

# フーリエ解析

平野拓一

# 三角関数

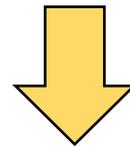
# 正弦波のパラメータ

角周波数 (Angular Frequency)

$$A \cos(\omega t + \theta)$$

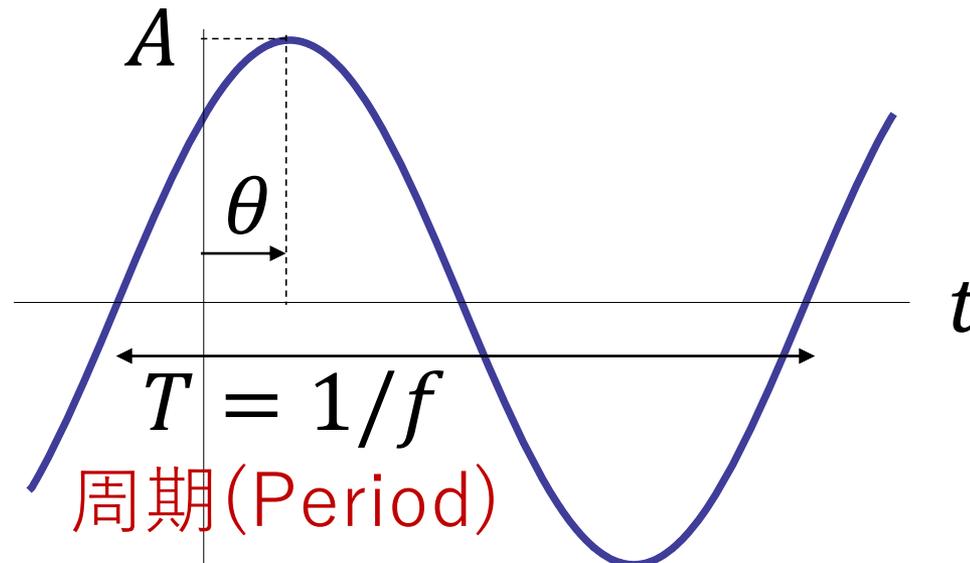
振幅 (Amplitude)

位相 (Phase)



$$2\pi f$$

周波数 (Frequency)



周期 (Period)

位相が $2\pi$ 変化する時間

# フーリエ変換

# フーリエ変換の定義

## フーリエ変換

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

## 逆フーリエ変換

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

# フーリエ変換の諸定理(1/2)

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = aF(\omega) + bG(\omega)$$

線形性

$$\mathcal{F}[f(t - \tau)] = e^{-j\omega\tau}F(\omega)$$

時間遅延

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}f(t)] = F(\omega - \omega_0)$$

推移律

$$\mathcal{F}[f(t/s)] = |s|F(s\omega)$$

伸縮律

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = j\omega F(\omega)$$

微分

$$\mathcal{F}\left[\int^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

積分

# フーリエ変換の諸定理(2/2)

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right] \quad \text{畳み込み}$$
$$= F(\omega)G(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega) \quad \text{積の公式}$$

$f(t)$  : 周期 $T$ の周関数

周期波形

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

ただし、 $c_n$ は複素フーリエ係数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{パーセバルの等式}$$

$$f(t) \text{ が実数} \Leftrightarrow F(\omega) = F^*(-\omega) \quad \text{対称スペクトル}$$

# 実数関数のフーリエ変換

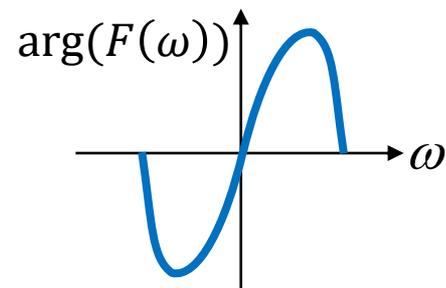
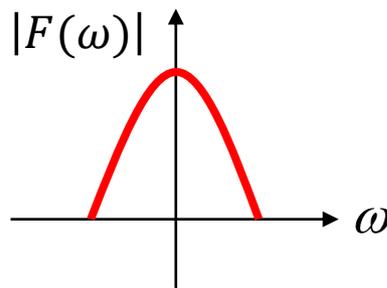
$f(t)$  が実数  $\Leftrightarrow F(\omega) = F^*(-\omega)$       対称スペクトル



$$|F(-\omega)| = |F(\omega)|, \arg(F(-\omega)) = -\arg(F(\omega))$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\text{Even}(\omega t) - j \text{Odd}(\omega t)] dt \\ &= \text{Even}_2(\omega) - j \text{Odd}_2(\omega) \end{aligned}$$



# 実関数のスペクトル分布

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ f(t) \cos(\omega t) - j f(t) \sin(\omega t) \} dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt}_{A(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt}_{B(\omega)} \end{aligned}$$

# 実関数のスペクトル分布

$$\begin{aligned} A(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = A(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\omega t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = -B(\omega) \end{aligned}$$

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$\begin{aligned} [F(-\omega)]^* &= [A(-\omega) + jB(-\omega)]^* \\ &= [A(\omega) - jB(\omega)]^* \\ &= A(\omega) + jB(\omega) \\ &= F(\omega) \end{aligned}$$

# フーリエ変換対の確認

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) 2\pi\delta(t-\tau) d\tau \\ &= f(t) \end{aligned}$$

# 代表的な関数のフーリエ変換

フーリエ変換  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

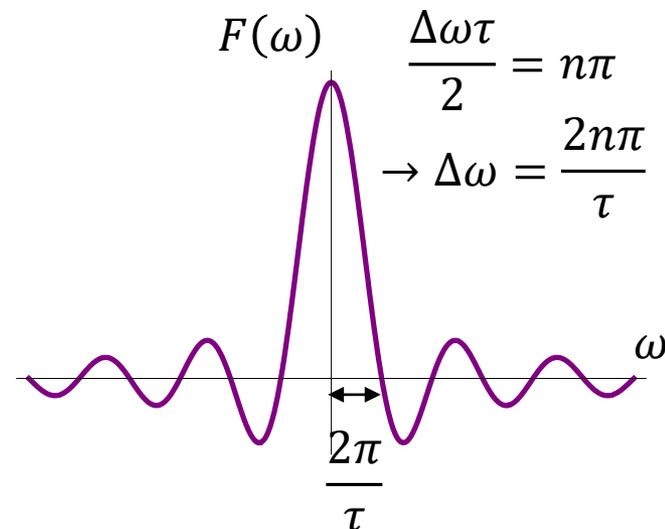
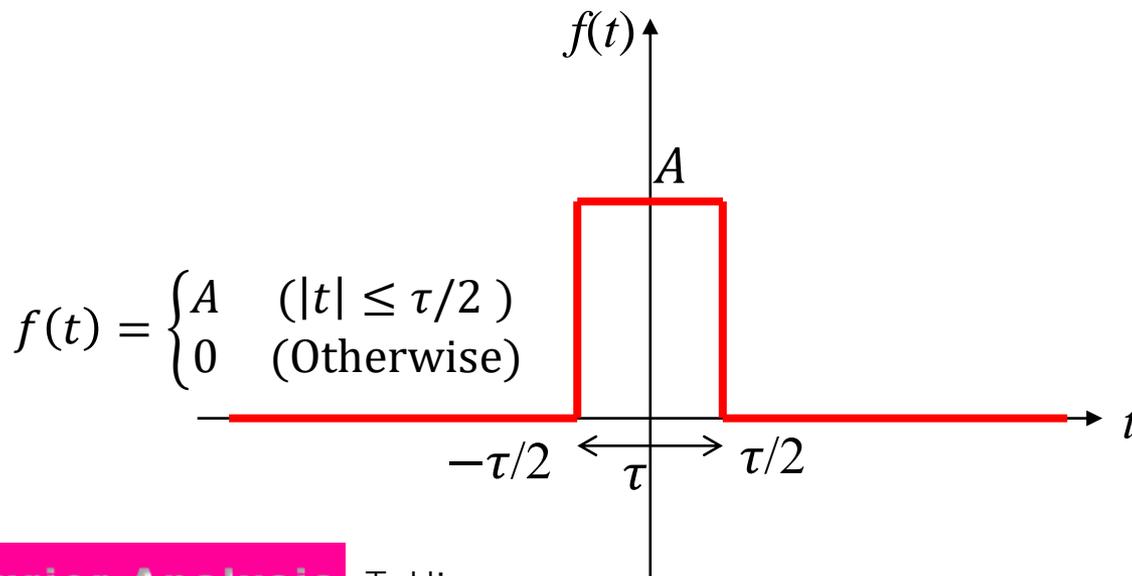
逆フーリエ変換  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

