEi[t], {t, -I*d, -I*u}] // Simplify

Out[3]= 1/(2 u) (d^2 ⅇ^(-ⅈ u) - ⅈ ⅇ^(-ⅈ d) u - d ⅇ^(-ⅈ d) u + ⅈ ⅇ^(-ⅈ u) u -
        ⅈ d^2 u ExpIntegralEi[-ⅈ d] + (d^2 + ⅈ d^2 u - u^2) ExpIntegralEi[-ⅈ u])

In[4]:= Cd[x] = ExpIntegralEi[-I*v] - ExpIntegralEi[-I*u];
        Collect[(v - u)/2 * Cd[x] - (intv - intu) // Simplify, {d^2, ⅇ^(-ⅈ d)}]

Out[5]= -ⅈ ⅇ^(-ⅈ d) - d ⅇ^(-ⅈ d) + 1/2 (ⅈ ⅇ^(-ⅈ u) + ⅈ ⅇ^(-ⅈ v) - v ExpIntegralEi[-ⅈ u] - u ExpIntegralEi[-ⅈ v]) +
        1/2 d^2 (ⅇ^(-ⅈ u)/u + ⅇ^(-ⅈ v)/v - 2 ⅈ ExpIntegralEi[-ⅈ d] + ⅈ ExpIntegralEi[-ⅈ u] +
          ExpIntegralEi[-ⅈ u]/u + ⅈ ExpIntegralEi[-ⅈ v] + ExpIntegralEi[-ⅈ v]/v)
```

より、

$$CU1_D(x)=\frac{1}{2}\left[-2(D+j)e^{-jD}+j(e^{-jv}+e^{-ju})+D^2\left\{\left(\frac{e^{-jv}}{v}+\frac{e^{-ju}}{u}\right)+S_D(x)\right\}\right]$$

と解析的に表現できる。

■ $CU2_D(x)$ の計算

$$CU2_D(x)=2\int_0^x t\cos t\frac{\exp\left(-j\sqrt{t^2+D^2}\right)}{\sqrt{t^2+D^2}}dt$$

部分積分すると

$$=\left[tCU1_D(t)\right]_0^x-\int_0^x CU1_D(t)dt$$

２項目をさらに部分積分すると

$$=xCU1_D(x)-\left[tC_D(t)\right]_0^x+\int_0^x C_D(t)dt$$

後は $CU1_D(x)$ の計算と同じなので省略する。結果は次のようになる[5]。

$$CU2_D(x) = \frac{1}{2}[\left\{\frac{1}{2} + j\frac{v}{2} - \left(\frac{D^2}{2v}\right)^2 + j\frac{D^4}{4v}\right\}e^{-jv} - \left\{\frac{1}{2} + j\frac{u}{2} - \left(\frac{D^2}{2u}\right)^2 + j\frac{D^4}{4u}\right\}e^{-ju}$$
$$- D^2\left\{1 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right\}C_D(x)]$$

■ $S_D(x), SU1_D(x), SU2_D(x)$

$C_D(x), CU1_D(x), CU2_D(x)$ と同様にして解析的に積分できる。定義と結果だけ示す。

$$S_D(x) = 2\int_0^x \sin u \frac{\exp\left(-j\sqrt{u^2+D^2}\right)}{\sqrt{u^2+D^2}}du$$
$$= jE_i(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}+x\right)) + jE_i(-j\left(\sqrt{x^2+D^2}-x\right)) - 2jE_i(-jD)$$

$$SU1_D(x) = 2\int_0^x t\sin t \frac{\exp\left(-j\sqrt{t^2+D^2}\right)}{\sqrt{t^2+D^2}}dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[jD^2\left(\frac{e^{-jv}}{v} - \frac{e^{-ju}}{u}\right) - (e^{-jv} - e^{-ju}) - D^2C_D(x)\right]$$

$$SU2_D(x) = 2\int_0^x t^2\sin t \frac{\exp\left(-j\sqrt{t^2+D^2}\right)}{\sqrt{t^2+D^2}}dt$$
$$= \frac{1}{2}[\left(D - j + j\frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{2}\right)e^{-jD}$$
$$- \left\{\frac{v}{2} - \frac{j}{2} + j\left(\frac{D^2}{2v}\right)^2 + \frac{D^4}{4v}\right\}e^{-jv} - \left\{\frac{u}{2} - \frac{j}{2} + j\left(\frac{D^2}{2u}\right)^2 + \frac{D^4}{4u}\right\}e^{-ju}$$
$$- D^2\left\{1 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right\}S_D(x)]$$

7. 諸特性の計算

7.1 電流分布

4.1 節と式(3)より、

$$I_i(z_i)=\sum_{l=1}^{M} I_i^l f_i^l(z_i)$$

数値計算で便利な表現はさらに式(6)より、

$$I_i(z_i)=\sum_{l=1}^{M} i_i^l \left\{ D_i^l f_i^l(z_i) \right\}$$

7.2 給電点電流

7.1 節で $z_i=0$ を代入すると、 $f_i^l(z_i)=1$ と定義されているから

$$I_i(0)=\sum_{l=1}^{M} I_i^l=\sum_{l=1}^{M} D_i^l i_i^l$$

7.3 入力インピーダンス、入力アドミタンス

入力インピーダンス: $Z_{in}^i=\dfrac{V_i}{I_i(0)}$

入力アドミタンス: $Y_{in}^i=1/Z_{in}^i$

7.4 自己インピーダンス・アドミタンス、相互インピーダンス・アドミタンス

アンテナ系給電点の電圧、電流だけに着目し、集中定数の回路系と見なしたときのパラメータである。アンテナの素子同士は空間で電磁的に結合するが、その空間を回路網と見なす。じつはこれは単なるアナロジーではなく、集中定数の配線による結合も電磁結合と見なせば全く同じものである。素子 i の給電点電圧と電流は V_i, I_i と表される。それらの関係を次のような行列で表す。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1i} & \cdots & Z_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{i1} & \cdots & Z_{ii} & \cdots & Z_{iN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & \cdots & Z_{Ni} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

$\lfloor Z_{ij} \rfloor$ をインピーダンス行列と言い、対角要素の $Z_{ij}(i=j)$ を素子 i の自己インピーダンス(self impedance)、それ以外の $Z_{ij}(i \neq j)$ を素子 i と素子 j の**相互インピーダンス(mutual impedance)**と言う。明らかに Z_{ij} は次のように求められる。

$$Z_{ij} = \left.\frac{V_i}{I_j}\right|_{I_m=0(m=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,N)}$$

素子 i の自己インピーダンスの計算は素子 i の給電点だけに電流を流し、他の素子の給電点は全て開放して（給電点電流が０）素子 i の給電点に発生する電圧を流した電流で割った値である。素子 i と素子 j の相互インピーダンスは素子 j の給電点だけに電流を流し、他の素子の給電点は全て開放して素子 i の給電点に発生する電圧を素子 j に流した電流で割った値である。しかし、これは素子 j を電流源で励振する方法なので ICT の計算には向かない。そこで、次のアドミタンス行列を考える。

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1i} & \cdots & Y_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{i1} & \cdots & Y_{ii} & \cdots & Y_{iN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & \cdots & Y_{Ni} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}$$

$[Y_{ij}] = [Z_{ij}]^{-1}$ である。対角要素の $Y_{ij}(i=j)$ を素子 i の自己アドミタンス、それ以外の $Y_{ij}(i \neq j)$ を素子 i と素子 j の相互アドミタンスと言う。Y_{ij} は次のように求められる。

$$Y_{ij} = \left.\frac{I_i}{V_j}\right|_{V_m=0(m=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,N)}$$

素子 i の自己アドミタンスの計算は素子 i の給電点だけに電圧をかけ、他の素子の給電点は全て短絡して励振しない状態で素子 i の給電点に流れる電流をかけた電圧で割った値である。素子 i と素子 j の相互アドミタンスの計算は素子 j の給電点だけに電圧をかけ、他の素子の給電点は全て短絡して励振しない状態で素子 i の給電点に流れる電流を素子 j にかけた電圧で割った値である。これだと ICT では素子 j だけにデルタギャップ給電し、素子 i の給電点電流を求めて上の計算をすれば求めることができる。

問題とする解析空間内の媒質が全て等方性媒質中にあるならば $[Z_{ij}]$ も $[Y_{ij}]$ も対称行列となっている。これは電磁界の**可逆定理(reciprocity theorem)**[6](pp. 127-132)による。可逆定理はマクスウェルの方程式から簡単に導出することができる。回路網方程式のインピーダンス行列やアドミタンス行列も等方性の媒質を使うとき対称行列となるが、集中定数回路の問題も ICT で扱うアン

テナ系の低周波の問題だからである。

7.5 **遠方界指向性** (Radiation Pattern)

電流を積分してベクトルポテンシャルを計算して求めても、アンテナワイヤーを細かく分割して（そのように仮定して）微小ダイポール近似して求めてもよい。ここでは計算時間が速く、より厳密な前者の計算法を紹介する。
遠方界は次のように表される[6](p. 125)。

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A}_\perp \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\eta}\hat{r}\times\mathbf{E}\end{aligned}}$$

ここで、$\mathbf{A}_\perp$ は電流が作るベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathbf{J}\frac{e^{-jkr}}{r}dV$$

の $\hat{r}$ 成分を除いたもの

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \hat{r}(\mathbf{A}\cdot\hat{r})$$

である。

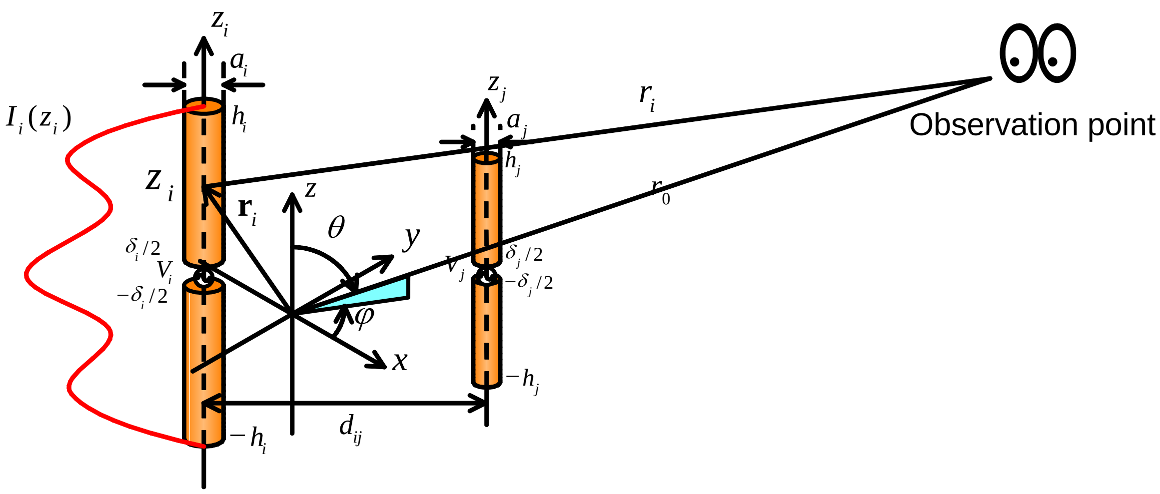


図 5 遠方界指向性

ここでは、図 5 に示すようなモデルを用いているので、

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N}\hat{z}I_i(z_i)$$

$$\mathbf{A} = \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}I_i(z_i)\frac{e^{-jkr_i}}{r_i}dz_i$$

次のような遠方界近似を行う。

[遠方界近似]

$r_i \approx r_0 - \mathbf{r}_i \cdot \hat{r}_0 = r_0 - \sin\theta(x_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi) - z_i\cos\theta$ 指数部

$r_i \approx r_0$ 分母

ここで、

$\mathbf{r}_i = \hat{x}x_i + \hat{y}y_i$

$\hat{r}_0 = \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta$

を用いた(付録 A.6.2 参照)。

x_i, y_i は素子 i の絶対 x, y 座標である。

$$\mathbf{A} \approx \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\sum_{i=1}^{N} e^{jk\sin\theta(x_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi)}\int_{-h_i}^{h_i} I_i(z_i)e^{jkz_i\cos\theta}dz_i$$

式(3)を代入すると、

$$= \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\sum_{i=1}^{N} e^{jk\sin\theta(x_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi)}\sum_{l=1}^{M} I_i^l \int_{-h_i}^{h_i} f_i^l(z_i)e^{jkz_i\cos\theta}dz_i$$

$$= \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\sum_{i=1}^{N} e^{jk\sin\theta(x_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi)}\sum_{l=1}^{M} i_i^l \int_{-h_i}^{h_i} \left\{D_i^l f_i^l(z_i)\right\} e^{jkz_i\cos\theta}dz_i$$

ここで、

$\varsigma_i = kz_i$

とおく。ついでに $L_i = kh_i$ とおくと

$d\varsigma_i = kdz_i$

z_i	$-h_i$	$\to$	h_i
ς_i	$-L_i$	$\to$	L_i

また付録 A.6.2 より、 $\hat{z} = -\hat{\theta}\sin\theta$ なので

$$= -\hat{\theta}\sin\theta\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{k}\frac{e^{-jkr_0}}{r_0}\sum_{i=1}^{N} e^{jk\sin\theta(x_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi)}\sum_{l=1}^{M} i_i^l \int_{-L_i}^{L_i} \left\{D_i^l f_i^l\left(\frac{\varsigma_i}{k}\right)\right\} e^{j\varsigma_i\cos\theta}d\varsigma_i$$

ここで、積分の項は次のように Mathematica で計算する。

Radiation Pattern

Takuichi Hirano

f1

