アレーファクタ(Array Factor)の計算

2018/12/10 平野拓一

1. アレーファクタの導出

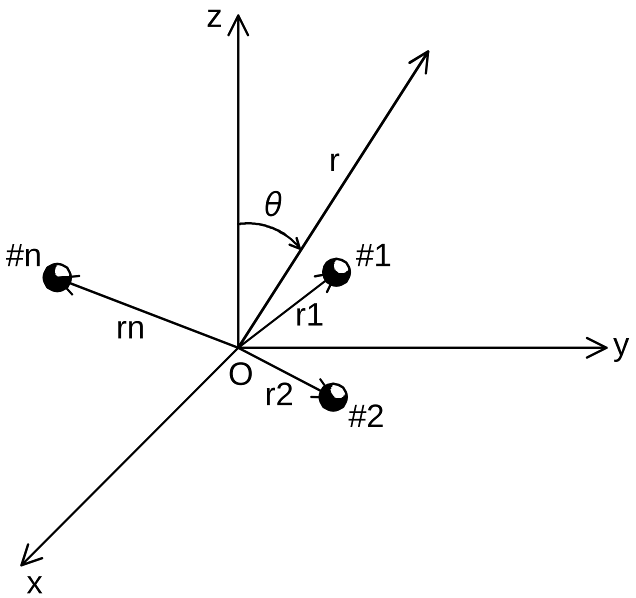


図 1 アンテナの配置

同じ素子指向性を持つアンテナを並べたものをアレーアンテナと言う。アレーアンテナを使うとビームを所望の方向に向けたりして制御することができる。原理的には高校物理で習う「波の干渉縞」である。

図 1 に示すように n 個の素子($\#1,\cdots,\#n$)が空間に配置されており、それぞれの位置ベクトルは $\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n$ とする。n 個の素子が全て同じ指向性（素子指向性）を持ち、素子間相互結合が無視できるならば、n 個の素子全体の指向性は素子指向性にアレーファクタを掛けたものとなる。アレーファクタ[1] (p.149)は素子の配置によって決まる指向性であり、次のように導出する。

指向性が全く同じ $g(\theta,\varphi)$ の n 個のアンテナ(位置: $\mathbf{r}_i$)が放射する全電界は、$k_0 r >> 1$ の遠方界近似[2] (p. 125)を用いて

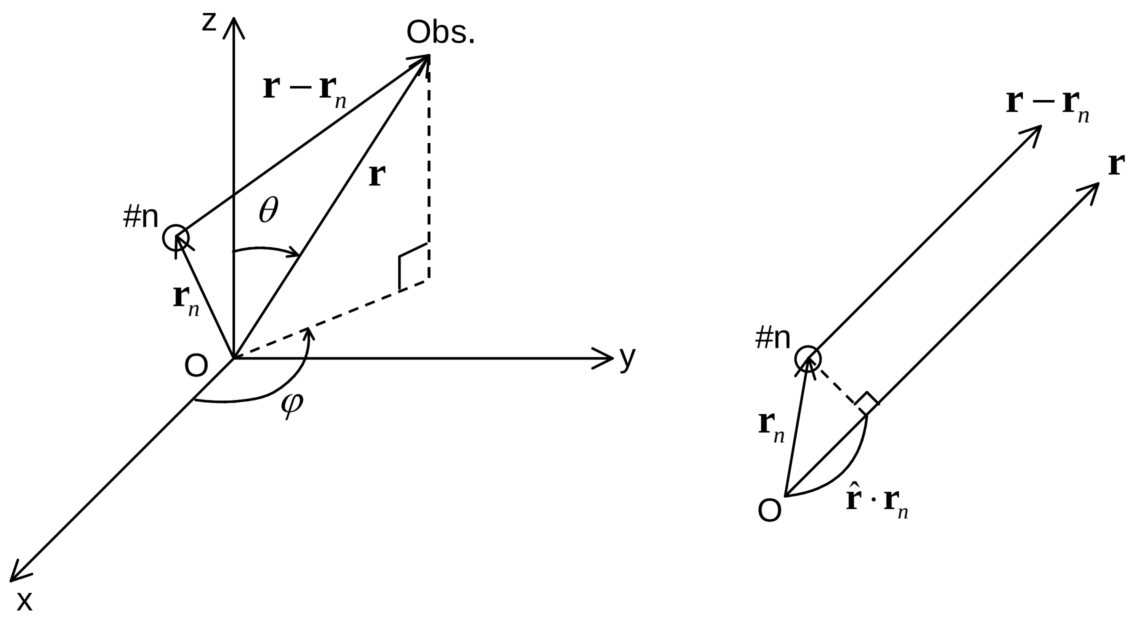


図 2 遠方界近似

$$\mathbf{E}(r,\theta,\varphi)=\sum_{i=1}^{n} w_i g(\theta,\varphi)\frac{\exp(-jk_0\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$
$$=\sum_{i=1}^{n} w_i g(\theta,\varphi)\frac{\exp(-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