	$f(t)$	$F(\omega)$
Dirac Delta	$\delta(t)$	1
1	1	$2\pi\delta(\omega)$
面積1の矩形パルス	$\begin{cases} 1/\tau & (t \leq  \tau/2  \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \text{sinc}(\omega\tau/2)$
ガウシアンパルス	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{1}{2}\omega(\sigma^2\omega + j2\mu)}$
1回微分ガウシアンパルス	$-\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma^3}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} (t - \mu)$	$j2\omega\sqrt{\sqrt{\pi}\sigma^3} e^{-\frac{1}{2}\omega(\sigma^2\omega + j2\mu)}$ 最大: $\omega = \pm \frac{1}{\sigma}$

# 矩形パルス

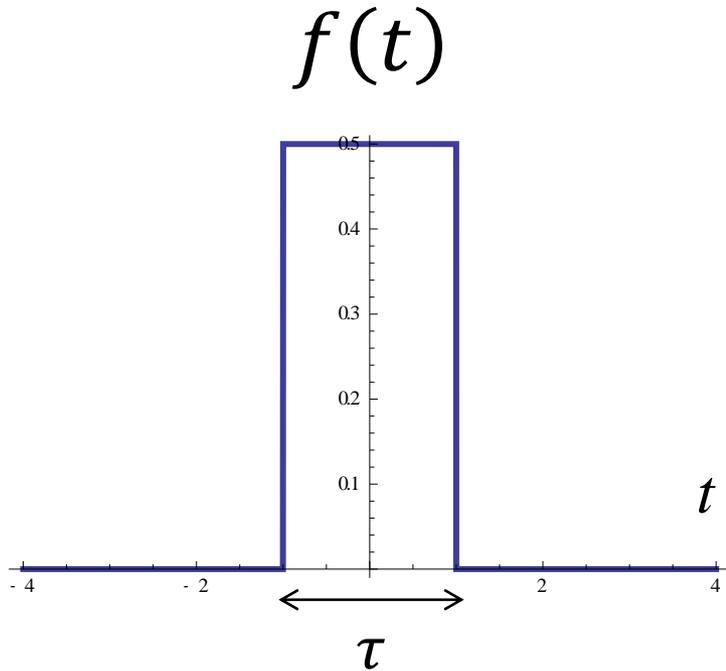
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{A}{-j\omega} \left[ e^{-j\omega t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j\omega} \left[ e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2} \right] \\ &= 2A \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \\ &= A\tau \operatorname{sinc}(\omega\tau/2) \end{aligned}$$

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

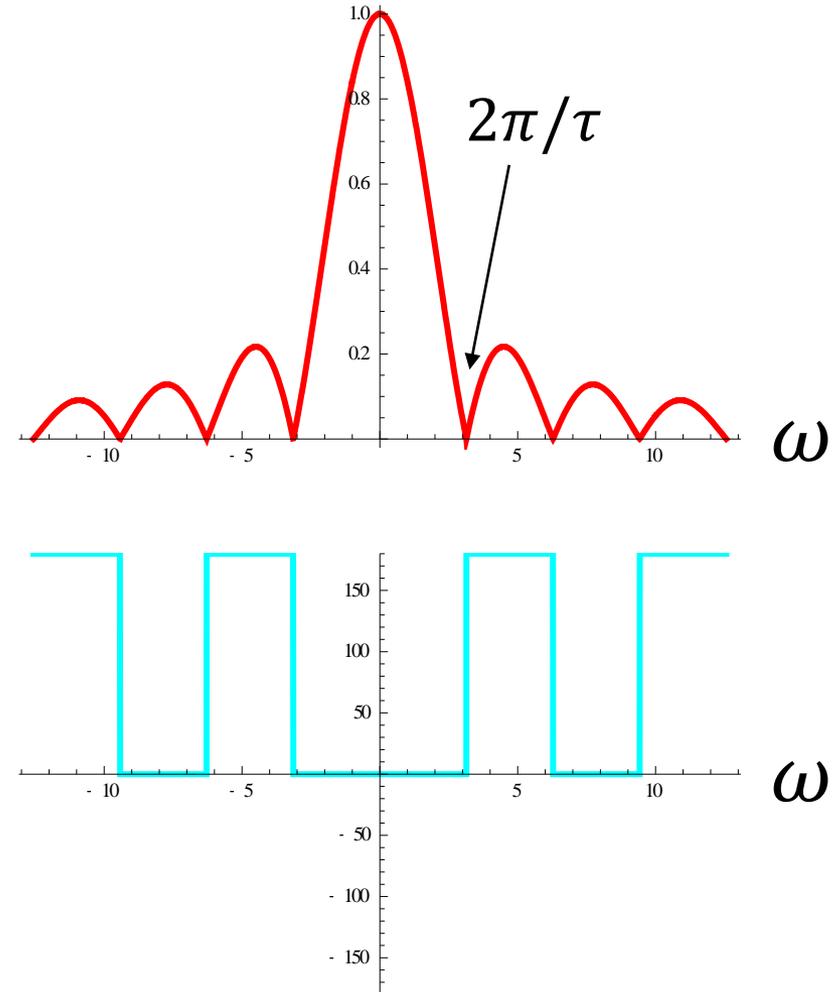


# 矩形パルス

$$\tau=2, A=1/\tau$$

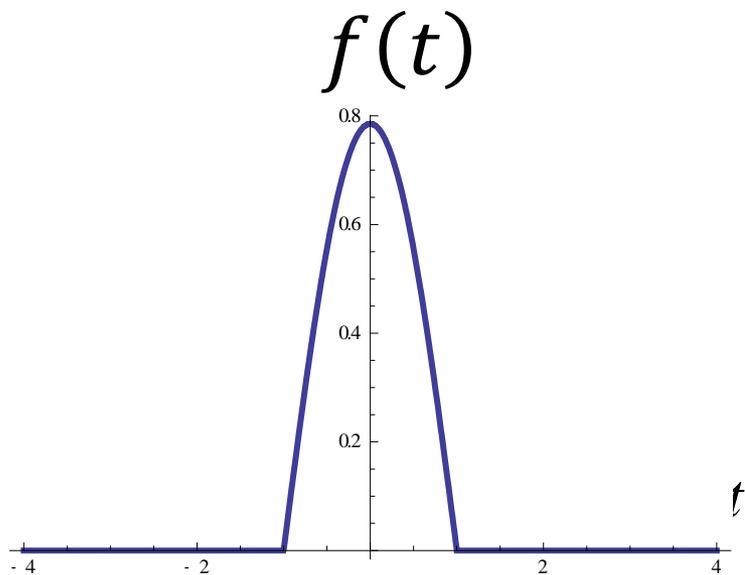


$$F(\omega)$$

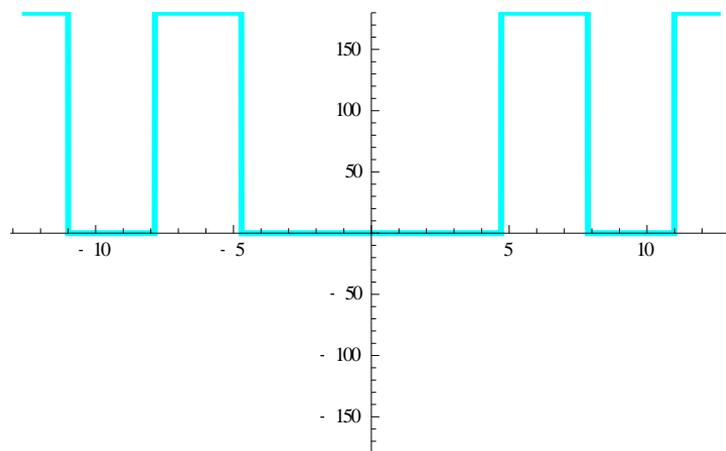
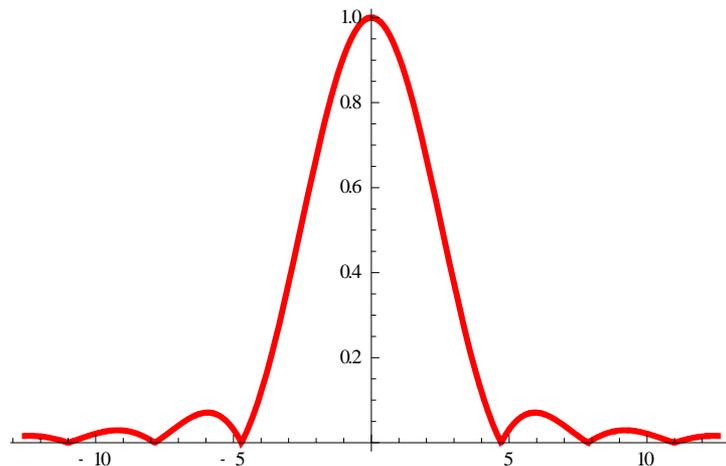


