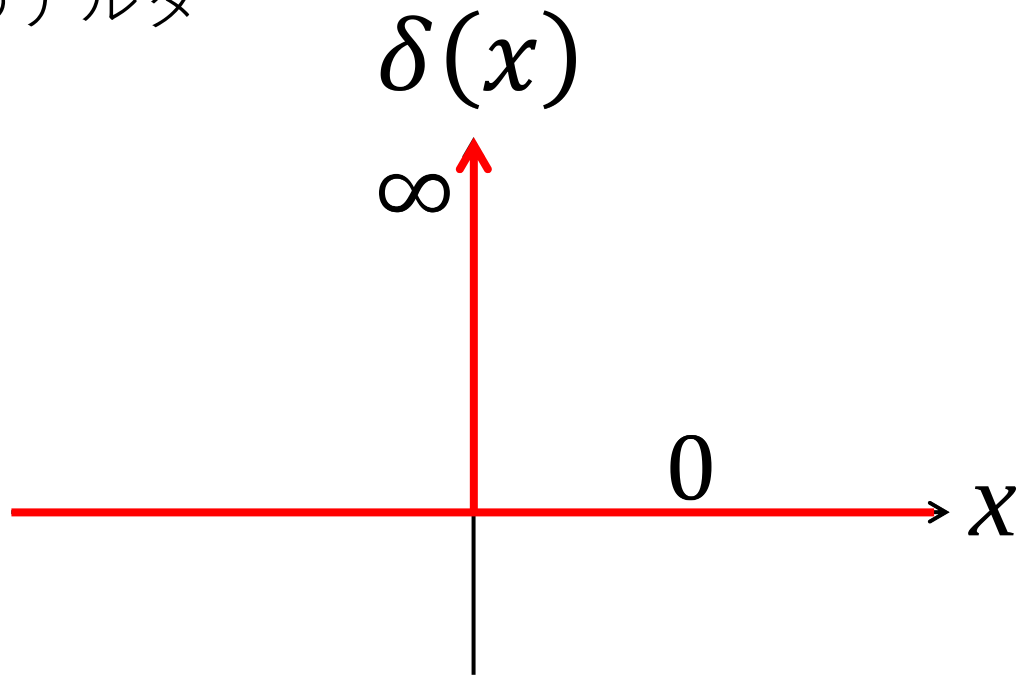
デルタ関数

ディラックのデルタ
Dirac delta



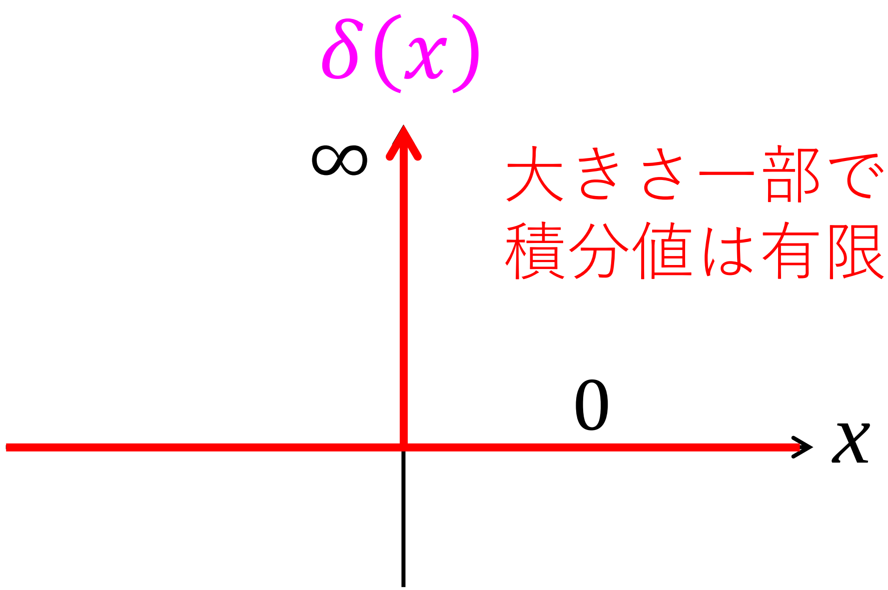
平野拓一

デルタ関数

ディラックのデルタ

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty \ (x = 0) \\ 0 \ (x \neq 0) \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

?