```
In[1]:= f1 = Sin[L - ξ]; (* ξ>0 *)
        f2 = Sin[L + ξ]; (* ξ<0 *)
        fe[1] =
         Integrate[ComplexExpand[f2 * Exp[I * ξ * Cos[θ]]], {ξ, -L, 0}] +
           Integrate[ComplexExpand[f1 * Exp[I * ξ * Cos[θ]]], {ξ, 0, L}] // FullSimplify
```

Out[3]= $2\,(-\mathrm{Cos}[L] + \mathrm{Cos}[L\,\mathrm{Cos}[\theta]])\,\mathrm{Csc}[\theta]^2$

f2

```
In[4]:= f1 = 1 - Cos[L - ξ]; (* ξ>0 *)
        f2 = 1 - Cos[L + ξ]; (* ξ<0 *)
        fe[2] =
         Integrate[ComplexExpand[f2 * Exp[I * ξ * Cos[θ]]], {ξ, -L, 0}] +
           Integrate[ComplexExpand[f1 * Exp[I * ξ * Cos[θ]]], {ξ, 0, L}] // FullSimplify
```

Out[6]= $2\,\mathrm{Csc}[\theta]^2\,\mathrm{Sec}[\theta]\,(-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[L] + \mathrm{Sin}[L\,\mathrm{Cos}[\theta]])$

f3

```
In[7]:= f1 = (L - ξ) * (1 - Cos[L - ξ]); (* ξ>0 *)
        f2 = (L + ξ) * (1 - Cos[L + ξ]); (* ξ<0 *)
        fe[3] =
         Integrate[ComplexExpand[f2 * Exp[I * ξ * Cos[θ]]], {ξ, -L, 0}] +
           Integrate[ComplexExpand[f1 * Exp[I * ξ * Cos[θ]]], {ξ, 0, L}] // FullSimplify
```

Out[9]= $-\frac{1}{4}\,\mathrm{Csc}[\theta]^4\,\mathrm{Sec}[\theta]^2\,(-3 + 7\,\mathrm{Cos}[L] + 4\,\mathrm{Cos}[2\theta]\,(1 + 2\,\mathrm{Cos}[L] - 3\,\mathrm{Cos}[L\,\mathrm{Cos}[\theta]]) - 4\,\mathrm{Cos}[L\,\mathrm{Cos}[\theta]] + L\,\mathrm{Sin}[L] + \mathrm{Cos}[4\theta]\,(-1 + \mathrm{Cos}[L] - L\,\mathrm{Sin}[L]))$

Limit

θ=0°,90°で0割りの表現になってしまう。
これは除去可能な特異点だが、数値計算ではエラーになってしまうので、あらかじめ場合分けしておく。

f1

In[10]:= **Limit[fe[1], θ → 0]**

Out[10]= $L\,\mathrm{Sin}[L]$

f2

In[11]:= **Limit[fe[2], θ → 0]**

Out[11]= $\frac{1}{2} e^{-i L} \left(i - L - e^{2 i L} (i + L)\right)$

In[12]:= **Limit[fe[2], θ → $\frac{\pi}{2}$]**

Out[12]= $2\,(L - \mathrm{Sin}[L])$

f3

θ→0の場合、実は外にあるsinθもかけると0になる。

In[13]:= **Limit[fe[3], θ → 0]**

Out[13]= $\frac{1}{2}\,(4 - (4 + L^2)\,\mathrm{Cos}[L] - L\,\mathrm{Sin}[L])$

In[14]:= **Limit[Sin[θ] * fe[3], θ → 0]**

Out[14]= 0

In[15]:= **Limit[fe[3], θ → $\frac{\pi}{2}$]**

Out[15]= $2 + L^2 - 2\,\mathrm{Cos}[L] - 2\,L\,\mathrm{Sin}[L]$

7.6 利得 (Gain)

$$W_{rad}(\theta,\varphi) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right]$$

$$= \frac{1}{\eta}\left|\mathbf{E}\right|^2 \qquad \text{放射強度}\ (W/m^2)$$

$$U(\theta,\varphi) = r^2 W_{rad}(\theta,\varphi) \qquad \text{放射強度}\ (W/\text{unit solid angle})$$

P_{in} 供給電力 (W)

とすると、利得（無指向性のアンテナで送信した場合に比べて電力を何倍にできるかという量）は

$$G = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_{in}}$$

で与えられる。$U(\theta,\varphi)$ は前節の指向性の計算で求められる。

また、P_{in} は指向性を全立体角にわたって積分してもよいが、この問題の場合、給電点の供給電圧と電流がわかっているので、

$$P_{in} = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{N} V_i I_i^*(0)\right]$$

で計算できる。

7.7 集中定数回路素子を負荷したアンテナ

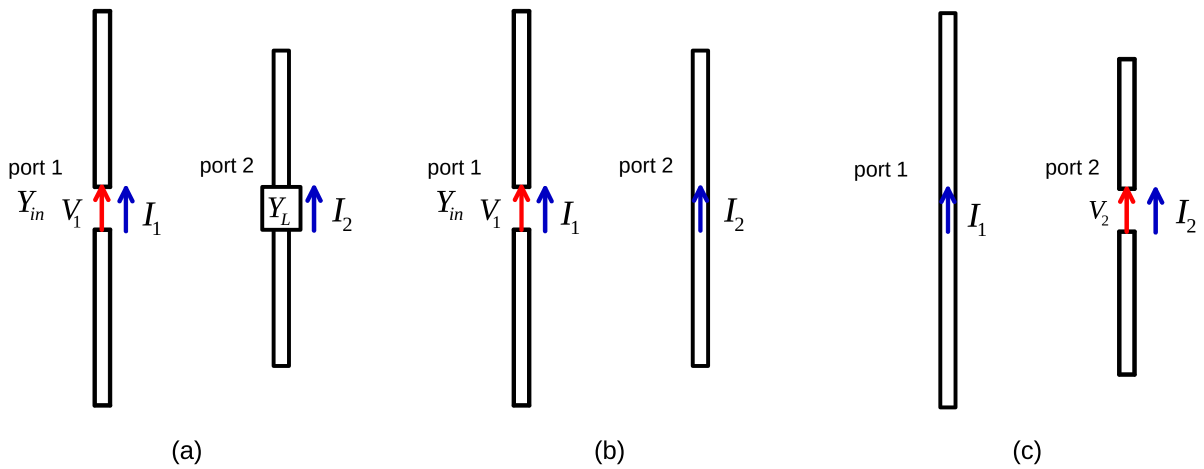


図 6 集中定数回路素子負荷モデル

図 6 のようなアンテナの一部に直列に集中定数回路素子を負荷したモデルを考える。これはポートという概念を用いて解くことができる[4](p.110, 6.2 Loaded Antennas)。ポートは２つの（半）無限に長い線路（２次元構造）の境界である。２次元構造を有する線路の例としては導波管や同軸ケーブルや平行２本線路などがある。また、ポートは２次元構造の線路とアンテナや共振器やマイクロ波回路などの他の構造物の境界面であることもある。他にも集中定数回路との接続境界

を表すこともある。ある（半）無限に長い線路を立体構造のものを繋ぐ問題を考えたとき、その境界面の電磁界を線路のモード関数の和で表すところが境界面をポートとして扱うときの特徴である。線路のモードの和で現しておくと、線路からの入射波と立体回路からの反射波は境界面から線路側に遠く離れた所では線路の基本モードだけが伝搬して、他の高次の減衰モードの影響は考える必要がない。線路側では普通そのような基本モードの特性が知りたいので、線路と立体回路などの境界をポートとして扱い、ポートの電磁界を線路のモード関数の和で表す。そして、あるポートを励振したときに他のポートに現れる電圧・電流などの入出力関係をインピーダンス行列、アドミタンス行列などで記述し、集中定数回路網の問題に直す。ポート間の入出力関係を求める際、３次元構造を考慮した解析法で計算しておくと３次元構造の影響も厳密に反映される。インピーダンス行列、アドミタンス行列などでポート間の入出力関係を表現しておくと後で励振するポートを変えたり、ポートに集中定数回路素子を負荷したときなどの特性を求めるのが簡単になる。

図 6(a)のように集中定数のアドミタンスY_Lをアンテナ２に負荷した問題を考える。アンテナ１の給電点をポート１、アンテナ２の負荷の両端をポート２とし、アンテナ１のポート１を電圧源で励振したときの特性を求める。これはエスパアンテナなどの解析に用いることができる。ポート１、２の電圧、電流を 7.4 節で説明したアドミタンス行列を用いて表現すると、

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 & \cdots ① \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 & \cdots ② \end{cases}$$

ここで、ポート２では電圧と電流は次の条件を満たさなければならない。

$$I_2 = -Y_L V_2$$

ここで、負号が付いているのは電流を電圧と同じ向きに定義しているからである。上式を②に代入すると、

$$-Y_L V_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

$$-(Y_{22} + Y_L)V_2 = Y_{21}V_1$$

$$V_2 = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_L}V_1 \tag{7}$$

上式を①に代入すると、

$$I_1 = Y_{11}V_1 - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_L}V_1$$

$$Y_{in} = \frac{I_1}{V_1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_L} \tag{8}$$

ここで、Y_{ij}の計算は 7.4 節で説明したように図 6(b), (c)のモデルを用いて計算することができる。

式(8)を用いて入力アドミタンス、インピーダンスなどの特性が計算できる。

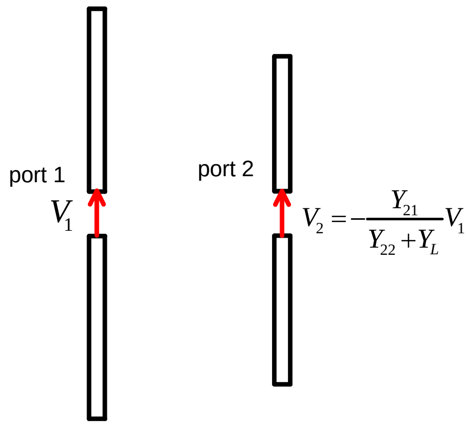


図 7 計算モデル

図 6(a)のモデルの放射特性、電流分布を求めるには２つの素子を同時に励振する図 7 のモデルを用い、電圧 V_2 として式(7)を用いる。

ところで、Y_{ij} を計算するときに図 6(b), (c)のモデルの計算を行ったので、再び図 7 のモデルを計算する必要はない。図 6(b), (c)のモデルの重ね合わせで図 7 のモデルの解を表現する方法を説明する。4.2 節で求めた行列方程式は次のようであった。

$$\begin{bmatrix} [z_{ij}^{11}] & \cdots & [z_{ij}^{1M}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [z_{ij}^{M1}] & \cdots & [z_{ij}^{MM}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_j^1] \\ \vdots \\ [i_j^M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[v_j^1] \\ \vdots \\ -[v_j^M] \end{bmatrix}$$

基底関数の数 M ($l, m = 1, \cdots, M$)と素子数 N ($i, j = 1, \cdots, N$)の番号を入れかえて次のように書くこともできる。

$$\begin{bmatrix} [z_{11}^{lm}] & \cdots & [z_{1N}^{lm}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [z_{N1}^{lm}] & \cdots & [z_{NN}^{lm}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_1^m] \\ \vdots \\ [i_N^m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[v_1^m] \\ \vdots \\ -[v_N^m] \end{bmatrix}$$

電流分布の重み係数を求めるために両辺にインピーダンス行列の逆行列をかけると

$$\begin{bmatrix} [i_1^m] \\ \vdots \\ [i_N^m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [z_{11}^{lm}] & \cdots & [z_{1N}^{lm}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [z_{N1}^{lm}] & \cdots & [z_{NN}^{lm}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -[v_1^m] \\ \vdots \\ -[v_N^m] \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{c:c:c}\left[z_{11}^{lm}\right] & \cdots & \left[z_{1N}^{lm}\right] \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \left[z_{N1}^{lm}\right] & \cdots & \left[z_{NN}^{lm}\right]\end{array}\right]^{-1}\left(\left[\begin{array}{c}-\left[v_1^m\right] \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline 0\end{array}\right]+\cdots+\left[\begin{array}{c}0 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline -\left[v_N^m\right]\end{array}\right]\right)$$

（行列の線形性から）

$$=\left[\begin{array}{c:c:c}\left[z_{11}^{lm}\right] & \cdots & \left[z_{1N}^{lm}\right] \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \left[z_{N1}^{lm}\right] & \cdots & \left[z_{NN}^{lm}\right]\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}-\left[v_1^m\right] \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline 0\end{array}\right]+\cdots+\left[\begin{array}{c:c:c}\left[z_{11}^{lm}\right] & \cdots & \left[z_{1N}^{lm}\right] \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \left[z_{N1}^{lm}\right] & \cdots & \left[z_{NN}^{lm}\right]\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}0 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline -\left[v_N^m\right]\end{array}\right]$$

上式の第一項目は素子１だけを励振し、他の素子は給電点を短絡して励振しない場合の電流基底関数の重みベクトルを表している。最後の項は素子 N だけを励振し、他の素子は給電点を短絡して励振しない場合の電流基底関数の重みベクトルを表している。よって、図 7 のモデルは図 6(b), (c)のモデルの重ね合わせで表すことができる。上の式のように１素子だけ励振するモデルにしておくと、励振電圧を A 倍に変化させるときでも電流分布を A 倍に変化させるだけでよいことがわかる。

8. 例題

8.1 １素子ダイポールアンテナの解析

8.1.1 Mathematica プログラムリスト（３項表現バージョン）

Analysis of a Dipole
Three-Term ICT

2002/11/6 Takuichi Hirano

Hallen's parameter

In[1]:= $\mathrm{Solve}\left[\Omega == 2 * \mathrm{Log}\left[\frac{2*h}{a}\right], a\right]$

Out[1]= $\{\{a \to 2\, e^{-\Omega/2}\, h\}\}$

U_D, C_D, S_D, E_D Analytical Definition

In[9]:=

$$\mathrm{Ud}[x\_] := -2 * i \left(e^{-i\sqrt{d^2}} - e^{-i\sqrt{d^2+x^2}}\right);$$

$$\mathrm{Cd}[x\_] := \mathrm{ExpIntegralEi}\left[-I * \left(\sqrt{x^2+d^2} + x\right)\right] - \mathrm{ExpIntegralEi}\left[-I * \left(\sqrt{x^2+d^2} - x\right)\right];$$

$$\mathrm{Sd}[x\_] := I * \mathrm{ExpIntegralEi}\left[-I * \left(\sqrt{x^2+d^2} + x\right)\right] + I * \mathrm{ExpIntegralEi}\left[-I * \left(\sqrt{x^2+d^2} - x\right)\right] - 2 * I * \mathrm{ExpIntegralEi}[-I * d];$$

$$\mathrm{Ed}[x\_] := 2 * \mathrm{NIntegrate}\left[\mathrm{Exp}\left[-I * \frac{1}{2} * \left(\mathrm{Exp}[t] + d^2 * \mathrm{Exp}[-t]\right)\right], \left\{t, \mathrm{Log}[d], \mathrm{Log}\left[\sqrt{x^2+d^2} + x\right]\right\}\right];$$

$$\mathrm{CU1d}[x\_] := \mathrm{Module}\Big[\left\{u = \sqrt{x^2+d^2} - x,\ v = \sqrt{x^2+d^2} + x\right\}, \frac{1}{2} * \Big(-2 * (d + I) * \mathrm{Exp}[-I * d] + I * (\mathrm{Exp}[-I * v] + \mathrm{Exp}[-I * u]) + d^2 * \left(\left(\frac{\mathrm{Exp}[-I * v]}{v} + \frac{\mathrm{Exp}[-I * u]}{u}\right) + \mathrm{Sd}[x]\right)\Big)\Big];$$

$$\mathrm{CU2d}[x\_] := \mathrm{Module}\Big[\left\{u = \sqrt{x^2+d^2} - x,\ v = \sqrt{x^2+d^2} + x\right\}, \frac{1}{2} * \Big(\left(\frac{1}{2} + I * \frac{v}{2} - \left(\frac{d^2}{2*v}\right)^2 + I * \frac{d^4}{4*v}\right) * \mathrm{Exp}[-I * v] - \left(\frac{1}{2} + I * \frac{u}{2} - \left(\frac{d^2}{2*u}\right)^2 + I * \frac{d^4}{4*u}\right) * \mathrm{Exp}[-I * u] - d^2 * \left(1 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) * \mathrm{Cd}[x]\Big)\Big];$$

$$\mathrm{SU1d}[x\_] := \mathrm{Module}\Big[\left\{u = \sqrt{x^2+d^2} - x,\ v = \sqrt{x^2+d^2} + x\right\}, \frac{1}{2} * \left(I * d^2 * \left(\frac{\mathrm{Exp}[-I * v]}{v} - \frac{\mathrm{Exp}[-I * u]}{u}\right) - (\mathrm{Exp}[-I * v] - \mathrm{Exp}[-I * u]) - d^2 * \mathrm{Cd}[x]\right)\Big];$$

$$\mathrm{SU2d}[x\_] := \mathrm{Module}\Big[\left\{u = \sqrt{x^2+d^2} - x,\ v = \sqrt{x^2+d^2} + x\right\}, \frac{1}{2} * \Big(\left(d - I + I * \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{2}\right) * \mathrm{Exp}[-I * d] - \left(\frac{v}{2} - \frac{I}{2} + I * \left(\frac{d^2}{2*v}\right)^2 + \frac{d^4}{4*v}\right) * \mathrm{Exp}[-I * v] - \left(\frac{u}{2} - \frac{I}{2} + I * \left(\frac{d^2}{2*u}\right)^2 + \frac{d^4}{4*u}\right) * \mathrm{Exp}[-I * u] - d^2 \left(1 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) * \mathrm{Sd}[x]\Big)\Big];$$

Impedance Matrices

