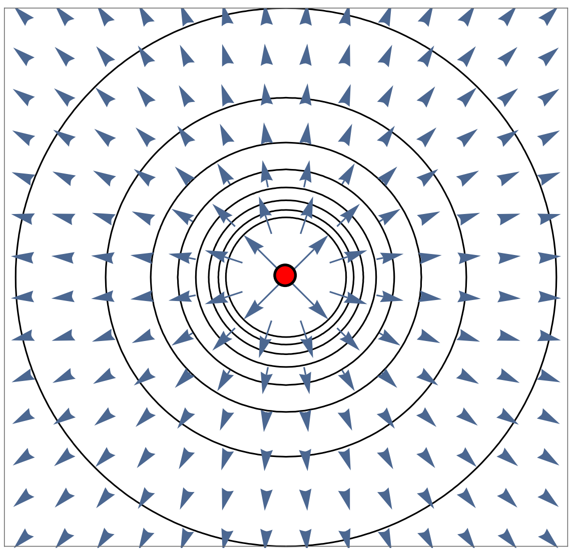
2021年12月3日

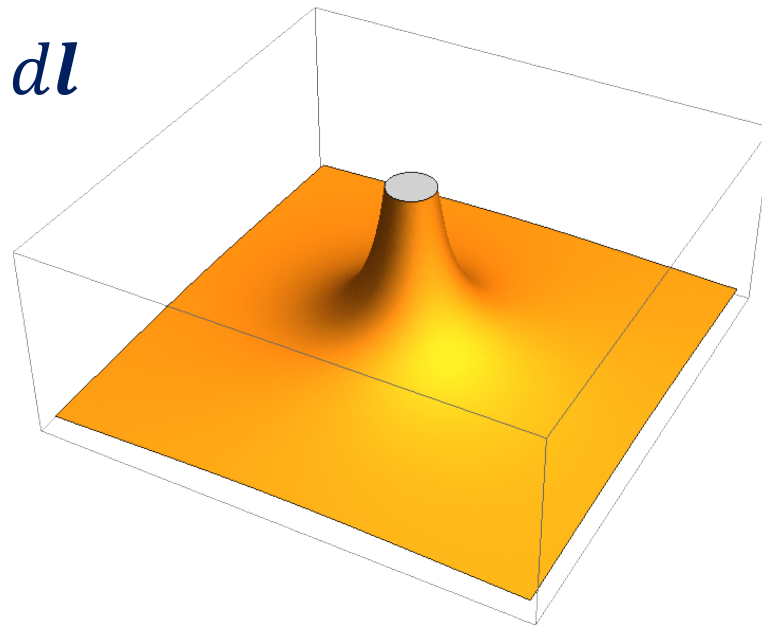
電界と電位
— 微分と積分 —

電界・磁界とポテンシャル



$$V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$



平野拓一

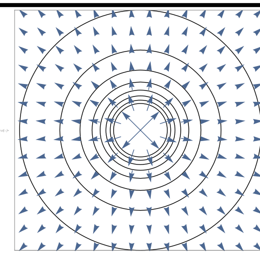
電磁気学の問題

何をしたいのか？EかVがわかればよい。

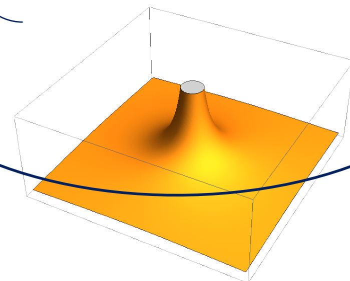
電磁波

$\rho, \boldsymbol{i}$

- 静電界
  - 電荷 $\boldsymbol{\rho}$
  - 電界 $\mathbf{E} = -\nabla V$



  - ポテンシャル（電位） $V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l}$



$$V = \iiint_V \frac{\rho\, dv}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 静磁界
  - （直流）電流 $\boldsymbol{i}$
  - 磁束密度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
  - ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = \cdots$ (**B**を積分)

$$\mathbf{A} = \iiint_V \frac{\mu_0 \boldsymbol{i}\, dv}{4\pi r}$$

Vは電気回路で使う概念だから自然に理解しやすいのだろう。
普通はVを求めてからEを求めるのが簡単と言われるが・・・E→Vの方が簡単なこともある。

微分と積分の違い

数学が好きな人のために

どんな関数でも微分は可能だが、なぜ（不定）積分は一般にはできないのか？

微分

線形結合: $af(x)+bg(x) \longrightarrow af'(x)+bg'(x)$

乗算: $f(x)g(x) \longrightarrow f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

除算: $\dfrac{g(x)}{f(x)} \longrightarrow \dfrac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2}$