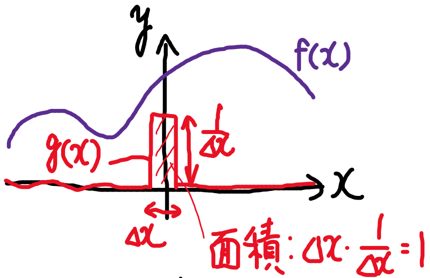


大きさ一部で無限大だが、
積分値は有限になる関数

・信号処理（サンプリング関数）
・電磁気学（点電荷、面電荷、線電荷）

ディラックのデルタ

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$
(連続と離散のかけ橋)



↓

$\delta(x)$と定義

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} f(x)\, dx$$

$\Delta x \to 0$のとき$f(0)$

$$= f(0) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \underbrace{\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx}_{=\Delta x}}_{=1}$$

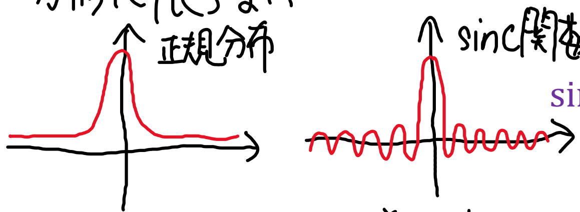
$$= f(0)$$

- $\delta(x)$を$f(x)$にかけて積分すると、δ関数の引数が0になるときのxでの値$f(0)$が抜き出される(サンプリング)
- δ関数は値は∞だが積分したら有限
  → 電荷密度は∞でも総電荷量は有限を表現できる

ディラックのデルタ

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

・そもそも、この性質を満たす形は方形に限らない



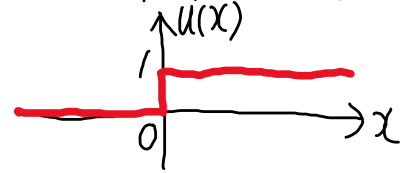
$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}$$

⇒ 次をδ関数の定義とする

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)\\ \delta(x)=0\quad(x\neq 0)\end{cases} \rightarrow \delta(0)=\infty$$

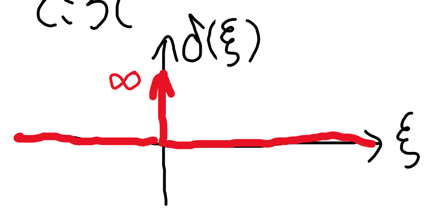
超関数

ステップ関数の微分



$$u(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

ところで



$$\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}=u(x)$$

$$\frac{du(x)}{dx}=\delta(x)$$

⇒ 不連続の微分ができる！

点電荷･線電荷･面電荷

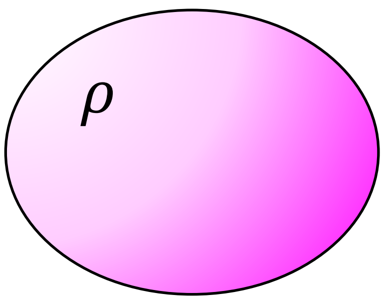
電磁気学：

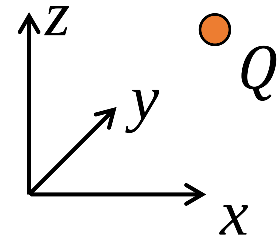
点電荷Q [C] 、線電荷λ [C/m]、面電荷σ [C/m^2] 、電荷密度ρ [C/m^3]の数式表現

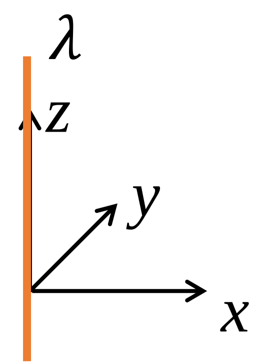
電荷密度
(連続関数)