# $\cos \mathcal{D}[-\pi/2, \pi/2]$

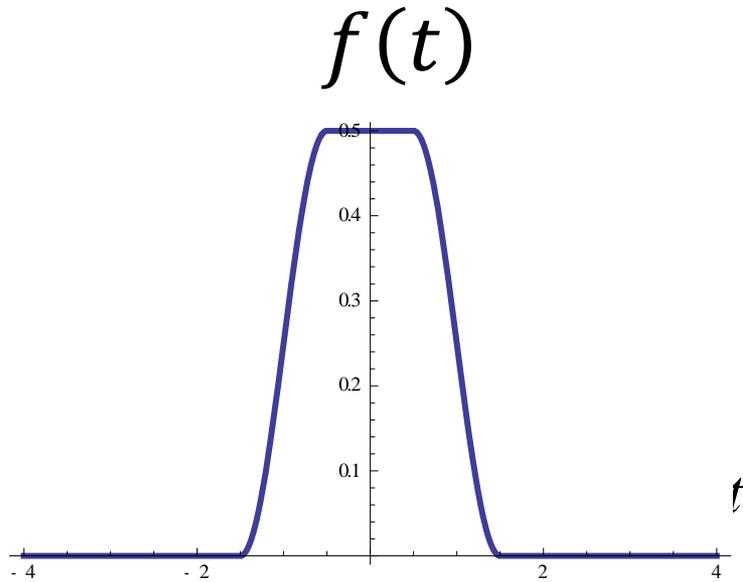
$F(\omega)$



面積=1

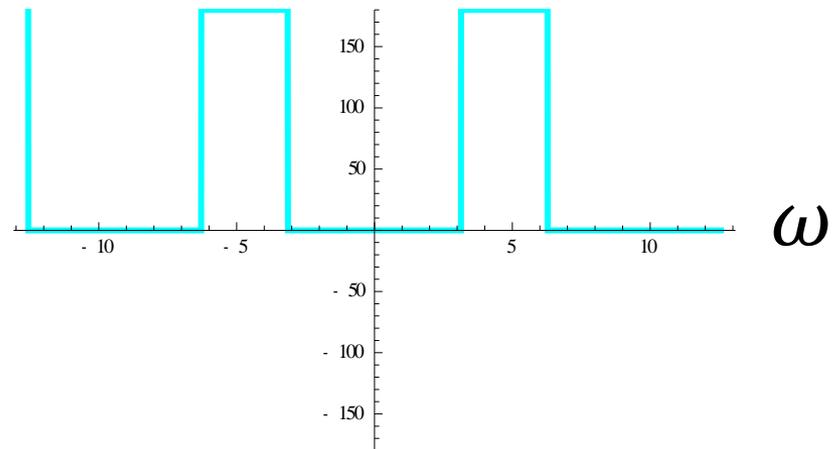
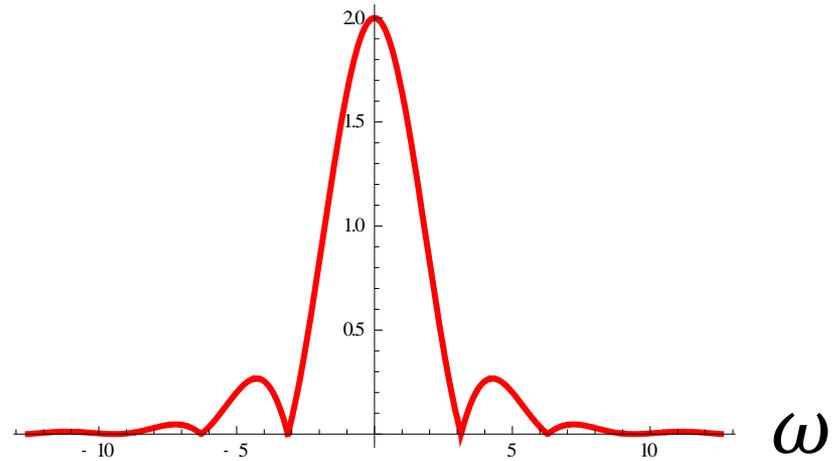


# Raised-cosine

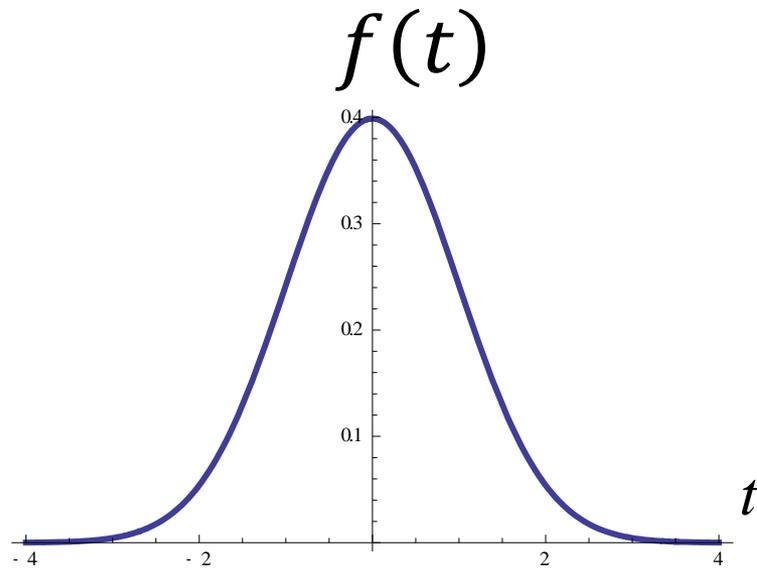


面積=1

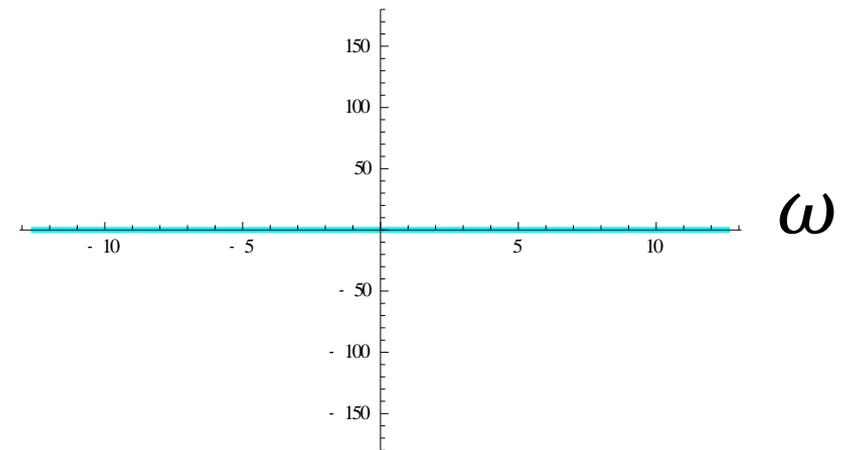
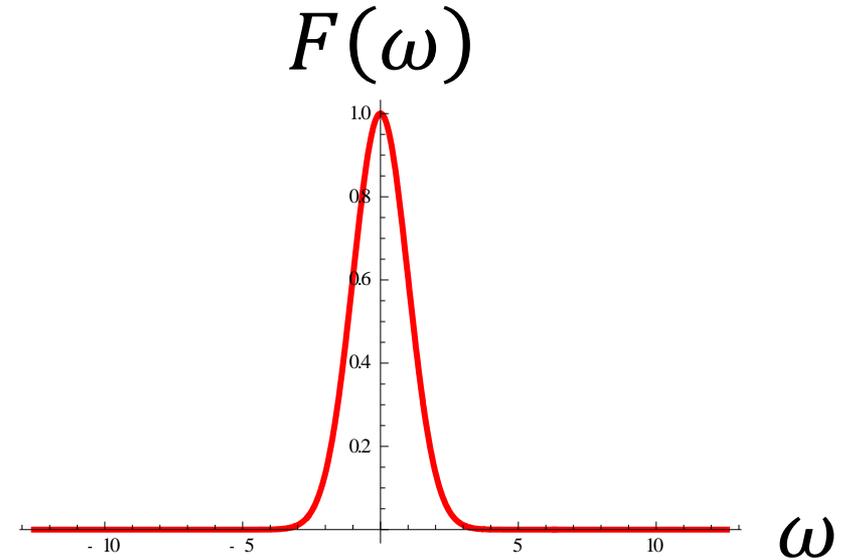
$F(\omega)$



