時間調和振動(Time-Harmonic Oscillation)と時間波形の関係

2019/6/11 T. Hirano

1. はじめに

工学分野では、時間変化が調和振動（正弦・余弦波的に変化する）する解析を行う際、フーリエ変換して解析する。電気回路において交流回路の解析では複素表現が用いられる（フェーザ法、複素記号法、複素数表示）が、これは方程式、関数全体をフーリエ変換して、周波数領域で解析していることに他ならない。

フーリエ変換した周波数領域では微分・積分方程式において、微分は$\partial/\partial t = j\omega$、積分は$\int \ dt = \frac{1}{j\omega}$と置換し、複素数領域での代数演算となる。また、周波数領域の複素数の解析結果から時間波形を得るには、逆フーリエ変換をすればよいのだが、単一周波数の場合は偶関数、奇関数の性質を利用すると周波数領域の複素数値に$e^{j\omega_0 t}$をかけて実部を取るだけでよい。これらのことについて説明する。

2. フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad \text{（フーリエ変換）}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad \text{（逆フーリエ変換）}$$

3. 実関数のフーリエ変換

[フーリエ変換]

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\mathrm{Even}(\omega t) - j\mathrm{Odd}(\omega t)]dt$$

$$= \mathrm{Even}_2(\omega) - j\mathrm{Odd}_2(\omega)$$

実部は奇関数、虚部は偶関数になる。

$$|F(\omega)| = |\mathrm{Even}_2(\omega) - j\mathrm{Odd}_2(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Even}_2(\omega)^2 + \mathrm{Odd}_2(\omega)^2} = \mathrm{Even}_3(\omega)$$

この強度スペクトル分布は偶関数になる。

$$\arg(F(\omega)) = \tan^{-1}\left(-\frac{\mathrm{Odd}_2(\omega)}{\mathrm{Even}_2(\omega)}\right) = \mathrm{Odd}_3(\omega)$$

位相スペクトル分布は奇関数になる。

[逆フーリエ変換]

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Even}_2(\omega)-j\mathrm{Odd}_2(\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Even}_2(\omega)-j\mathrm{Odd}_2(\omega)][\cos(\omega t)-j\sin(\omega t)]d\omega$$

（ここで、ωで積分して消える奇関数になる項は削除する）

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Even}_2(\omega)\cos(\omega t)+\mathrm{Odd}_2(\omega)\sin(\omega t)]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[F(\omega)e^{j\omega t}\right]d\omega \qquad (1)$$

4. 単一周波数（調和振動）の場合

$F(\omega)$は周波数成分としてω_0しか含まないとすると、

$$f(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)=\frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)}+e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right]$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)}+e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{2}\left[e^{j\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt+e^{-j\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt\right]$$

デルタ関数のフーリエ変換を考える。

<u>$f(t)=\delta(t)$のとき</u>

$$F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F[\delta(t)]e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}d\omega$$

<u>$F(\omega)=\delta(\omega)$のとき</u>

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

$$F(\omega)=\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \pi A[e^{j\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt + e^{-j\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt]$$

$$F(\omega) = \pi A[e^{j\varphi}\delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi}\delta(\omega + \omega_0)] \qquad (2)$$

なので、式(1)に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left[F(\omega)e^{j\omega t}\right]d\omega \\ &= \frac{A}{2}\left(\mathrm{Re}\left[e^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}\right] + \mathrm{Re}\left[e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}\right]\right) \\ &= \frac{A}{2}\mathrm{Re}[2\cos(\omega_0 t + \varphi)] \\ &= \mathrm{Re}[A\cos(\omega_0 t + \varphi)] \\ &= \mathrm{Re}\left[Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}\right] \end{aligned}$$

$Ae^{j\varphi}$は$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$のフェーザ表示である。（フェーザ表示とは、式(2)のフーリエ変換の$\delta(\omega - \omega_0)$の係数に対して複素数演算を行う方法であると解釈することもできる。）

このように、単一周波数（調和振動）の時間波形は$Ae^{j\varphi}$を$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$のフェーザ表示とすると

$$\boxed{f(t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}\right]}$$

で与えられることがわかる。

周波数領域の電磁界シミュレーション結果で、電磁界の複素量が得られた場合、上のようにして場所ごとの値を描くと時間変化を描くことができる。

http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/em-j.html

にある電磁界のアニメーションの多くは上のアルゴリズムで描かれている。