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i$$

$$\iiint_V \rho dv = Q$$ 点電荷

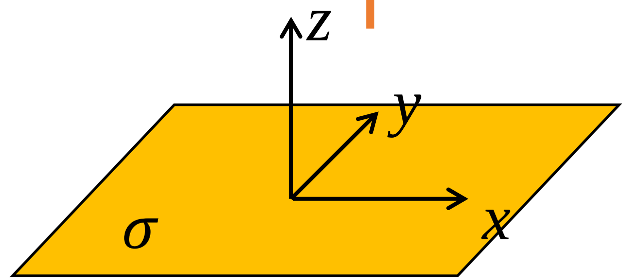






$$= \lambda$$ 線電荷

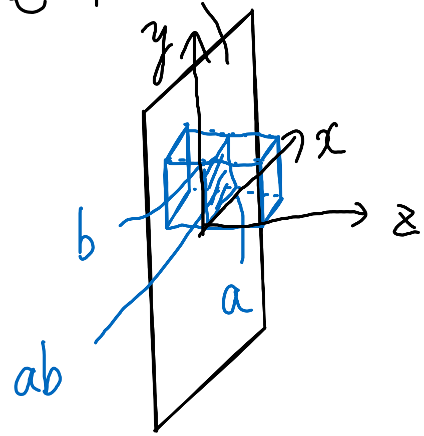
$$= \sigma$$ 面電荷



面電荷

z方向で、厚さ→0となっているので
密度はz方向では∞。でも電荷の総量は有限
⇒δ関数で表現するとよい

面電荷：σ [C/m^2]



$$\underset{[\mathrm{C/m^3}]}{\rho} = \sigma\delta(z)$$

体積積分の計算ができる。
→δ関数のおかげ

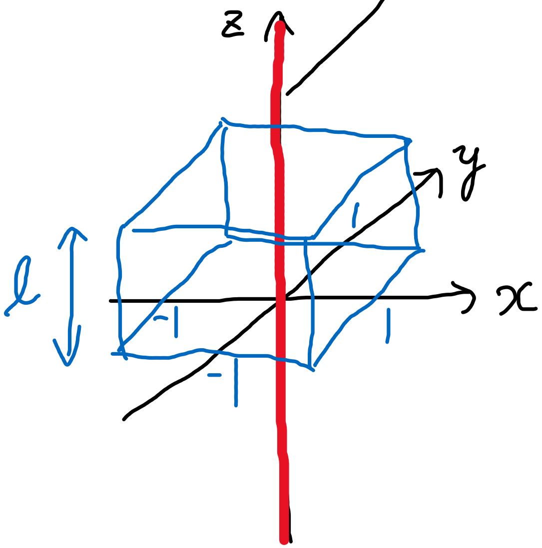
$$\iiint_V \rho\, dv = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=-1}^{1} \sigma\delta(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \sigma \int_{x=0}^{a} dx \int_{y=0}^{b} dy \underbrace{\int_{z=-1}^{1} \delta(z)\,dz}_{=\int_{z=-\infty}^{\infty}\delta(z)\,dz = 1}$$

$$= \sigma ab \ [\mathrm{C}]$$

線電荷

線電荷：λ [C/m]



$$\underset{[C/m^3]}{\rho} = \lambda\,\delta(x)\,\delta(y)$$

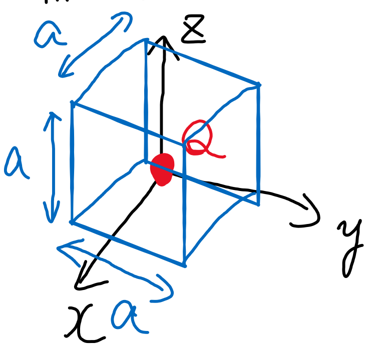
$$\iiint_V \rho\,dv = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=0}^{l} \lambda\,\delta(x)\,\delta(y)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \lambda \underbrace{\int_{x=-1}^{1}\delta(x)\,dx}_{=1} \underbrace{\int_{y=-1}^{1}\delta(y)\,dy}_{=1} \underbrace{\int_{z=0}^{l} dz}_{=l}$$

$$= \lambda l \ [C]$$

点電荷

点電荷：Q [C]



$$\rho = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

[C/m³]

$$\iiint_V \rho dv = \int_{x=-a/2}^{a/2}\int_{y=-a/2}^{a/2}\int_{z=-a/2}^{a/2} Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= Q\underbrace{\int_{x=-a/2}^{a}\delta(x)dx}_{=1}\ \underbrace{\int_{y=-a/2}^{a/2}\delta(y)dy}_{=1}\ \underbrace{\int_{z=-a/2}^{a/2}\delta(z)dz}_{=1}$$

∞にしても同じ

$$= Q\ [C]$$

複数の電荷があるとき

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} Q_i\delta(x-x_i)\delta(z-x_i)\delta(z-z_i) \Rightarrow \iiint_V \rho dv = \sum_{i=1}^{N} Q_i$$