# ガウス分布(正規分布)

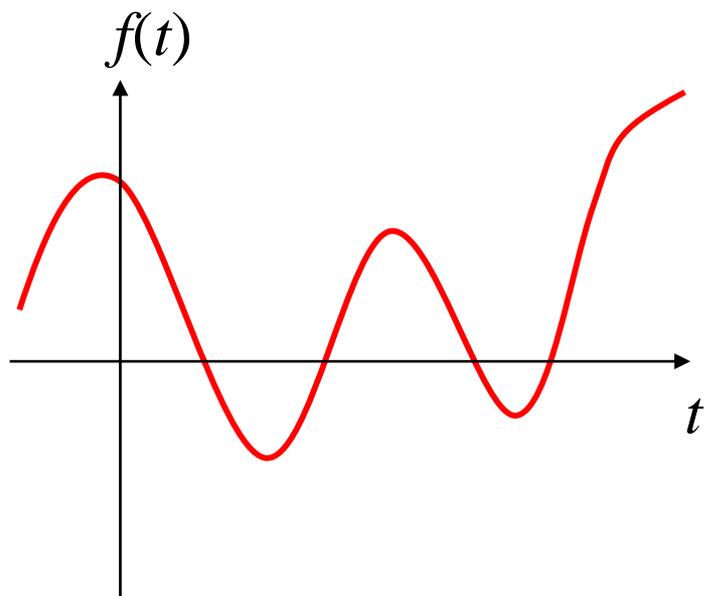


面積=1

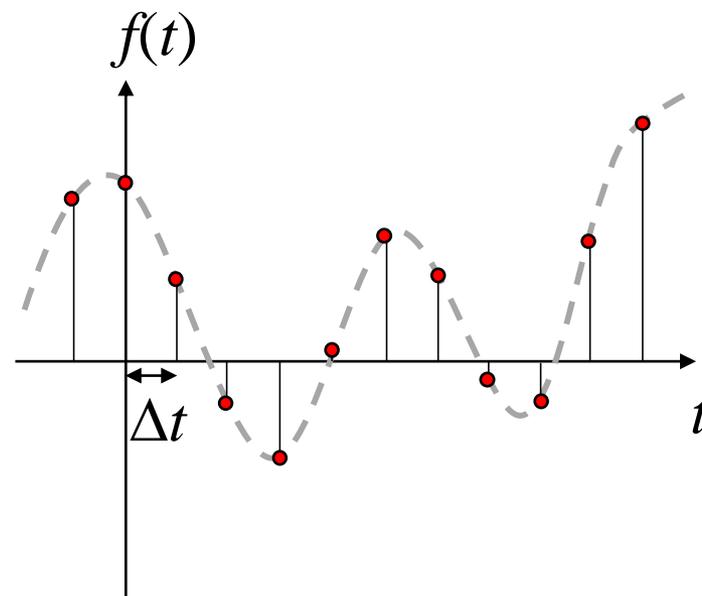


# 連続時間と離散時間

# 連続時間と離散時間



連続時間



離散時間

# 複素フーリエ級数 ～フーリエ変換との対応～

- 周期関数
- 複素フーリエ級数 (cos, sinの和で表したフーリエ級数をオイラーの公式を使ってexp関数にまとめたもの)

# フーリエ変換と複素フーリエ級数

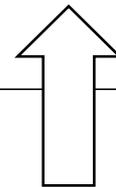
フーリエ変換  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

逆フーリエ変換  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

フーリエ変換：フーリエ級数の周期 $T_0$ を無限にしたもの

$f(t)$ : 非周期関数

$f(t)$ : 周期 $T_0$ の周期関数



$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi / T_0 = \Delta\omega \rightarrow d\omega \\ n\omega_0 &\rightarrow \omega \end{aligned}$$

複素フーリエ係数  $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$

時間波形 (周期)  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$

# 複素フーリエ級数

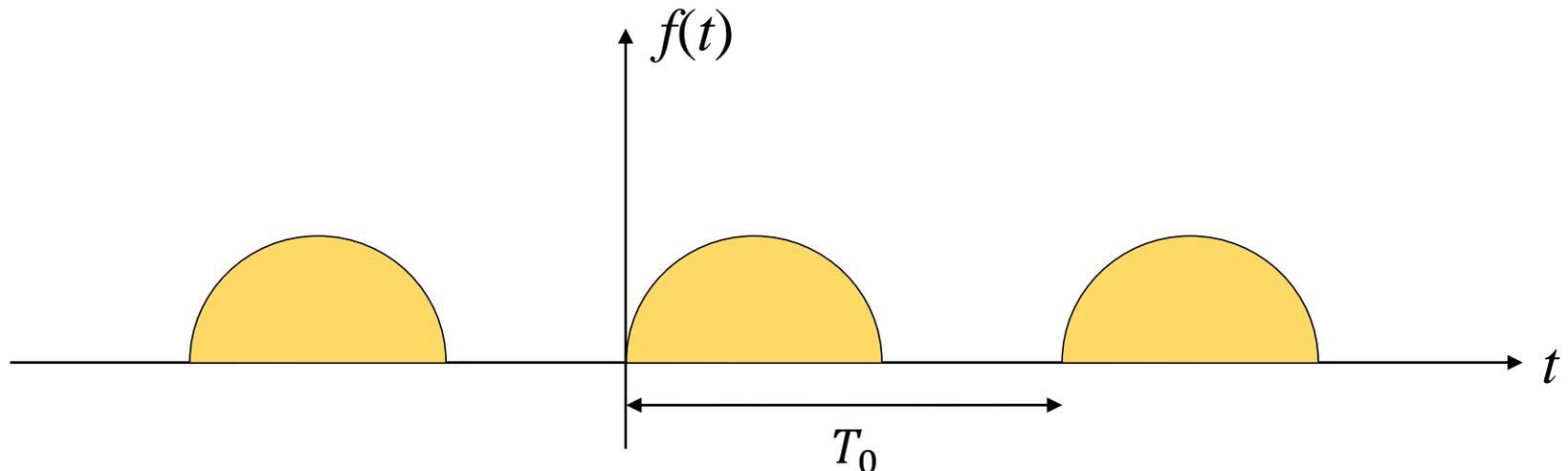
複素フーリエ係数

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

時間波形 (周期)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$



最短周期

# 複素フーリエ級数とフーリエ変換

$f(t)$ : 周期 $T_0$ の周期関数

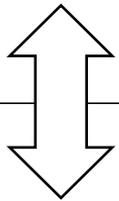
複素フーリエ係数

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

時間波形 (周期)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$



フーリエ係数

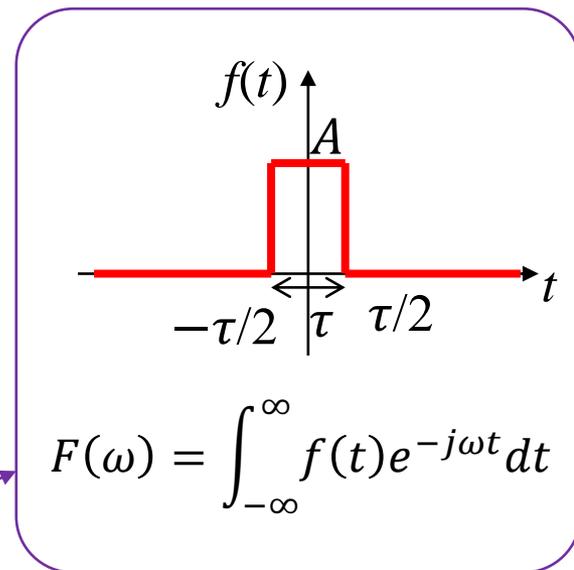
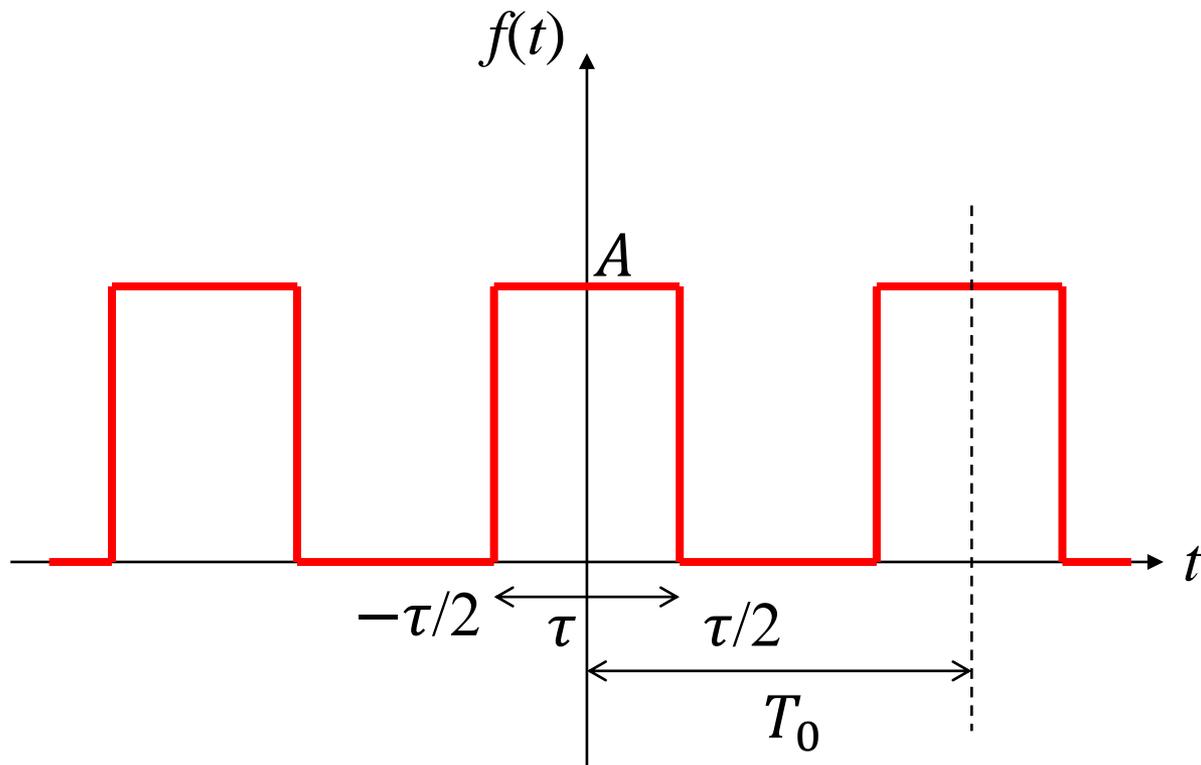
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