```
In[16]:= z11[L_] := -30 i (4 Cos[L]^2 Sd[L] - Cos[2 L] Sd[2 L] + (-2 Cd[L] + Cd[2 L]) Sin[2 L]);
      z12[L_] :=
        -30 i (2 Cd[L] Cos[2 L] - Cd[2 L] Cos[2 L] - 2 Cos[L] Ed[L] + Ed[2 L] + 2 Sd[L] Sin[2 L] -
           Sd[2 L] Sin[2 L]);
      z13[L_] :=
        30 i (-2 L Cd[2 L] Cos[2 L] + L Cd[L] (1 + 3 Cos[2 L]) - 2 CU1d[L] - 2 Cos[2 L] CU1d[L] +
           Cos[2 L] CU1d[2 L] + 3 L Sd[L] Sin[2 L] - 2 L Sd[2 L] Sin[2 L] - 2 Sin[2 L] SU1d[L] +
           Sin[2 L] SU1d[2 L]);
      z21[L_] := z12[L];
      z22[L_] :=
        -30 i (2 L Ed[2 L] + Cos[2 L] Sd[2 L] - 4 Ed[L] Sin[L] + 4 Sd[L] Sin[L]^2 +
           2 Cd[L] Sin[2 L] - Cd[2 L] Sin[2 L] - Ud[2 L]);
      z23[L_] :=
        30 i (-2 Cos[L] Ed[L] + Ed[2 L] + L Sd[L] - 3 L Cos[2 L] Sd[L] + 2 L Cos[2 L] Sd[2 L] -
           2 L Ed[L] Sin[L] + 2 Cd[L] Cos[L] (Cos[L] + 3 L Sin[L]) - 2 CU1d[L] Sin[2 L] +
           CU1d[2 L] Sin[2 L] + Sd[L] Sin[2 L] - Sd[2 L] Sin[2 L] - Cd[2 L] (Cos[2 L] + 2 L Sin[2 L]) +
           2 Cos[2 L] SU1d[L] - Cos[2 L] SU1d[2 L]);
      z31[L_] := z13[L];
      z32[L_] := z23[L];
      z33[L_] :=
        -15 i (2 CU1d[L] + 2 Cos[2 L] CU1d[L] - Cos[2 L] CU1d[2 L] + 2 Sd[L] + 2 L^2 Sd[L] +
           2 Cos[2 L] Sd[L] - 6 L^2 Cos[2 L] Sd[L] - Cos[2 L] Sd[2 L] + 4 L^2 Cos[2 L] Sd[2 L] -
           8 L CU1d[L] Sin[2 L] + 4 L CU1d[2 L] Sin[2 L] + 2 CU2d[L] Sin[2 L] - CU2d[2 L] Sin[2 L] -
           2 L Sd[L] Sin[2 L] + 2 L Sd[2 L] Sin[2 L] +
           Cd[L] (-4 L Cos[L]^2 - 4 Cos[L] Sin[L] + 6 L^2 Sin[2 L]) +
           Cd[2 L] (2 L Cos[2 L] + (1 - 4 L^2) Sin[2 L]) + 8 L Cos[2 L] SU1d[L] + 2 Sin[2 L] SU1d[L] -
           4 L Cos[2 L] SU1d[2 L] - Sin[2 L] SU1d[2 L] - 2 SU2d[L] - 2 Cos[2 L] SU2d[L] +
           Cos[2 L] SU2d[2 L]);
```

Calculate

```
In[25]:= deno[1] := Sin[L];
      deno[2] := 1 - Cos[L];
      deno[3] := L * Cos[L];
      SolveWeights := Module[{},
        {wei[1], wei[2], wei[3]} /.
         Solve[ ( z11[L]  z12[L]  z13[L]
                  z21[L]  z22[L]  z23[L]
                  z31[L]  z32[L]  z33[L] ) . {wei[1], wei[2], wei[3]} ==
            -{deno[1], deno[2], deno[3]}, {wei[1], wei[2], wei[3]}] [[1]]
       ];
```

Parameters

```
In[29]:= λ = 1.;
      k = 2 * π / λ;
      l = 0.5 * λ;
      Ω = 10.0;
```

Yin, Zin

```
In[33]:= yin := Module[{},
           a = 2 * Exp[-Ω / 2] * (l / 2);
           d = k * a;
           L = k * (l / 2);
           sol = SolveWeights;
           Do[
            cur[i] = sol[[i]];
            , {i, 1, 3}
           ];
           i0 = Sum[cur[i] * deno[i], {i, 1, 3}];
           i0 / 1.0
          ];
```

Output Yin

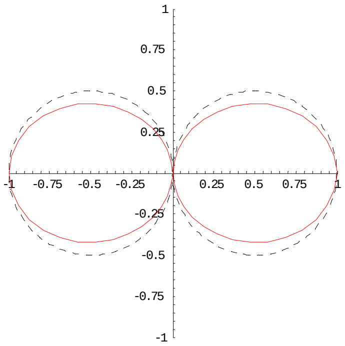
```
In[34]:= SetDirectory["D:/hira2/講義/mylecture/ict/example/dipole"]