合成関数: $f(g(x)) \longrightarrow f'(g(x))g'(x)$

普通考える関数はf(x), g(x)と↑の演算の組み合わせ

積分

$af(x)+bg(x) \longrightarrow a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

部分積分

$f(x)g(x) \dashrightarrow \left(\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\right)$

$\dfrac{g(x)}{f(x)} \dashrightarrow \left(\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x)\right)$

置換積分

$f(g(x)) \dashrightarrow \left(\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt\right)$

部分積分の例

Mathematica

```
In[1]:= Integrate[x * Sin[x], x]
Out[1]= -x Cos[x] + Sin[x]
```

MATLAB

```
syms x a
int(x*sin(x))

ans =
sin(x) - x*cos(x)
```

$$\int x \sin x \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x$$

$$\left(\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx \right)$$

$f'(x)$	$g(x)$	$f(x)$	$g'(x)$
$\sin x$	x	$-\cos x$	1

置換積分の例

Mathematica

In[1]:= Integrate[z/(z^2 + a^2)^(1/2), z]

Out[1]= $\sqrt{a^2 + z^2}$

MATLAB

```
%%
syms z a
int(z/(z^2+a^2)^(1/2))

ans =
(a^2 + z^2)^(1/2)
```

$$\int_c^z \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}dx$$

$$x^2 + a^2 = t$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

x	c	$\rightarrow$	z
t	a^2+c^2	$\rightarrow$	z^2+a^2

$$\int_{a^2+c^2}^{z^2+a^2} \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_{a^2+c^2}^{z^2+a^2} t^{-1/2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_{a^2+c^2}^{z^2+a^2} = \left[\sqrt{t}\right]_{a^2+c^2}^{z^2+a^2}$$

$$= \sqrt{z^2+a^2} - \sqrt{a^2+c^2}$$

（不定）積分できない例

Mathematica

```
In[1]:= Integrate[Sin[x]/x, x]

Out[1]= SinIntegral[x]
```

MATLAB

```
syms x a
int(sin(x)/x)

ans =
sinint(x)
```

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \equiv S_i(x)$$

正弦積分関数

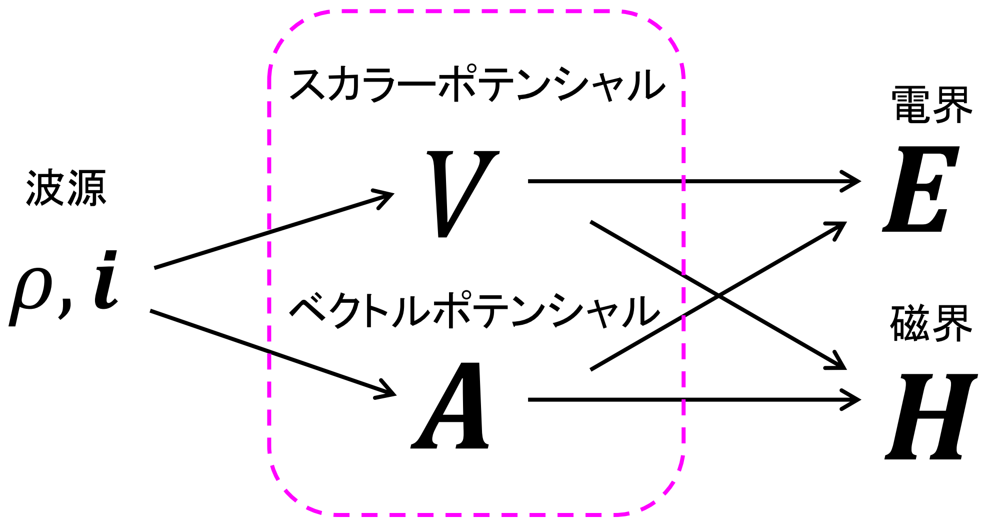
$$\mathrm{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x}$$

sinc関数

アハラノフ･ボーム効果(AB効果)

- ファインマン・レイトン・サンズ: ファインマン物理学III 電磁気学, 岩波書店, 東京, pp.78-79, 1969.
- 外村彰, "電子波で見る電磁界分布－ベクトルポテンシャルを感じる電子波－", 電子情報通信学会誌, Vol.83, No.12, pp.906-913, Dec. 2000.

アハラノフ･ボーム効果(AB効果)



計算の道具、実在しない

・・・と思っていたら

いや、ミクロな世界では実在し、これはE,Hよりも本質的物理量
(アハラノフさんとボームさんが、無限長ソレノイドの外に漏れるベクトルポテンシャルの問題を提起)

実験確認は、日立基礎研究所の外村彰氏

V, A無しに説明不可能→実在する