時間波形 (周期)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

# 矩形パルス列 (矩形波)

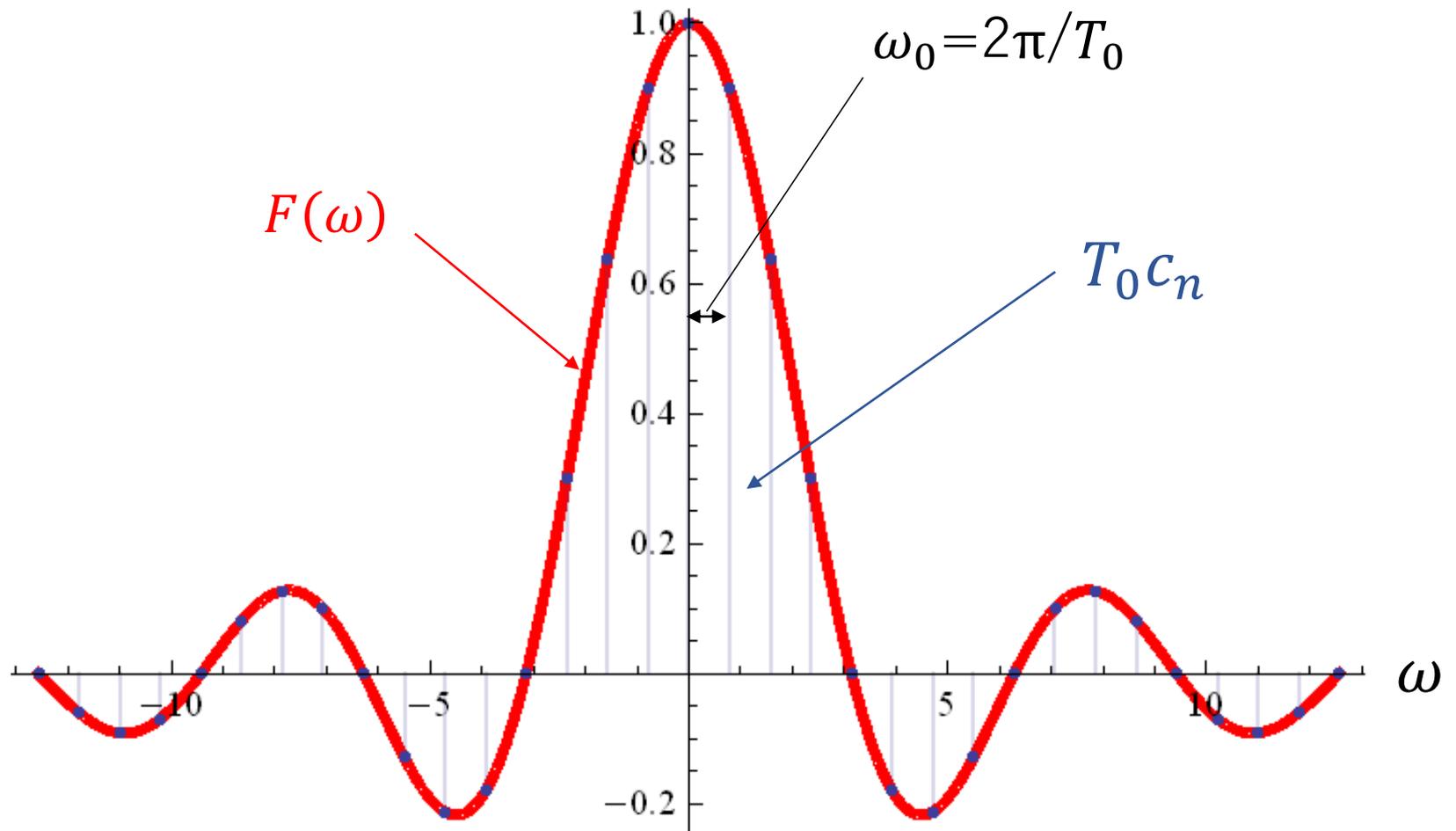


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

フーリエ変換と同じ

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} A \tau \operatorname{sinc}(n\omega_0 \tau / 2) \end{aligned}$$