Out[34]= D:\hira2\講義\mylecture\ict\example\dipole

In[35]:= stream = OpenWrite["yin.csv"];
         WriteString[stream,
           "Dipole Length (wavelength), G=Re(Yin) (mS), B=Im(Yin) (mS)\n"];
         Do[
           y = yin * 1000.;
           WriteString[stream, ToString[l], ", ", ToString[AccountingForm[Re[y]]],
            ", ", ToString[AccountingForm[Im[y]]], "\n"];
           , {l, 0.1 * λ, 4 * λ + λ / 1000., 4 * λ / 100}
          ];
         Close[stream]; (* yin.csv *)
         Null
```

Radiation Pattern

In[40]:=
```
fe[1, θ_] := If[Abs[Sin[θ]] < 10^-3,
    L Sin[L],
    2 (-Cos[L] + Cos[L Cos[θ]]) Csc[θ]^2
   ];
fe[2, θ_] := If[Abs[Sin[θ]] < 10^-3,
    1/2 ⅇ^(-ⅈ L) (ⅈ - L - ⅇ^(2 ⅈ L) (ⅈ + L)),
    If[Abs[Sin[θ - π/2]] < 10^-3,
     2 (L - Sin[L]),
     2 Csc[θ]^2 Sec[θ] (-Cos[θ] Sin[L] + Sin[L Cos[θ]])
    ],
   ];
fe[3, θ_] := If[Abs[Sin[θ]] < 10^-3,
    0,
    If[Abs[Sin[θ - π/2]] < 10^-3,
     2 + L^2 - 2 Cos[L] - 2 L Sin[L],
     -1/4 Csc[θ]^4 Sec[θ]^2
      (-3 + 7 Cos[L] + 4 Cos[2 θ] (1 + 2 Cos[L] - 3 Cos[L Cos[θ]]) - 4 Cos[L Cos[θ]] +
        L Sin[L] + Cos[4 θ] (-1 + Cos[L] - L Sin[L]))
    ],
   ];
eθ[θ_] := -Sin[θ] * Sum[cur[i] * fe[i, θ], {i, 1, 3}];
```

In[44]:=
```
λ = 1.;
k = 2 * π / λ;
Ω = 10.0;
a = 2 * Exp[-Ω / 2] * (l / 2);
d = k * a;
l = 0.5 * λ;
L = k * (l / 2);
sol = SolveWeights;
Do[
  cur[i] = sol[[i]];
  , {i, 1, 3}
 ];
```

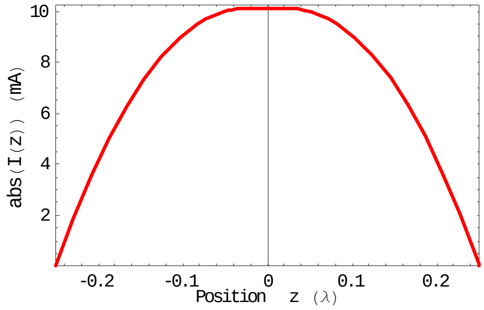
In[53]:=
```
rot[θ_] := ( Cos[θ]  -Sin[θ]
             Sin[θ]   Cos[θ] );
scale[sx_, sy_] := ( sx  0
                     0   sy );
eθlist = Table[Abs[ eθ[θ] ] * (scale[-1, 1].rot[90 °]).{Cos[θ], Sin[θ]},
    {θ, -π + π / 10^6, π + π / 10^6, 2 π / 60}];
elemmax = Max[Map[√(#[[1]]^2 + #[[2]]^2) &, eθlist]];
eθlist = eθlist / elemmax;
eθgraphics = {RGBColor[1, 0, 0], Line[eθlist]};
ParametricPlot[Abs[ Sin[θ] ] * (scale[-1, 1].rot[90 °]).{Cos[θ], Sin[θ]},
  {θ, -π, π},
  PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}},
  AxesStyle → {RGBColor[0.01, 0.01, 0.01]},
  PlotStyle → {RGBColor[0.01, 0.01, 0.01], Dashing[{0.02, 0.02}]},
  AspectRatio → Automatic,
  Epilog → eθgraphics];
```

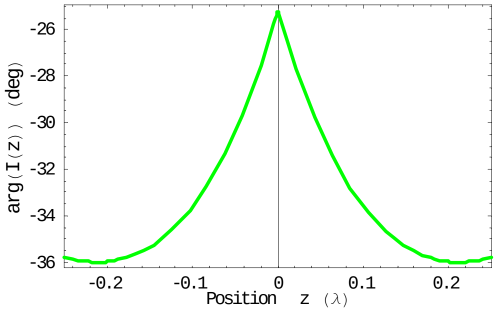


Current Distribution

In[59]:=
```
λ = 1.;
k = (2*π)/λ;
Ω = 10.0;
a = 2*Exp[-Ω/2]*(l/2);
d = k*a;
l = 0.5*λ;
L = k*(l/2);
sol = SolveWeights;
Do[
  cur[i] = sol[[i]];
  , {i, 1, 3}
 ];
```

In[68]:=
```
h = l/2;
f[1, z_] := Sin[k*(h - Abs[z])];
f[2, z_] := 1 - Cos[k*(h - Abs[z])];
f[3, z_] := k*(h - Abs[z])*Cos[k*(h - Abs[z])];
current[z_] := Sum[cur[i]*f[i, z], {i, 1, 3}];
Plot[Abs[current[z]*1000], {z, -h, h},
  PlotRange→{{-h, h}, {0, Automatic}},
  PlotStyle→{AbsoluteThickness[2], RGBColor[1, 0, 0]},
  Frame→True,
  FrameLabel→{"Position z (λ)", "abs(I(z)) (mA)"}];
Plot[Arg[current[z]*1000]*(180./π), {z, -h, h},
 PlotRange→{{-h, h}, Automatic},
 PlotStyle→{AbsoluteThickness[2], RGBColor[0, 1, 0]},
 Frame→True,
 FrameLabel→{"Position z (λ)", "arg(I(z)) (deg)"}]
```





Out[74]= - Graphics -

8.1.2 入力アドミタンス

h をアンテナ長の 1/2、a をアンテナ半径としたとき、ハレンのパラメータ(Hallen's parameter)

$$\Omega = 2\ln\frac{2h}{a} = 10$$

のときの入力アドミタンスのアンテナ長による変化を図 8, 図 9 に示す。論文[5]の結果とは異なるところがあるが、論文に間違いがあるものと思われる。モーメント法(MoM)の結果と比較した。モーメント法ではデルタギャップ給電を採用し、分割数はセグメントの大きさが 1/20 波長程度になるように分割した。

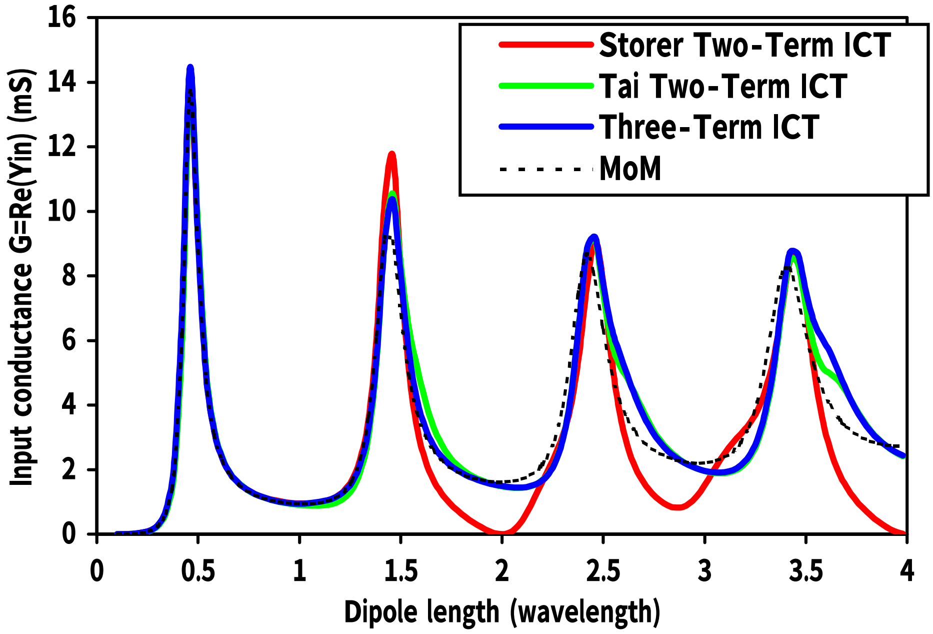


図 8 入力コンダクタンス

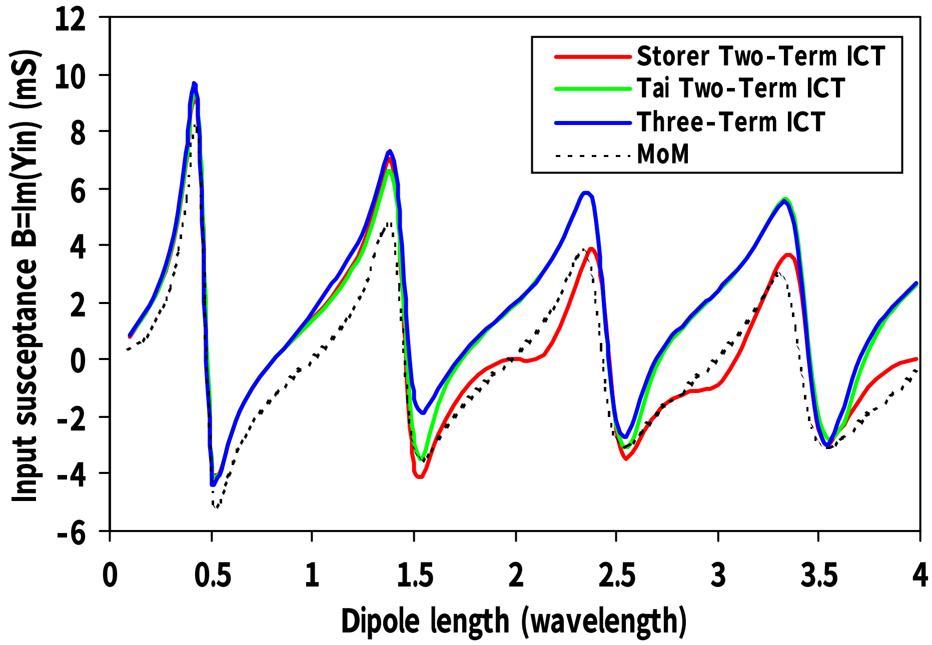

Storer Two-Term ICT
Tai Two-Term ICT
Three-Term ICT
MoM
Input susceptance B=Im(Yin) (mS)
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Dipole length (wavelength)

図 9 入力サセプタンス

8.2 ２素子ダイポールアレーの解析

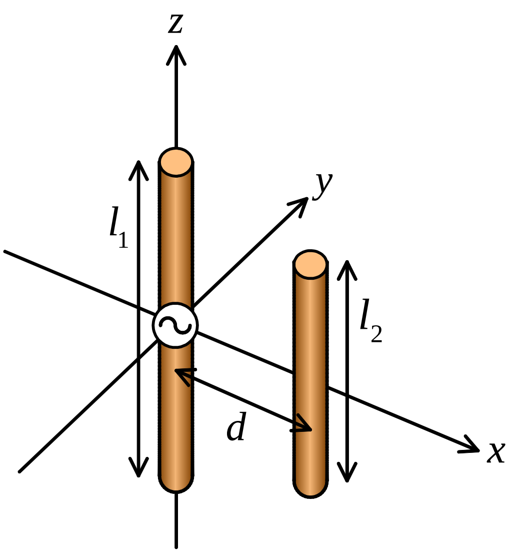


図 10 ２素ダイポールアレー

本節では図 10 に示す２素子ダイポールアレーの解析を行う。素子１だけが励振されており、素子２は励振されていない。

8.2.1 Mathematica プログラムリスト（Storer Two-Term ICT）

Analysis of Two Dipoles Array
Storer Two-Term ICT

2002/11/6 Takuichi Hirano

U_D, C_D, S_D, E_D Analytical Definition

```
In[1]:= Ud[i_, j_, x_] := -2 * ⅈ (ⅇ^(-ⅈ √(d[i,j]^2)) - ⅇ^(-ⅈ √(d[i,j]^2+x^2)));
        Cd[i_, j_, x_] := ExpIntegralEi[-I * (√(x^2 + d[i, j]^2) + x)] -
          ExpIntegralEi[-I * (√(x^2 + d[i, j]^2) - x)];
        Sd[i_, j_, x_] := I * ExpIntegralEi[-I * (√(x^2 + d[i, j]^2) + x)] +
           I * ExpIntegralEi[-I * (√(x^2 + d[i, j]^2) - x)] - 2 * I * ExpIntegralEi[-I * d[i, j]];
        Ed[i_, j_, x_] :=
          2 * NIntegrate[Exp[-I * 1/2 * (Exp[t] + d[i, j]^2 * Exp[-t])],
            {t, Log[d[i, j]], Log[√(x^2 + d[i, j]^2) + x]}];
```

Impedance Matrices

```
In[4]:= z11[i_, j_] :=
   -30 ⅈ (2 Cos[L[i]] Cos[L[j]] Sd[i, j, L[i]] - Cos[L[i] - L[j]] Sd[i, j, L[i] - L[j]] +
      2 Cos[L[i]] Cos[L[j]] Sd[i, j, L[j]] - Cos[L[i]] Cos[L[j]] Sd[i, j, L[i] + L[j]] -
      2 Cd[i, j, L[i]] Cos[L[j]] Sin[L[i]] + Cd[i, j, L[i] - L[j]] Cos[L[j]] Sin[L[i]] +
      Cd[i, j, L[i] + L[j]] Cos[L[j]] Sin[L[i]] - Cd[i, j, L[i] - L[j]] Cos[L[i]] Sin[L[j]] -
      2 Cd[i, j, L[j]] Cos[L[i]] Sin[L[j]] + Cd[i, j, L[i] + L[j]] Cos[L[i]] Sin[L[j]] +
      Sd[i, j, L[i] + L[j]] Sin[L[i]] Sin[L[j]]);
  z12[i_, j_] :=
   -30 ⅈ (Cd[i, j, L[i] - L[j]] Cos[L[i] - L[j]] + 2 Cd[i, j, L[j]] Cos[L[i]] Cos[L[j]] -
      Cd[i, j, L[i] + L[j]] Cos[L[i]] Cos[L[j]] - Ed[i, j, L[i] - L[j]] -
      2 Cos[L[i]] Ed[i, j, L[j]] + Ed[i, j, L[i] + L[j]] +
      Cos[L[j]] Sd[i, j, L[i] - L[j]] Sin[L[i]] - Cos[L[j]] Sd[i, j, L[i] + L[j]] Sin[L[i]] +
      2 Cos[L[i]] Sd[i, j, L[i]] Sin[L[j]] - Cos[L[i]] Sd[i, j, L[i] - L[j]] Sin[L[j]] +
      2 Cos[L[i]] Sd[i, j, L[j]] Sin[L[j]] - Cos[L[i]] Sd[i, j, L[i] + L[j]] Sin[L[j]] -
      2 Cd[i, j, L[i]] Sin[L[i]] Sin[L[j]] + Cd[i, j, L[i] + L[j]] Sin[L[i]] Sin[L[j]]);
  z21[i_, j_] := z12[j, i];
  z22[i_, j_] :=
   30 ⅈ (Ed[i, j, L[i] - L[j]] (L[i] - L[j]) - Ed[i, j, L[i] + L[j]] (L[i] + L[j]) +
      Cos[L[i]] Cos[L[j]] Sd[i, j, L[i] - L[j]] - Cos[L[i]] Cos[L[j]] Sd[i, j, L[i] + L[j]] -
      Cd[i, j, L[i] - L[j]] Cos[L[j]] Sin[L[i]] - 2 Cd[i, j, L[j]] Cos[L[j]] Sin[L[i]] +
      Cd[i, j, L[i] + L[j]] Cos[L[j]] Sin[L[i]] + 2 Ed[i, j, L[j]] Sin[L[i]] -
      2 Cd[i, j, L[i]] Cos[L[i]] Sin[L[j]] + Cd[i, j, L[i] - L[j]] Cos[L[i]] Sin[L[j]] +
      Cd[i, j, L[i] + L[j]] Cos[L[i]] Sin[L[j]] + 2 Ed[i, j, L[i]] Sin[L[j]] -
      2 Sd[i, j, L[i]] Sin[L[i]] Sin[L[j]] + Sd[i, j, L[i] - L[j]] Sin[L[i]] Sin[L[j]] -
      2 Sd[i, j, L[j]] Sin[L[i]] Sin[L[j]] + Sd[i, j, L[i] + L[j]] Sin[L[i]] Sin[L[j]] -
      Ud[i, j, L[i] - L[j]] + Ud[i, j, L[i] + L[j]]);
```

Calculate