ここで余弦定理より、

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2=|\mathbf{r}|^2+|\mathbf{r}_i|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|=\sqrt{|\mathbf{r}|^2+|\mathbf{r}_i|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}=|\mathbf{r}|\sqrt{1+\left(\frac{|\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r}|}\right)^2-2\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}|}}\cong|\mathbf{r}|\sqrt{1-2\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}|}}$$

最後の式変形では$\sqrt{1+x}\cong 1+x/2$のテイラー展開($x<<1$のとき)を用いて、2 次の微小項を無視した。

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|\cong|\mathbf{r}|\left(1-\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}|}\right)=|\mathbf{r}|-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i$$

位相項$\exp(-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)$に関しては上の近似式の$-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i$を無視することは出来ないが、振幅項$1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$に関しては更に 2 項目を無視しても構わない。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(r,\theta,\varphi) &\cong \sum_{i=1}^{n} w_i\, g(\theta,\varphi)\frac{\exp(-jk_0(r-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i))}{r} \\
&= g(\theta,\varphi)\frac{\exp(-jk_0 r)}{r}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i \exp(jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i)}_{\text{Array Factor: } AF} \\
&= g(\theta,\varphi)AF(\theta,\varphi)\frac{\exp(-jk_0 r)}{r}
\end{aligned}
$$

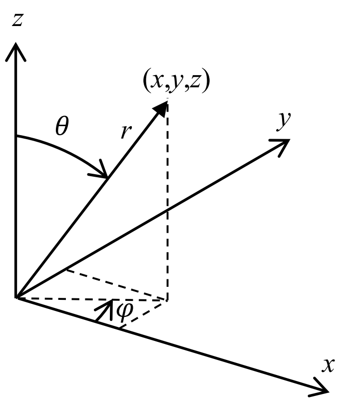
$$
\begin{aligned}
AF(\theta,\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} w_i \exp(jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \exp(jk_0(\sin\theta(x_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi) + z_i\cos\theta))
\end{aligned}
$$

と表すことができる（細かい定数係数は複素重み係数 w_i に含めて考える）。$g(\theta,\varphi)$ は**素子指向性(element factor)**と言い、各放射素子の指向性である。$AF(\theta,\varphi)$ は**アレーファクタ(array factor)**と言い、素子の配置で決まる指向性である。全体の指向性はそれらの積になっている。

ここで、

w_i：素子 # i に対する複素重み係数

$\mathbf{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$：素子 # i の位置



$k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$：自由空間の波数

$\mathbf{r} = r[\sin\theta\cos\varphi\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}]$：位置ベクトル

$r = |\mathbf{r}|$

$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\varphi\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$：$\mathbf{r}$ 方向単位ベクトル

$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i = \sin\theta(x_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi) + z_i\cos\theta$

である。

2. 例題

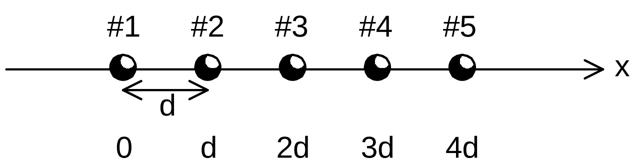


図 3 リニアアレー

図 1 の特殊な場合として、図 2 のように x 軸上に素子間隔 $d = \lambda / 2$ で等方性素子が配置されたリニアアレーのアレーファクタを計算して指向性のグラフを描け。横軸は観測角 θ （$-180°$〜$180°$，$\varphi = 0°$）、縦軸は振幅とする。振幅は最大値で規格化し、単位は dB ($20 \log_{10}$*)とする。

(1) 一様分布の場合

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 1$$

として計算せよ。また、サイドローブの大きさがメインローブの大きさよりも約-13dB 低いことを確認せよ。

(2) 二項分布の場合

$$w_1 = 1$$
$$w_2 = 4$$
$$w_3 = 6$$
$$w_4 = 4$$
$$w_5 = 1$$

として計算せよ。サイドローブが出ないことを確認せよ。

<u>[プログラムを組む際の工夫]</u>

波数 $k_0 = 2\pi / \lambda$ [m^{-1}] と素子間隔 d [m] の積は無次元なので、d を波長 λ 単位で表す($d = d_\lambda \lambda$) と $k_0 d = 2\pi d_\lambda$ となり、λ が相殺される。別の説明としては、$k_0 d = 2\pi (d / \lambda)$ なので、素子間隔などの距離の単位として波長を用いれば波数を $k_0 = 2\pi$ とすればよいということになる。

<u>参考文献</u>

[1] 稲垣直樹, 電磁波工学, 丸善株式会社
[2] C.A. Balanis, Antenna Theory, John Wiley & Sons, Inc.

T. Hirano