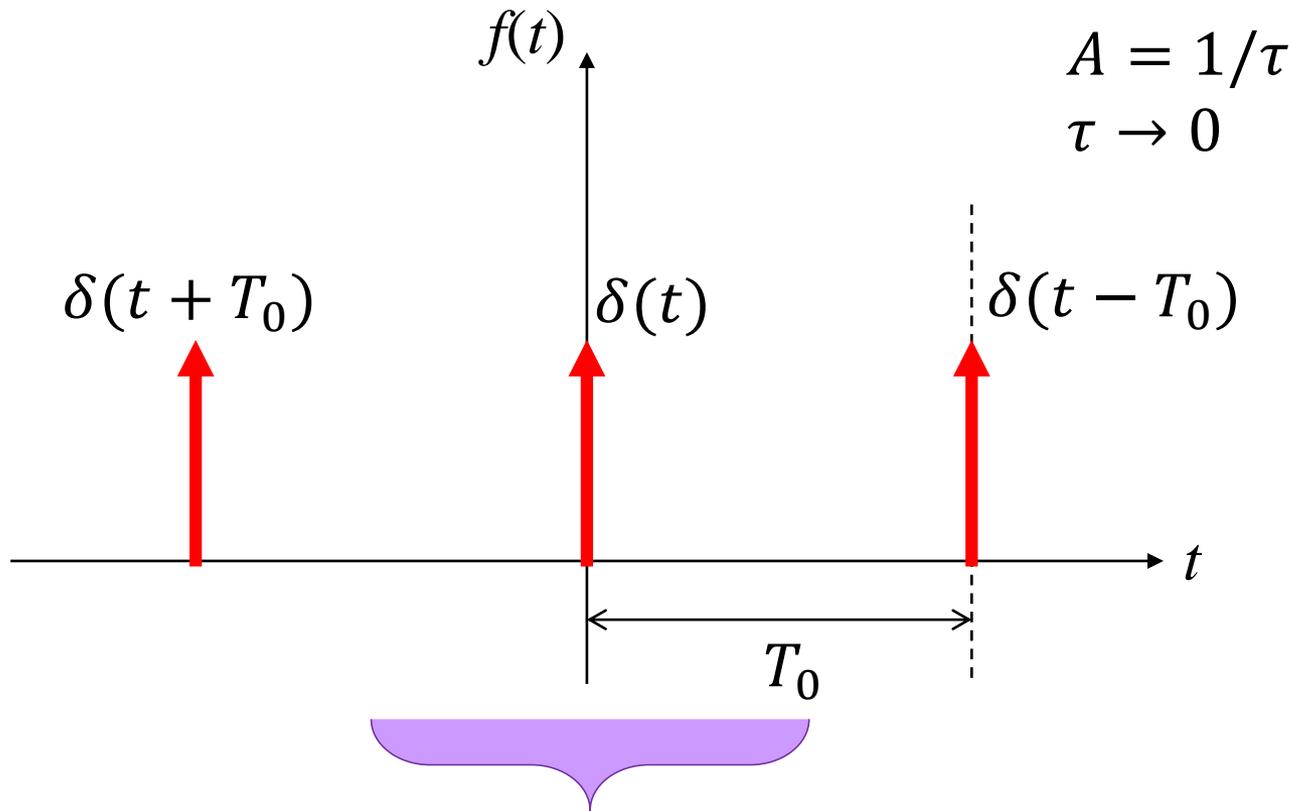
# 矩形パルス列のスペクトル



周期関数ではスペクトルは離散化される。

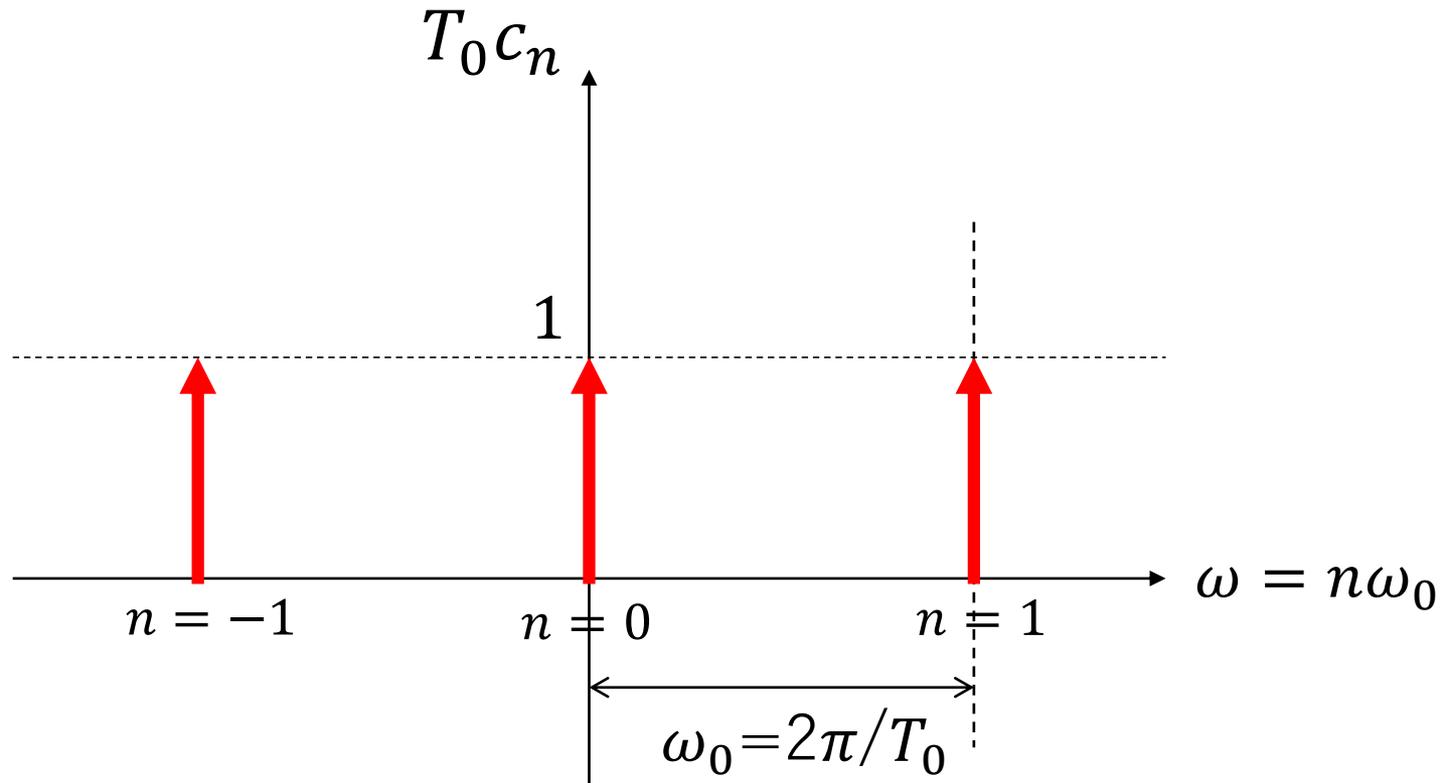
# デルタ関数列の複素フーリエ級数

# デルタ関数列



$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

# デルタ関数列のスペクトル



デルタ関数列のフーリエ変換（周期関数だからフーリエ級数）はまたデルタ関数列である。

# 標本化定理

- 標本化定理
- サンプリング定理
- 波形を再現するための離散サンプリング間隔

# 標本化定理

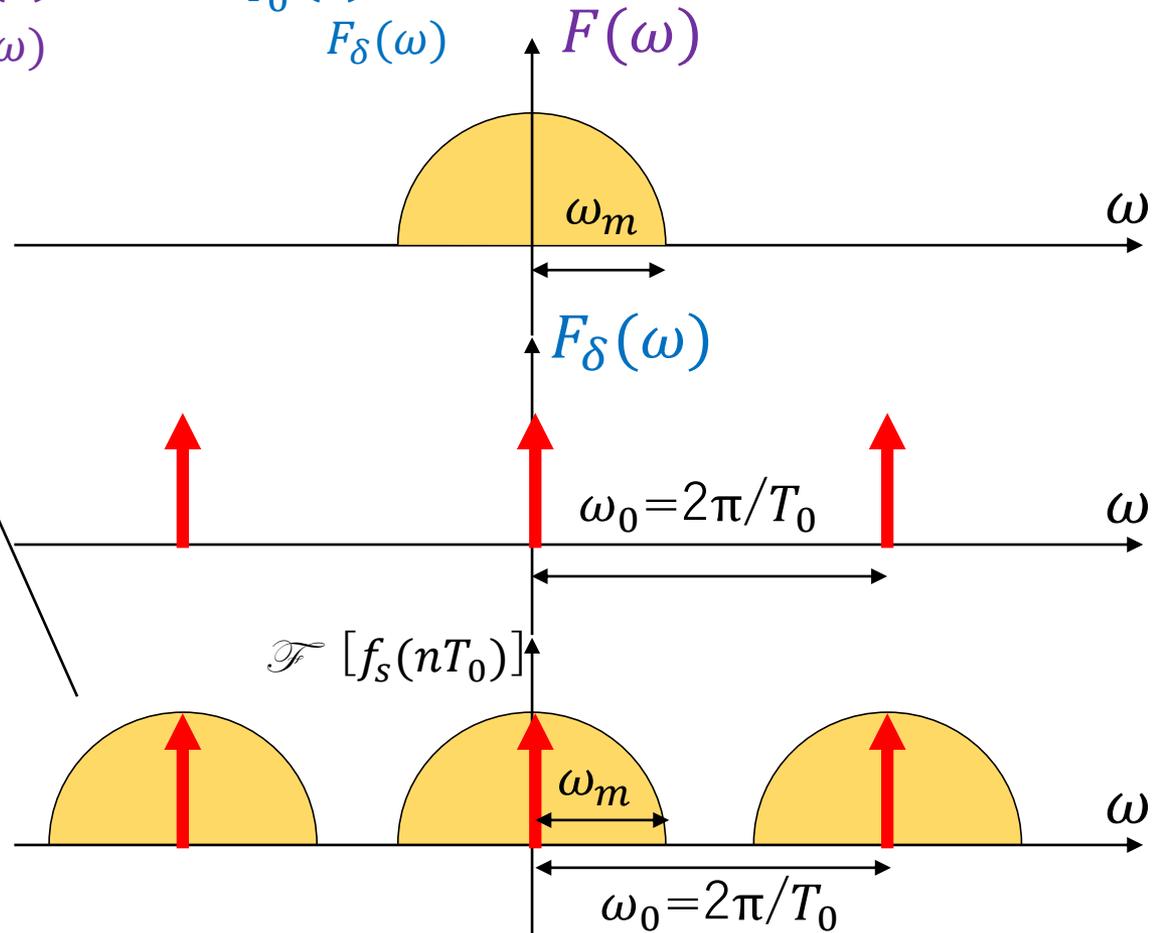
$$f_s(nT_0) = f(t)\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_0)\delta((n-k)T_0)$$

畳み込み

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_s(nT_0)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[\delta_{T_0}(t)]$$

$F(\omega)$                        $F_\delta(\omega)$



$$\omega_0 > 2\omega_m$$

信号に含まれる最高周波数成分の2倍の周波数（に対応する周期）でサンプリングしないと元の波形が再現できない。

# 離散フーリエ変換(DFT)

- 周期関数 (→線スペクトル)
- 離散時間

# フーリエ変換と複素フーリエ級数

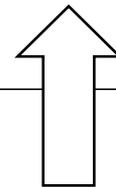
フーリエ変換  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