```
In[8]:= deno[1, i_] := Sin[L[i]];
  deno[2, i_] := 1 - Cos[L[i]];
  SolveWeights := Module[{},
    {wei[1, 1], wei[1, 2], wei[2, 1], wei[2, 2]} /.
     Solve[( z11[1, 1]  z11[1, 2]  z12[1, 1]  z12[1, 2]
             z11[2, 1]  z11[2, 2]  z12[2, 1]  z12[2, 2]
             z21[1, 1]  z21[1, 2]  z22[1, 1]  z22[1, 2]
             z21[2, 1]  z21[2, 2]  z22[2, 1]  z22[2, 2] ) .
        {wei[1, 1], wei[1, 2], wei[2, 1], wei[2, 2]} == -{deno[1, 1], 0, deno[2, 1], 0},
       {wei[1, 1], wei[1, 2], wei[2, 1], wei[2, 2]}][[1]]
   ];
```

Parameters

```
In[11]:= λ = 1.;
  k = 2 * π / λ;
  diplen[1] = 0.5 * λ;
  diplen[2] = 0.3 * λ;
  Ω = 10.0;
  x[1] = 0.0 * λ; y[1] = 0.0 * λ;
  x[2] = 0.1 * λ; y[2] = 0.0 * λ;
  d[i_, j_] := If[i == j, k * a[i], k * √((x[i] - x[j])^2 + (y[i] - y[j])^2)];
  a[i_] := 2 * Exp[-Ω / 2] * (diplen[i] / 2);  (* Hallen' Parameter Ω に対応する a *)
  L[i_] := k * (diplen[i] / 2);
```

Cur0,Yin, Zin

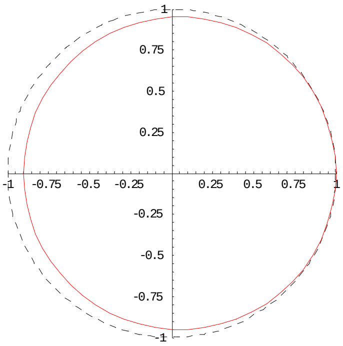
```
In[21]:= cur0[elem_] := Module[{},   (* 素子 elem の給電点電流 *)
           sol = SolveWeights;
           Do[
            cur[i, j] = sol[[j + (i - 1) * 2]];
            , {i, 1, 2}, {j, 1, 2}
           ];
           Sum[cur[i, elem] * deno[i, elem], {i, 1, 2}]
          ];
         yin[elem_] := Module[{},   (* 素子 elem の入力アドミタンス *)
           cur0[elem] / 1.0
          ];
```

Output File

```
In[23]:= SetDirectory["D:/hira2/講義/mylecture/ict/example/two_dipoles"]

Out[23]= D:\hira2\講義\mylecture\ict\example\two_dipoles

In[24]:= stream = OpenWrite["cur0.csv"];
        WriteString[stream,
          "Dipole(2) Length (wavelength), Abs(I2/I1), Arg(I2/I1) (deg)\n"];
        Do[
          current = cur0[2] / cur0[1];
          WriteString[stream, ToString[diplen[2]], ", ",
           ToString[AccountingForm[Abs[current]]], ", ",
           ToString[AccountingForm[ArcTan[Re[current], Im[current]] * (180. / π)]], "\n"];
          , {diplen[2], 0.3 * λ, 0.7 * λ + λ / 1000., 0.01 * λ}
         ];
        Close[stream]; (* yin.csv *)
```

Radiation Pattern

```
In[28]:= fe[1, i_, θ_] := If[Abs[Sin[θ]] < 10^-3,
           L[i] Sin[L[i]],
           If[Abs[Sin[θ - π/2]] < 10^-3,
            2 - 2 Cos[L[i]],
            2 (-Cos[L[i]] + Cos[L[i] Cos[θ]]) Csc[θ]^2
           ]
          ];
         fe[2, i_, θ_] := If[Abs[Sin[θ]] < 10^-3,
           -1/2 e^(-i L[i]) (i (-1 + e^(2 i L[i])) + (1 + e^(2 i L[i])) L[i]),
           If[Abs[Sin[θ - π/2]] < 10^-3,
            2 (L[i] - Sin[L[i]]),
            2 Csc[θ]^2 Sec[θ] (-Cos[θ] Sin[L[i]] + Sin[L[i] Cos[θ]])
           ]
          ];
         eθ[θ_, φ_] :=
          -Sin[θ] * Sum[Exp[I * k * Sin[θ] * (x[i] * Cos[φ] + y[i] * Sin[φ])] *
             Sum[cur[l, i] * fe[l, i, θ], {l, 1, 2}], {i, 1, 2}];

In[31]:= λ = 1.;
         k = 2 * π / λ;
         diplen[1] = 0.5 * λ;
         diplen[2] = 0.3 * λ;
         Ω = 10.0;
         x[1] = 0.0 * λ; y[1] = 0.0 * λ;
         x[2] = 0.1 * λ; y[2] = 0.0 * λ;
         d[i_, j_] := If[i == j, k * a[i], k * √((x[i] - x[j])^2 + (y[i] - y[j])^2)];
         a[i_] := 2 * Exp[-Ω / 2] * (diplen[i] / 2);  (* Hallen' Parameter Ω に対応する a *)
         L[i_] := k * (diplen[i] / 2);

In[41]:= sol = SolveWeights;
         Do[
          cur[i, j] = sol[[j + (i - 1) * 2]];
          , {i, 1, 2}, {j, 1, 2}
         ];