逆フーリエ変換  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

フーリエ変換：フーリエ級数の周期 $T_0$ を無限にしたもの

$f(t)$ : 非周期関数

$f(t)$ : 周期 $T_0$ の周期関数



$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi / T_0 = \Delta\omega \rightarrow d\omega \\ n\omega_0 &\rightarrow \omega \end{aligned}$$

複素フーリエ係数  $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$

時間波形 (周期)  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$

# 離散フーリエ変換(DFT) (定義1)

離散フーリエ変換  
DFT (Discrete Fourier Transform)

$$c_n = \frac{1}{T_0} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-jn \frac{2\pi}{T_0} \left(\frac{m}{N}\right) T_0} \frac{T_0}{N}$$

$\omega_0$     $t$     $dt$

区分求積 (短冊和)

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j \frac{2\pi}{N} mn}$$

( $n = 0, \dots, N - 1$ )

逆離散フーリエ変換  
IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

$$f_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{j \frac{2\pi}{N} mn}$$

( $m = 0, \dots, N - 1$ )

ただし、 $f_m = f\left(\frac{m}{N} T_0\right)$

# 離散フーリエ変換(DFT)(定義2)

規格化係数をDFT, IDFTに等分配する定義

離散フーリエ変換  
DFT (Discrete Fourier Transform)

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{+j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$(n = 0, \dots, N - 1)$

逆離散フーリエ変換  
IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$(m = 0, \dots, N - 1)$

*Mathematica*の定義

ただし、 $f_m = f\left(\frac{m}{N}T_0\right)$

# 離散フーリエ変換(DFT)(定義3)

規格化係数をIDFTに割り当てる定義

離散フーリエ変換  
DFT (Discrete Fourier Transform)

$$c_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$(n = 0, \dots, N - 1)$

逆離散フーリエ変換  
IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$$

$(m = 0, \dots, N - 1)$

**MATLABの定義**

ただし、 $f_m = f\left(\frac{m}{N}T_0\right)$

# 離散フーリエ変換(DFT)(定義3)

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

離散フーリエ変換  
DFT (Discrete Fourier Transform)

$$c_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m W^{mn} \quad (n = 0, \dots, N - 1)$$

逆離散フーリエ変換  
IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_n W^{-mn} \quad (m = 0, \dots, N - 1)$$

**MATLABの定義**

ただし、 $f_m = f\left(\frac{m}{N}T_0\right)$

# 離散フーリエ変換(DFT)(定義3[行列形式])

## 離散フーリエ変換

DFT (Discrete Fourier Transform)

MATLABの定義

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (W^0)^1 & \dots & (W^0)^{N-1} \\ 1 & (W^1)^1 & \dots & (W^1)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (W^{N-1})^1 & \dots & (W^{N-1})^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

ヴァンデルモンド(Vandermonde)行列

## 逆離散フーリエ変換

IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & (W^0)^1 & \dots & (W^0)^{N-1} \\ 1 & (W^{-1})^1 & \dots & (W^{-1})^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (W^{-(N-1)})^1 & \dots & (W^{-(N-1)})^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

ただし、 $f_m = f\left(\frac{m}{N}T_0\right)$

# DFTの計算例(1)

$$f_m = \frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}m(k-n)} \\ &= \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

# FFTの原理

# 高速フーリエ変換(FFT; Fast Fourier Transform)

3つ前のスライドの計算方法でDFTを行うと、演算回数は少なくとも $O(N^2)$ となる。

FFTはDFTの演算回数を $O(N \log_2 N)$ に減らすことができるアルゴリズムである。IFFT (Inverse FFT; 逆FFT)という用語もある。

FFTのアルゴリズムは2のべき乗のデータ数でないと適用できないが、必要ならば0を挿入すればよい。

# $N = 2^M$ 点のDFT

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$N = 2^M$$

← 2で割り切れるように

$$W^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & (W^0)^1 & \dots & (W^0)^{N-1} \\ 1 & (W^1)^1 & \dots & (W^1)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (W^{N-1})^1 & \dots & (W^{N-1})^{N-1} \end{bmatrix}}_{N/2} \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}}_{N/2}$$

これをうまい具合に並べ替え、問題を縮小する( $2^M$ のDFTを $2^{M-1}$ のDFTに)ことを繰り返す。

# FFT (4点FFTでの説明)

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$W^{N/2} = W^2 = e^{-j\pi} = -1$$

$$W^N = W^4 = e^{-j2\pi} = 1$$

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & -1 & -W \\ 1 & W^2 & 1 & W^2 \\ 1 & W^3 & -1 & -W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

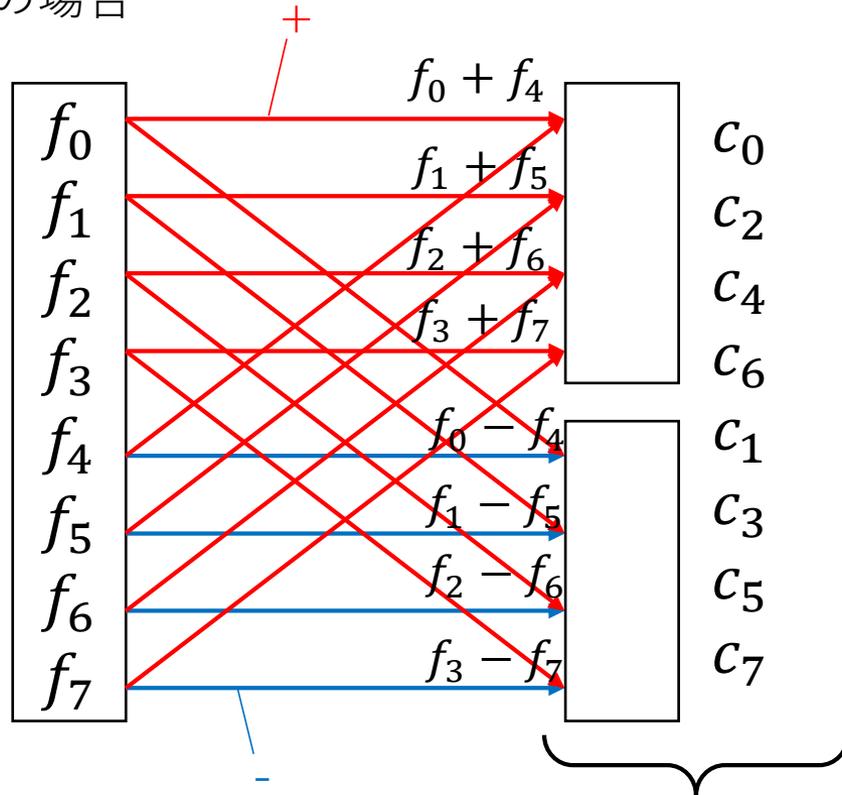
$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1 & 1} & A & \boxed{1 & A} & 1 \\ \boxed{1 & W^2} & & \boxed{1 & W^2} & \\ \boxed{1 & W} & & \boxed{-1 & -W} & \\ \boxed{1 & W^3} & & \boxed{-1 & -W^3} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$B \qquad -B$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

# FFT

8点FFTの場合



2つの4点FFTを行い、4つの2点  
FFTに帰着できる。

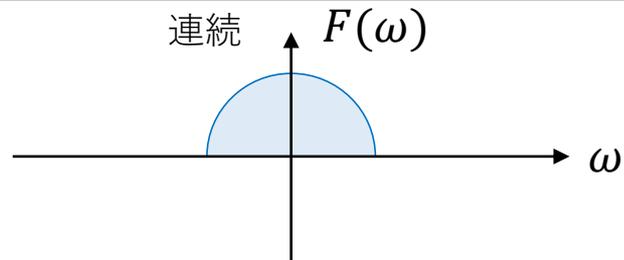
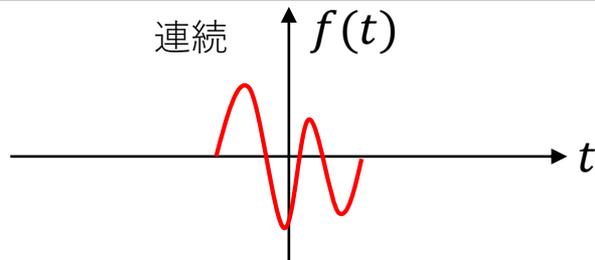
$N = 2^M$ 点FFTの場合、段数は  $\log_2 N = M$ 段となる。