In[43]:= eθlist = Table[Abs[eθ[π/2, φ]] * {Cos[φ], Sin[φ]}, {φ, 0, 2 * π + π / 10^6, 2 π / 60}];
         elemmax = Max[Map[√(#[[1]]^2 + #[[2]]^2) &, eθlist]];
         eθlist = eθlist / elemmax;
         eθgraphics = {RGBColor[1, 0, 0], Line[eθlist]};
         ParametricPlot[{Cos[φ], Sin[φ]}, {φ, 0, 2 * π},
          PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}},
          AxesStyle → {RGBColor[0.01, 0.01, 0.01]},
          PlotStyle → {RGBColor[0.01, 0.01, 0.01], Dashing[{0.02, 0.02}]},
          AspectRatio → Automatic,
          Epilog → eθgraphics];
```



8.2.2 無給電素子の電流振幅と位相差

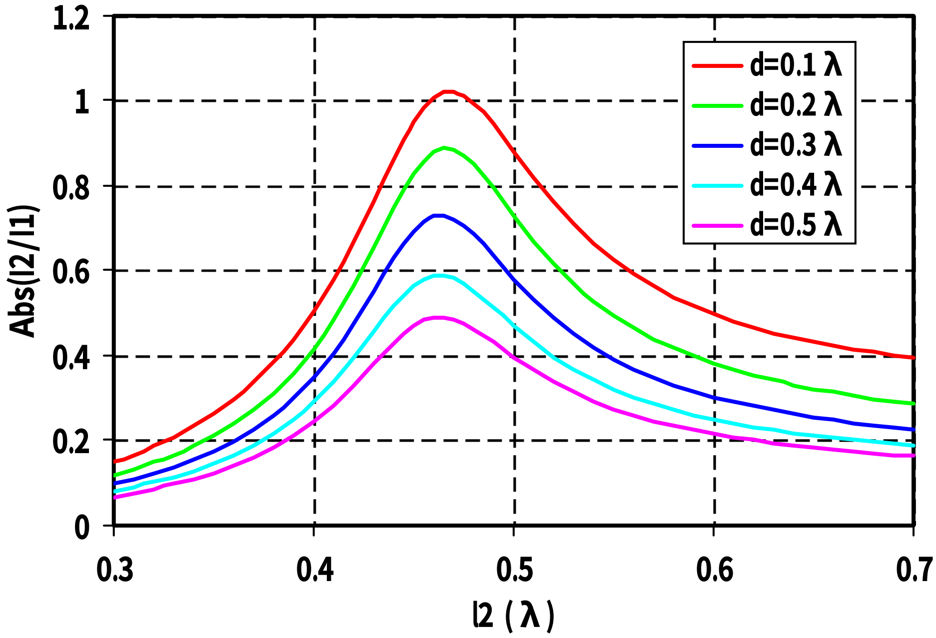


図 11 振幅比

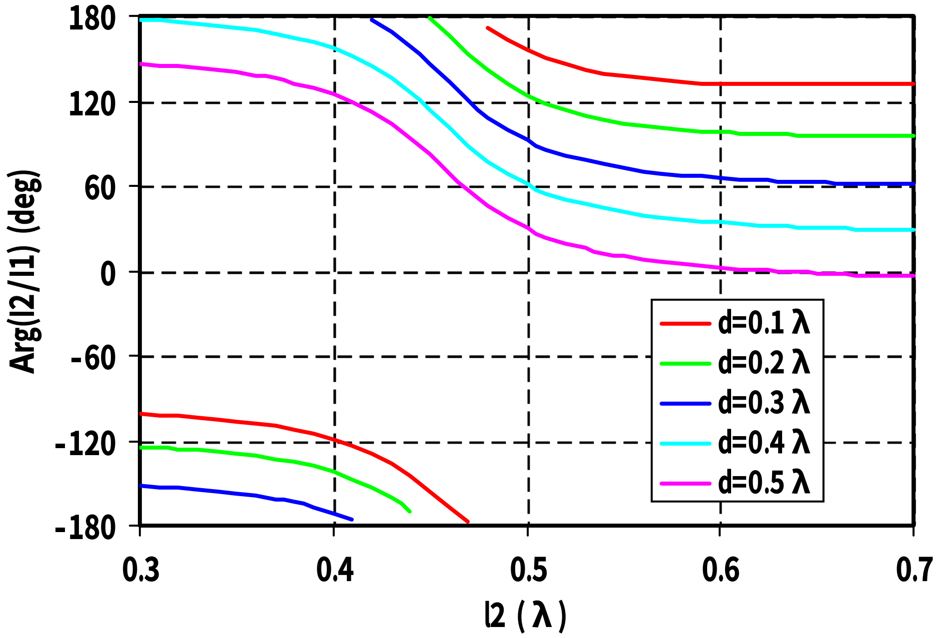


図 12 位相差

素子 1 の長さを$l_1 = \lambda/2$とする。アンテナ半径としてはそれぞれの素子iにおいてハレンパラメ

ータΩが 10 に対応する半径($a_i = l_i e^{-\Omega/2}$)とする。素子iのダイポール中央の電流をI_iとしたとき、素子２の長さを変化させたとき、素子１の中央部の電流に対する比I_2 / I_1を計算し、その振幅比と位相差をそれぞれ図 11, 図 12 に示す。アンテナ間隔を0.1λ～0.5λまで変化させている。アンテナ間隔によって多少異なるが、素子２の長さを約半波長のあたりで長く、または短く変化させると位相を変化させることができる。その長さでは大体振幅も最大になっている。つまり２つの素子が大体等振幅で位相差がついて励振されているので、アレーアンテナの原理からビームを制御することができる。テレビ受信用に使われている八木・宇田アンテナ(図 1)はこの現象を利用している。このように給電されない素子はビーム成形に重要な役割を演ずる。給電されない素子を無給電素子、または寄生素子(parasitic element)と呼ぶ。

また、アレーアンテナのアレーファクタの計算では素子間相互結合が無いものとして計算するが、図 11 を見てもわかるようにこのように配置されたダイポールアレーでは素子間隔が$\lambda/2$になっても依然として素子間相互結合が強いことがわかる。ICT のような素子管相互結合を考慮した特性評価が必要になる。モーメント法でも可能だが、線状ダイポールアレーの解析には ICT の精度は十分であり、計算時間を考えるとモーメント法よりも有利である。

9. 変分法とガラーキン法の等価性

9.1 積分方程式の生成汎関数

積分方程式(1)の生成汎関数はわからないが、論文[1]の式(12)より、次の停留条件の式。

$$\sum_{i=1}^{N} I_i^2(0)\delta Z_i \tag{9}$$

は積分方程式と等価となる。ここで、

$$Z_i = -\frac{\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_j dz_i}{I_i^2(0)}$$

9.2 停留条件と積分方程式の等価性

Z_i の変分 δZ_i を計算する。

$$Z_i + \delta Z_i = -\frac{\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} \{I_i(z_i)+\delta I_i(z_i)\}G_{ij}(z_i,z_j)\{I_j(z_j)+\delta I_j(z_j)\}dz_j dz_i}{\{I_i(0)+\delta I_i(0)\}^2}$$

$$\begin{aligned}
&\{I_i^2(0) + 2I_i(0)\delta I_i(0) + \delta I_i^2(0)\}(Z_i + \delta Z_i) \\
&= -\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_j dz_i \\
&-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} \delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_j dz_i \\
&-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)\delta I_j(z_j)dz_j dz_i \\
&-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} \delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)\delta I_j(z_j)dz_j dz_i
\end{aligned}$$

ここで、微小項は無視する。

$$\begin{aligned}
&\underline{I_i^2(0)Z_i} + 2I_i(0)\delta I_i(0)Z_i + I_i^2(0)\delta Z_i \\
&\underline{= -\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_j dz_i} \\
&-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} \delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_j dz_i \\
&-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)\delta I_j(z_j)dz_j dz_i
\end{aligned}$$

下線部は同じだから消える。

$$
\begin{aligned}
&I_i^{\,2}(0)\delta Z_i \\
&=-2I_i(0)\delta I_i(0)Z_i \\
&\quad-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_jdz_i \\
&\quad-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)\delta I_j(z_j)dz_jdz_i
\end{aligned}
$$

ここで、式(9)の変分を線形性からδZ_iの和で計算すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}I_i^{\,2}(0)\delta Z_i \\
&\qquad=-2I_i(0)\delta I_i(0)Z_i \\
&\qquad\quad-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_jdz_i \\
&\qquad\quad-\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)\delta I_j(z_j)dz_jdz_i \\
&\qquad=-\sum_{i=1}^{N}2I_i(0)\delta I_i(0)Z_i \\
&\qquad\quad-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_jdz_i \\
&\qquad\quad-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)\delta I_j(z_j)dz_jdz_i
\end{aligned}
$$

ここで、可逆定理より最終項を変形すると

$$
\begin{aligned}
&=-\sum_{i=1}^{N}2I_i(0)\delta I_i(0)Z_i \\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_jdz_i \\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\delta I_j(z_j)G_{ij}(z_i,z_j)I_i(z_i)dz_jdz_i \\
&=-2\sum_{i=1}^{N}I_i(0)\delta I_i(0)Z_i-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_jdz_i \\
&=-2\sum_{i=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}I_i(z_i)Z_i\delta I_i(z_i)\delta(z_i)dz_i-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}\delta I_i(z_i)G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_jdz_i \\
&=-2\sum_{i=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\left[V_i(z_i)\delta(z_i)+\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j}G_{ij}(z_i,z_j)I_j(z_j)dz_jdz_i\right]\delta I_i(z_i)dz_i
\end{aligned}
$$

δ関数の範囲をもうすこし広げて面積 1 のパルス関数uにしたら

$$= -2\sum_{i=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\left[V_i(z_i)u_i(z_i) + \sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} G_{ij}(z_i, z_j) I_j(z_j) dz_j dz_i\right]\delta I_i(z_i) dz_i$$

これが、いかなる任意波形の $\delta I_i(z_i)$ に対しても変化しないという停留条件は

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{-h_i}^{h_i}\int_{-h_j}^{h_j} G_{ij}(z_i, z_j) I_j(z_j) dz_j dz_i = -V_i(z_i)u_i(z_i) \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

となる。これは境界条件を満たすように求めた連立積分方程式そのものであり、式(9)の変分問題と上の連立積分方程式を解くことは等価であることがわかる。論文[1]ではこの変分原理を用いて解くべき行列方程式を導出している。

　また、方形導波管など内部に障害物がある場合の散乱問題に対しても、反射係数が仮定した未知電磁流の変分表現になっている[7](p.282)。

9.3 変分原理を適用し、行列方程式を導く

論文[1]の IV 章参照。

A. 付録

A.1 汎関数、変分、変分原理

汎関数

汎関数(functional)とは関数をパラメータ（変数、引数）とする関数である。関数よりもより上位のものとして見ているので汎関数と呼ばれる。

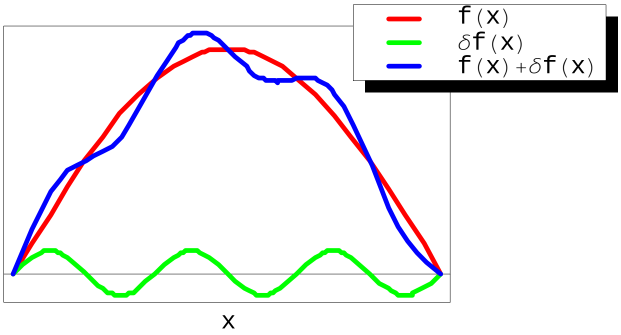


図 13 汎関数と変分の説明

例えば、図 13 のような関数 $f(x)$ を考える。それをギターなどの弦を指で引っ張ったときの変位と考える。その弦の変位によるエネルギーのようなものを考え、次のように $F[f]$ で表す。汎関数であることを強調するために引数には大括弧 $[\ ]$ を使う。

$$F[f] = \int_{x=a}^{b} \{f(x)\}^2 dx$$

すると、そのエネルギーらしき F はある値となり、関数 f の形によって値が変わる。つまり、関数 f の関数になっており、その意味で F は汎関数であると言う。

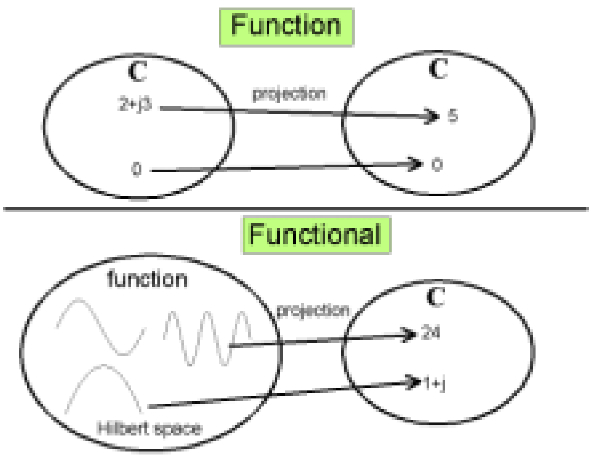


図 14 汎関数の写像による説明

また、図 14 に示すように汎関数を写像により説明する。普通の関数はあるスカラー量（図中では複素数$\mathbf{C}$の集合を考えている）を別のスカラー量に対応させるものであるが、汎関数はある関数形をあるスカラー量に対応させるものであると考えることができる。

変分

図 13 に示すように関数$f(x)$の形が$\delta f(x)$（一般に微小変化を扱う）だけ変わり、$f(x)+\delta f(x)$となったときに汎関数の値はどれだけ(δF)変わるか言うのが**変分(variation)**である。汎関数の変分は関数の微分に相当する量である。定義は微分と同じようなものであり、次のように定義してみる。

$$\delta F = |\delta f| \lim_{|\delta f|\to 0} \frac{F[f+\delta f]-F[f]}{|\delta f|} \tag{10}$$

分子第 1 項の$f+\delta f$というのは 2 つの関数の和$f(x)+\delta f(x)$を意味することになる。この定義は関数の微分と同じ定義になっているので、変分も関数fを文字と見なして関数と同様に微分することができる。$|\delta f|$は関数のノルムである。

変分の意味

より変分の意味が明確になるように次のように定義してみる。

$$\delta F = \varepsilon \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F[f+\varepsilon g]-F[f]}{\varepsilon} \tag{11}$$

εはスカラーであり、gは任意波形の関数である。よって、gの関数形（微小変化の与え方）によって変分の値は変わる。もし$g(x)=1$ならば式(10)は式(11)の定義と一致する。つまり、式(10)の定義では関数fを一様に上下に変化させようとしたときの変化量だと言える。関数と同様の微分公式を使って微分したら全体を上下に一様に変化させたときの変分を求めたことになるから、なるべく式(11)の定義に従って微分するのが望ましい。また、関数と同様の微分公式を使わなければ式(10)の定義に従って変分しても式(11)と同様の操作をしているので式(11)の定義に従って変分しているのと同じことになる。

より意味がわかりやすいような表現にするにはパラメータの関数fをδfだけ変化させて$f+\delta f$としたときの汎関数の値$F[f+\delta f]$から元の値$F[f]$を引いて汎関数のδfによる微小変化量δFを調べればよい。

$$\delta F \equiv F[f+\delta f]-F[f]$$

例題 1

汎関数

$$F[f]=\int_{x=0}^{3}\{f(x)\}^2 dx$$

を一様に変化させたときの変分を求めよ。

解答

一様に変化させるのであるから関数のように微分すればよい。

$$\frac{\delta F}{\delta f}=\int_{x=0}^{3}2f(x)dx$$

$$\delta F=\delta f\int_{x=0}^{3}2f(x)dx$$

数値例

$f(x)=1$ のとき　→　$F[1]=3$，$\delta F=6\delta f$

$F[1+0.05]=3.3075$

$F[1+0.05]\cong F+\delta F=3+6\times 0.05=3.3$

$F(1)$ から微小に変化させて $F(1+0.05)$ にしたとき、$F+\delta F$ とよく一致するから δF は変分であるという意味がよくわかる。

$f(x)=x$ のとき　→　$F[x^2]=48.6$，$\delta F=18\delta f$

$F[x^2+0.01]=48.7803$

$F[x^2+0.01]\cong F+\delta F=48.6+18\times 0.01=48.78$

例題 2

次の汎関数の変分を求めよ

$$F[\phi]=\int_0^3\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+2\phi\right\}dx$$

解答

一様に変化させるとは言われていないし、微分があるので、定義に従って変分した方が楽である。

$$F[\phi+\delta\phi]=\int_0^3\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}+\frac{d\delta\phi}{dx}\right)^2+2(\phi+\delta\phi)\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+2\frac{d\phi}{dx}\frac{d\delta\phi}{dx}+\left(\frac{d\delta\phi}{dx}\right)^2\right\}+2(\phi+\delta\phi)\right]dx$$

$$F[\phi+\delta\phi]-F[\phi]=\int_0^3\left[\frac{1}{2}\left\{2\frac{d\phi}{dx}\frac{d\delta\phi}{dx}+\left(\frac{d\delta\phi}{dx}\right)^2\right\}+2\delta\phi\right]dx$$

ここで、2 次の微小量は無視する。$\delta\phi$ が ϕ に比べて微小ならば $d\delta\phi/dx$ も微小である。なぜならば、図 13 に示すように振幅が小さく、よって微係数も小さくなるからである。

$$
\begin{aligned}
F[\phi+\delta\phi]-F[\phi] &= \int_0^3\left(\frac{d\phi}{dx}\frac{d\delta\phi}{dx}+2\delta\phi\right)dx \\
&= \int_0^3\left(\frac{d\phi}{dx}\frac{d\delta\phi}{dx}\right)dx+\int_0^3(2\delta\phi)dx \\
&= \left[\frac{d\phi}{dx}\delta\phi\right]_0^3-\int_0^3\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\delta\phi\right)dx+\int_0^3(2\delta\phi)dx \\
&= -\int_0^3\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}-2\right)\delta\phi dx+\left[\frac{d\phi}{dx}\delta\phi\right]_0^3
\end{aligned}
$$

あえてこの表現で止めておく。

変分原理

微分方程式 $Df=0$ を解いて未知関数 f を求める問題を考える。ある汎関数 $F\left[f\right]$ が極値（変分が0になるところ）になるような f 求めるとそれは $Df=0$ の解の f と全く同じものになることがある。つまり、汎関数 $F\left[f\right]$ の極値を求めることは微分方程式 $Df=0$ を解くのと全く等価になることがある。

そのようなとき、汎関数を変分して極値を求め、汎関数の極値問題と等価な微分方程式を求めることを**変分原理(variational principle)**を適用すると言う。汎関数に変分原理を適用して得られる微分方程式は**オイラーの微分方程式**と呼ばれる。ただし、極小値を求めるときには放物曲面のように極小値はただ１つでなければならない($\delta^2F>0$)。峰や鞍のような停留点があってもいけない。変分原理を適用して微分方程式を得る過程は電磁気学の分野でポテンシャルを微分してフィールドを求めたり、確率・統計の分野で積率母関数(moment generating function)を微分してモーメント(積率)を求めたりするのに似ている。

変分原理が使われている問題は数多く存在する。特に物理学の分野の一つである解析力学で汎関数や変分原理が多用される[8]。ラグランジアン、ハミルトニアンなどがあり、微分方程式を生成するので生成汎関数と呼ばれる。電磁界理論のモーメント法もガラーキン法を適用したら電流分布の微小変化に対して入力インピーダンスが変分表現になっており、安定な解を与えることが証明されている。ICT(Improved Circuit Theory)[1]でも入力インピーダンスは電流分布の変分表現になっていることを利用して、変分原理を適用してアンテナ上の電流分布を求めている。

変分原理は物理学では「系全体のエネルギー（汎関数）が最小になるように物理量（フィールドや温度）が分布する」というエントロピー増大の原理のような最小エネルギー原理として解釈することができる。フェルマー(Fermat)の原理として知られる「屈折率が場所によって異なる媒質中の２点間を光が通るときの光路は、２点間を光が通るのに要する時間を最小にする路である」は、変分原理から来ている。屈折角はフレネルの反射・透過係数を求めるときに位相整合条件を適用して導出されるが、変分原理を用いてフェルマーの原理として解釈することもできる。どちらの解釈も正しいのだが、慣れないうちは誰でも変分原理の考え方は理解しにくいのではないだろうか。筆者も変分原理による解釈は天下り的な感じがしてちょっと腑に落ちない。

微分方程式は空間内のある点に着目してそこで成り立つ関係を記述したものである。またその関係は空間内のどの点でも成り立つことを言っている汎用性のある方程式である。このように微分方程式は空間内のある点だけを考えて作った方程式なので非常に**微視的（ミクロ）**な視点で作った方程式である。一方、変分原理はある空間を考え、その空間内で成り立つ原理を記述したものである。これも空間の取り方が任意なので汎用性のある方程式である。変分原理はこのように微分方程式よりも**巨視的（マクロ）**な視点で作った原理だと言える。それゆえ、初学者が物理現象の巨視的な見方に慣れていないと理解しにくいのは納得できることである。

例題 3

次の微分方程式を解け

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=2$$

ただし、

$\phi(0)=3, \phi(3)=0$ (境界条件)

解答

$$\frac{d\phi}{dx}=2x+C_1$$

$$\phi(x)=x^2+C_1x+C_2$$

境界条件を適用して積分定数を求めると

$$\phi(0)=C_2=3$$

$$\phi(3)=9+3C_1+3=0,\ C_1=-4$$

よって、

$$\phi(x)=x^2-4x+3$$

例題 4

例題 2 の汎関数に変分原理を適用し、オイラーの微分方程式を導け。ただし、例題 3 のときのようにϕの値が$x=0,3$で強制されている（ディリクレ条件）とする。

解答

例題 2 の解答より、

$$F[\phi+\delta\phi]-F[\phi]=\int_0^3\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}+2\right)\delta\phi dx+\left[\frac{d\phi}{dx}\delta\phi\right]_0^3$$

ここで、ϕの値が$x=0,3$で強制されているので、微小変化させる関数$\delta\phi$も$x=0,3$の値を動かすことはできない。よって$\delta\phi(0)=\delta\phi(3)=0$となるような微小変化関数$\delta\phi$を用いるので、

$$F[\phi+\delta\phi]-F[\phi]=\int_0^3\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}+2\right)\delta\phi dx$$

これがいかなる関数$\delta\phi$に対しても 0 となるためには

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+2=0$$

を満たす必要がある。よって、この汎関数の極値問題を解いてϕを求めればそれは上のオイラーの微分方程式の解である。

A.2 重み付け、モーメント

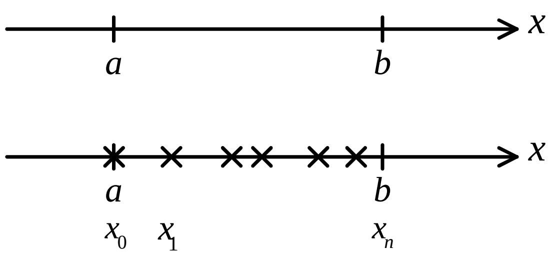


図 15 区間[a,b]

$f(x)=0$ が図 15 上のように区間 $[a,b]$ で定義されている。$f(x)=0$ を区間 $[a,b]$ 全域で満たすようにしたい場合、その条件を書くとすれば例えば図 15 下に示されるような離散的な点で $f(x)=0$ を満足するような条件を書く。

$$\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f(x_2)=0 \\ \vdots \\ f(x_n)=0 \end{cases} \tag{12}$$

$f(x_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ は正かも知れないし負かもしれないが、$\{f(x_i)\}^2$ は絶対に正数なので、式(12)の条件式群をまとめて次のように書くことができる。

$$\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)\}^2=0 \tag{13}$$

しかし、式(13)もまだ離散的な点でしか $f(x)=0$ の条件を満足しないので、全区間で満たすようにするには、次のように離散点の間隔を無限に小さくする。

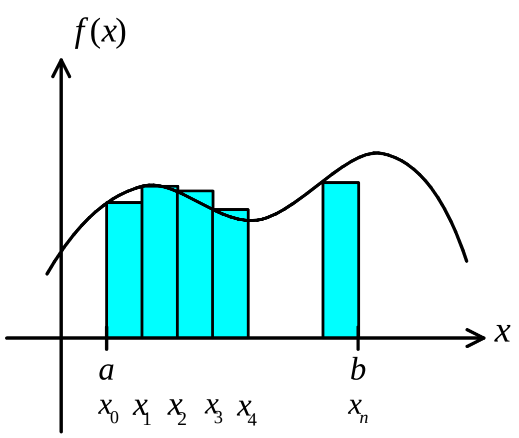


図 16 区分求積

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} \Delta x \{f(x_i)\}^2 = 0$$

これは区分求積（リーマン積分の定義）であり、次のように表現される。

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

$f(x)$が式(14)を満たすとき、$f(x)$は区間$[a,b]$内の至る所で$f(x)=0$であり、目的の条件と等価になる。ここで、式(14)は次のモーメントの定義

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \qquad \textbf{(15)}$$

の特殊な場合である。$g(x)$を重み関数と言う。

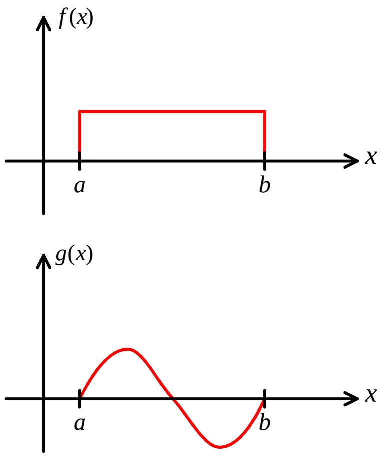


図 17 モーメント

式(15)の表現では図 17 に示されるように$g(x)$の形によっては「区間$[a,b]$内で$f(x)=0$」が満たされるとは限らない。しかし、$g(x)=f(x)$と選び、式(14)の表現にすると式(14)を満たすことと「区間$[a,b]$内で$f(x)=0$」となることは等価となる。$g(x)=f(x)$と選ぶ重み付けの方法は**ガラーキン法**(Galerkin's method)と呼ばれ、数値的に安定した解を与える。**モーメント法**(MoM, Method of Moments, Moment Method)や**有限要素法**(Finite Element Method)でよく使われる手法である。

A.3 導体棒に流れる線電流と面電流

A.3.1 近傍界の考察

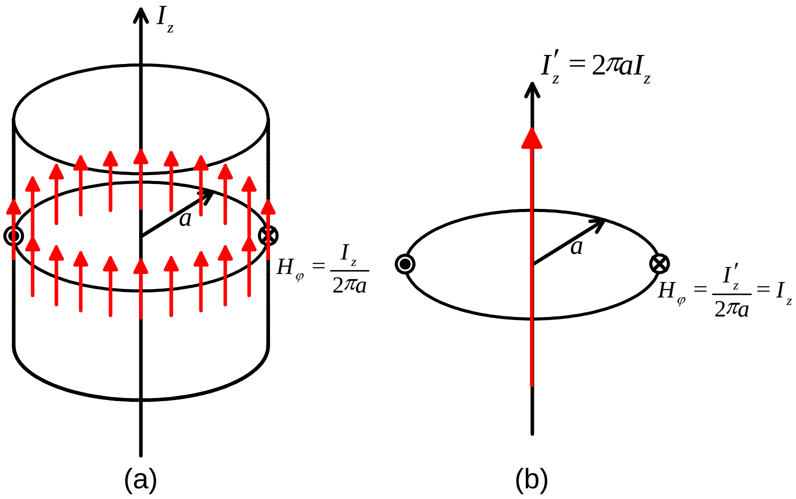


図 18 導体棒に流れる面電流と線電流による磁界

導体棒の半径が波長に対してものすごく小さいとき、導体棒表面に流れる電流による導体棒表面の電磁界を計算する際には距離がものすごく近いので静電界、静磁界と近似して計算することができる。また、電流の近傍で観測しているため、観測点近傍の電流だけが大きな寄与となるために、電流も無限に長く流れていると仮定し、図 18 のようなモデルを考える。(a)のモデルは導体棒表面に相当する部分に周囲方向に変化が無く、一様な面電流$I_z\,(A/m)$が流れているモデルであり、(b)のモデルは導体棒の中心に相当する部分に線電流$I'_z\;(A)$が流れているモデルである。

モデル(a)の面電流が作る磁界

静磁界のアンペアの法則

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i}\cdot d\mathbf{S}$$

より、

$$L.H.S. = \int_0^{2\pi} H_\varphi a d\varphi = H_\varphi a \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi a H_\varphi$$

$$R.H.S. = \int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{z} I_z \delta(\rho-a)\cdot(\hat{z}\rho d\rho d\varphi) = \int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi} I_z \delta(\rho-a)\rho d\rho d\varphi$$
$$= I_z \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} \delta(\rho-a)\rho d\rho d\varphi = I_z \int_{\varphi=0}^{2\pi} a d\varphi = 2\pi a I_z$$

$H_\varphi = I_z$

モデル(b)の線電流が作る磁界

静磁界のアンペアの法則

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i}\cdot d\mathbf{S}$$

より、

$$L.H.S. = \int_0^{2\pi} H_\varphi a d\varphi = H_\varphi a \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi a H_\varphi$$

$$R.H.S. = \iint_S \hat{z} I_z' \delta(x)\delta(y)\cdot\left(\hat{z}dxdy\right) = I_z' \iint_S \delta(x)\delta(y)dxdy = I_z'$$

$$H_\varphi = \frac{I_z'}{2\pi a} = I_z$$

このように、$I_z' = 2\pi a I_z$とすると図 18 (a), (b)の２つのモデルが半径aの位置に作る磁界は全く同じになる。この場合は**準定常電磁界**($\left|\mathbf{J}\right| >> \left|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right|$)と見なせる。電磁界のときに導体表面には$2\hat{n}\times\mathbf{H}^{inc}$ ($\hat{n}\times\mathbf{H}^{total}$) の表面電流が流れることを考えると、この場合は$\hat{n}\times\mathbf{H}^{total} = \hat{\rho}\times\left(\hat{\varphi}H_\varphi\right) = \hat{z}H_\varphi = I_z$という電流が流れていると計算でき、つじつまが合っている。

さらに電磁界はゆっくりではあるが変化しているので、電界と磁界の比はマクスウェルの方程式で支配されている。このように静磁界を計算しただけであるが、準定常電磁界の近似になっていることを考えて電界の計算もできる。結局図 18(a), (b)のモデルで電界を計算した結果はaが波長に比べて十分小さいときは一致すると言える。

A.3.2 遠方界の考察

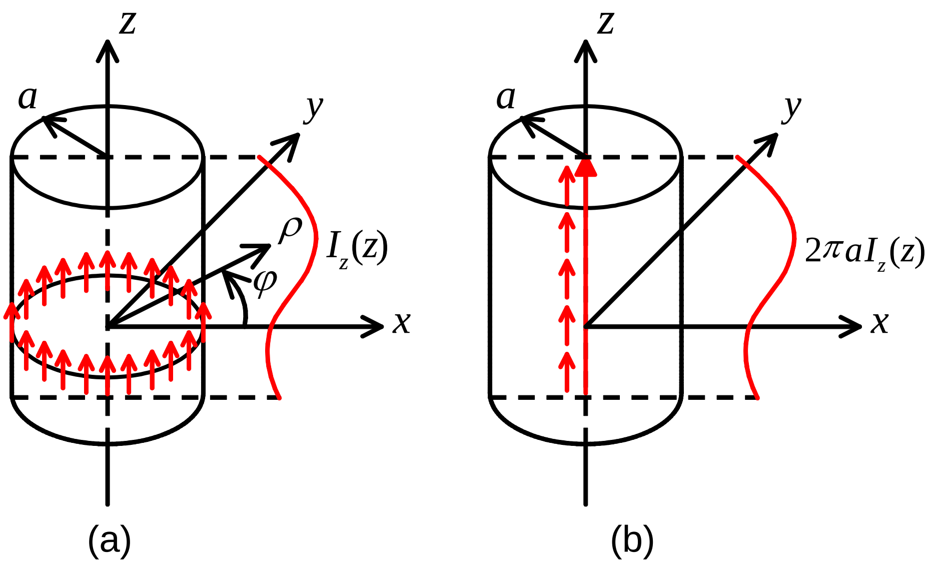


図 19 導体棒に流れる線電流と面電流

空間内に分布した電流 **J**（体積密度）から放射される電磁界は、

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})}{j\omega\mu\varepsilon}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{J}e^{-jkr}}{r}dV \qquad \text{(ベクトルポテンシャル)}$$

で表されるので、ベクトルポテンシャルを調べる。

図 19 の問題に特化したベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{J}e^{-jkr}}{r}dV'$$

$$= \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{z'}\left[\iint_S \frac{J_z(z)e^{-jkr}}{r}dS'\right]dz'$$

(i) モデル(a)について

$$\mathbf{A} = \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{z'}[$$

$$\int_{\rho'}\int_{\varphi'}\{I_z(z')\delta(\rho'-a)\}\frac{\exp\left(-jk\sqrt{(x-\rho'\cos\varphi')^2+(y-\rho'\sin\varphi')^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{(x-\rho'\cos\varphi')^2+(y-\rho'\sin\varphi')^2+(z-z')^2}}\rho' d\varphi' d\rho']dz'$$

$$= \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{z'}\int_{\varphi'}\{I_z(z')\}\frac{\exp\left(-jk\sqrt{(x-a\cos\varphi')^2+(y-a\sin\varphi')^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{(x-a\cos\varphi')^2+(y-a\sin\varphi')^2+(z-z')^2}}ad\varphi'dz'$$

観測座標で $\rho >> a$ のとき

$$\cong \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{z'}\int_{\varphi'}\{aI_z(z')\}\frac{\exp\left(-jk\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}d\varphi'dz'$$

$$= \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{z'}\{2\pi aI_z(z')\}\frac{\exp\left(-jk\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}dz'$$

(ii) モデル(b)について

$$\mathbf{A} = \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{z'}\left[\int_{x'}\int_{y'}\{2\pi aI_z(z')\delta(x')\delta(y')\}\frac{\exp\left(-jk\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy'\right]dz'$$

$$= \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_{z'}\{2\pi aI_z(z')\}\frac{\exp\left(-jk\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}dz'$$

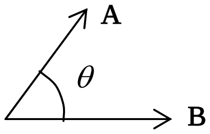
図 19 のモデル(a)の面電流とモデル(b)の面電流から放射される遠方界は同じである。

A.4 物理定数

[参考] 理科年表, 丸善, 2002

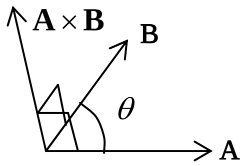
真空の誘電率(permittivity)	$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \cong 10^{-9}/(36\pi)$ [F/m]
真空の透磁率(permeability)	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]
真空の波動インピーダンス	$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.7 \cong 120\pi$ [Ω]
真空中の光速	$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2.998 \times 10^{8}$ [m/s]
素電荷	$e = 1.60 \times 10^{-19}$ [C]
電子の質量	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ [kg]
陽子の質量	$m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ [kg]
万有引力定数	$G = 6.673 \times 10^{-11}$ [$N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$]
プランク定数	$h = 6.626 \times 10^{-34}$ [$J \cdot s$]
	$\hbar = h/(2\pi) = 1.0546 \times 10^{-34}$ [$J \cdot s$]
ボルツマン定数	$k = 1.38 \times 10^{-23} \cong 10^{-9}/(36\pi)$ [J/K]

A.5 ベクトル公式



(1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$ (θ: $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間の角)

(2) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\hat{u}_{AB}|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ ($\hat{u}_{AB}$: $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ の方に回転する右ねじの進む方向の単位ベクトル)



(3) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(4) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$

(5) $\hat{u}_A=\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ ($\mathbf{A}$ 方向の単位ベクトル)

(6) $\nabla=\hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\dfrac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z}$

(7) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$

(8) $\nabla\times(\nabla V)=0$

(9) $\nabla\cdot(V\mathbf{A})=V\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla V$

(10) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$

(11) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{A}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

ここで、 $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}=\mathbf{B}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right)=\left(B_x\dfrac{\partial}{\partial x}+B_y\dfrac{\partial}{\partial y}+B_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A}$

(12) $\nabla\times(V\mathbf{A})=\nabla V\times\mathbf{A}+V\nabla\times\mathbf{A}$

(13) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$

(14) $\nabla\cdot(\nabla V)=\nabla^2 V$ (ラプラシアン)

(15) $\nabla^2\mathbf{A}=-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$ (ベクトル・ラプラシアン)

(16)
$$
\begin{aligned}
\nabla V &= \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial V}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}\\
&= \hat{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}\\
&= \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(17)
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

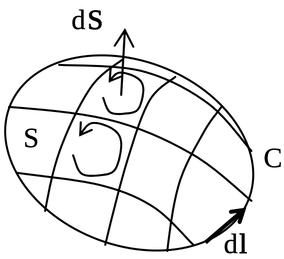
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

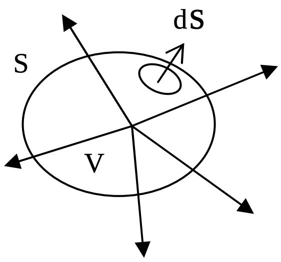
(18)
$$=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

(19) $\iint_S\nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\oint_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ (ストークスの定理)



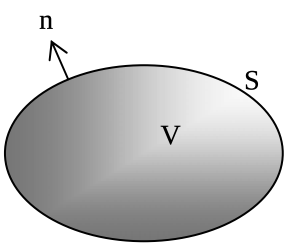
(20) $\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}dV=\oiint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ (ガウスの発散定理)



(21) Green の定理

Green の第一公式

$$\oiint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS=\iiint_V\left\{f\nabla^2g+(\nabla f)\cdot(\nabla g)\right\}dV$$

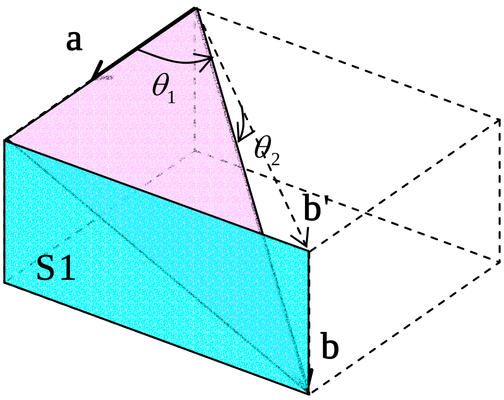


Green の第二公式

$$\oiint_S\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS=\iiint_V\left\{f\nabla^2g-g\nabla^2f\right\}dV$$

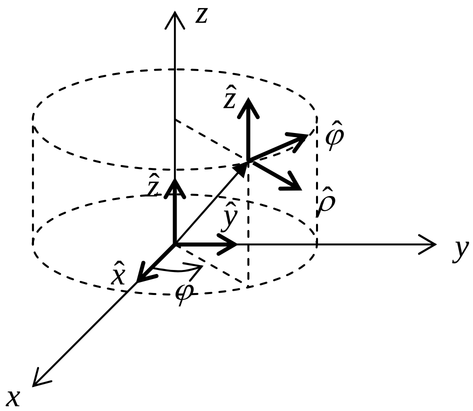
ここで、n は S の内部から外側に向かう S に垂直方向の座標である

A.6 フィールドの座標変換



$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}'$ の内積に等しい。なぜならば、$\mathbf{b}$ の終点を面 S_1 内で移動させてもその内積は定義から変化しないからである。$\mathbf{b}'$ の終点は面 S_1 内にある。よって $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}'$ の内積に等しい。これは A.4.2 の内積の計算で用いる。

A.6.1 直交座標(x, y, z) ⇔ 円筒座標(ρ, φ, z)



$$\begin{cases}\hat{x}\cdot\hat{\rho}=\cos\varphi\\ \hat{x}\cdot\hat{\varphi}=-\sin\varphi\\ \hat{x}\cdot\hat{z}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{y}\cdot\hat{\rho}=\sin\varphi\\ \hat{y}\cdot\hat{\varphi}=\cos\varphi\\ \hat{y}\cdot\hat{z}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{z}\cdot\hat{\rho}=0\\ \hat{z}\cdot\hat{\varphi}=0\\ \hat{z}\cdot\hat{z}=1\end{cases}$$

例えば直角座標で(x, y, z)、円筒座標で(ρ, φ, z)の位置に始点があるベクトル $\mathbf{A}$ が直角座標表示

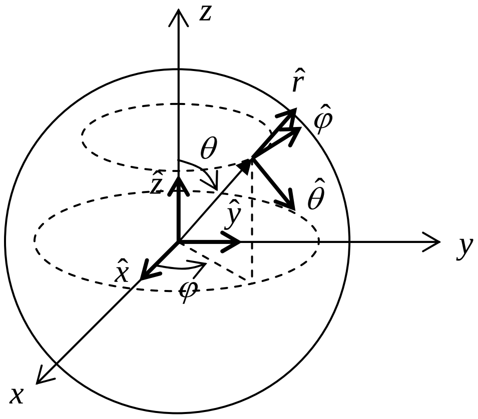
$\mathbf{A}=\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z$ されているとき、それを円筒座標表示するには

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \hat{\rho}(\hat{\rho}\cdot\mathbf{A}) + \hat{\varphi}(\hat{\varphi}\cdot\mathbf{A}) + \hat{z}(\hat{z}\cdot\mathbf{A}) \\
&= \hat{\rho}\left\{\hat{\rho}\cdot(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)\right\} \\
&\quad + \hat{\varphi}\left\{\hat{\varphi}\cdot(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)\right\} \\
&\quad + \hat{z}\left\{\hat{z}\cdot(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)\right\} \\
&= \hat{\rho}\left\{(\hat{\rho}\cdot\hat{x})A_x + (\hat{\rho}\cdot\hat{y})A_y + (\hat{\rho}\cdot\hat{z})A_z)\right\} \\
&\quad + \hat{\varphi}\left\{(\hat{\varphi}\cdot\hat{x})A_x + (\hat{\varphi}\cdot\hat{y})A_y + (\hat{\varphi}\cdot\hat{z})A_z)\right\} \\
&\quad + \hat{z}\left\{(\hat{z}\cdot\hat{x})A_x + (\hat{z}\cdot\hat{y})A_y + (\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}
\end{aligned}
$$

ここで、()内の単位ベクトルの内積は上で計算した式を使えばよい。
同様に、円筒座標から直角座標への座標変換もできる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \hat{x}(\hat{x}\cdot\mathbf{A}) + \hat{y}(\hat{y}\cdot\mathbf{A}) + \hat{z}(\hat{z}\cdot\mathbf{A}) \\
&= \hat{x}\left\{(\hat{x}\cdot\hat{\rho})A_\rho + (\hat{x}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi + (\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\} \\
&\quad + \hat{y}\left\{(\hat{y}\cdot\hat{\rho})A_\rho + (\hat{y}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi + (\hat{y}\cdot\hat{z})A_z)\right\} \\
&\quad + \hat{z}\left\{(\hat{z}\cdot\hat{\rho})A_\rho + (\hat{z}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi + (\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}
\end{aligned}
$$

A.6.2 **直交座標**(x, y, z) ⇔ **極座標**(r, θ, φ)



$$
\begin{cases}
\hat{x}\cdot\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi \\
\hat{x}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi \\
\hat{x}\cdot\hat{\varphi} = -\sin\varphi
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\hat{y}\cdot\hat{r} = \sin\theta\sin\varphi \\
\hat{y}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\sin\varphi \\
\hat{y}\cdot\hat{\varphi} = \cos\varphi
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta \\
\hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\sin\theta \\
\hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0
\end{cases}
$$

Reference

[1] N. Inagaki, “An Improved Circuit Theory of a Multielement Antenna,” IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol. AP-17, No. 2, Mar. 1969.
[2] R. F. Harrington, “Matrix Methods for Field Problems,“ IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-15, No. 4, July 1967.
[3] R. F. Harrington, et al. “Straight Wires with Arbitrary Excitation and Loading,” IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-15, No. 4, July 1967.
[4] R. F. Harrington: “Field Computation by Moment Methods”, IEEE Press, New York, 1993.
[5] A. I. Imoro, Y. Kani, N. Inagaki, and N. Kikuma, “An Improved Circuit Theory for the Analysis of Longer Co-planer Dipole Antennas,” IEICE Trans. Commun., Vol. E80-B, No. 2, February 1997.
[6] C. A. Balanis: “Antenna Theory”, John Wiley & Sons, Inc., 2nd ed., 1997.
[7] 中島将光、「マイクロ波工学 基礎と原理」、森北出版、1998.
[8] 杉田勝実、岡本良夫、関根松夫、「経路積分と量子電磁気学」、森北出版、1998.