⇒演算数は  $O(N \log_2 N)$ となる！

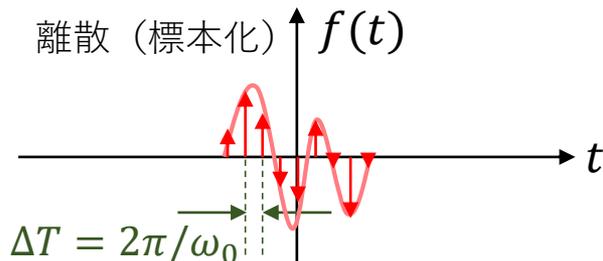
# 時間／周波数領域の離散化のまとめ

# 連続と離散

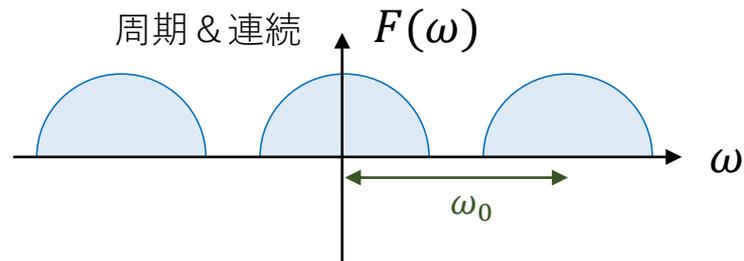
フーリエ変換



離散 (標本化)

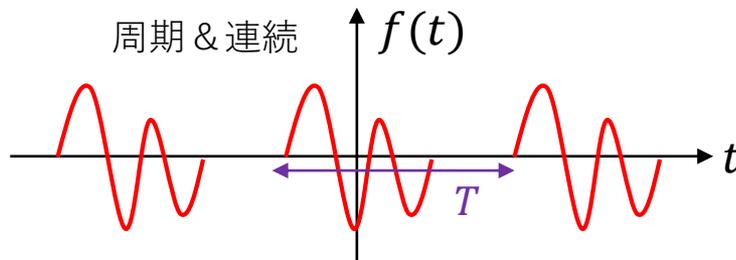


周期 & 連続

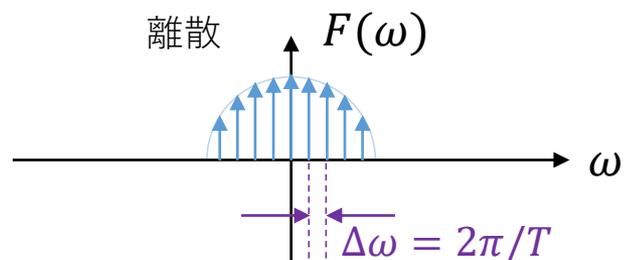


複素フーリエ  
級数

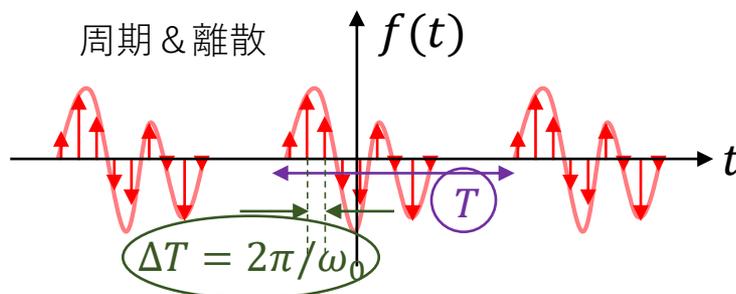
周期 & 連続



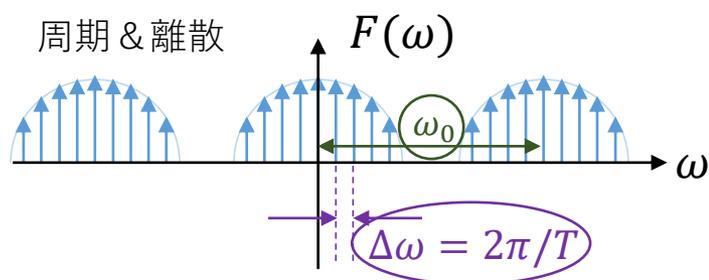
離散



周期 & 離散



周期 & 離散



離散フーリエ  
変換 (DFT)

FFTが使える

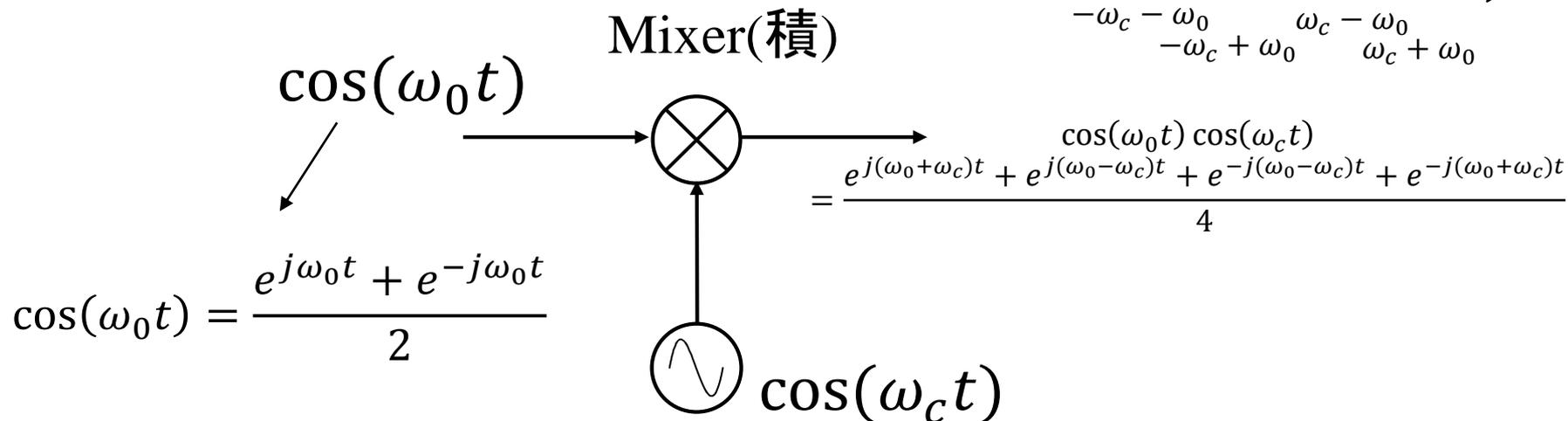
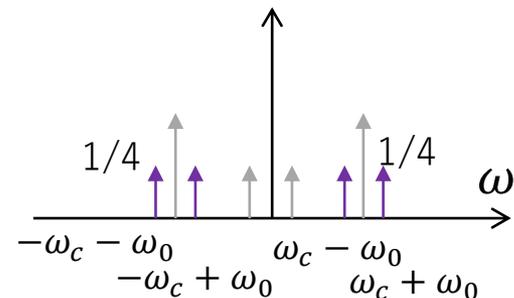
# 無線信号処理への フーリエ変換の応用

# ミキサ

## 周波数変換

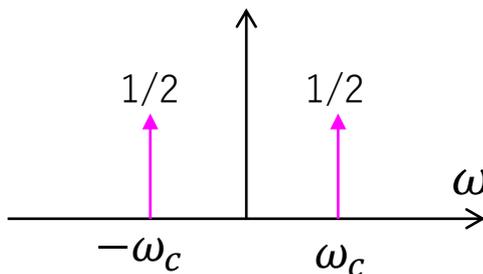
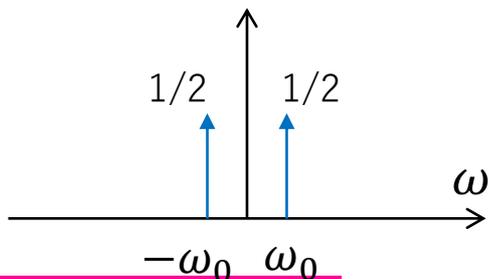
(アップコンバート、ダウンコンバート)

オイラーの公式:  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$



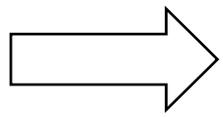
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$



# フィルタ

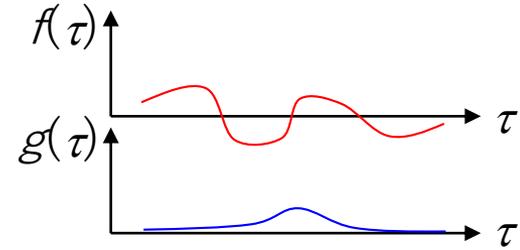
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(f * g)(t)] &= \mathcal{F}\left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right] && \text{畳み込み} \\ &= F(\omega)G(\omega)\end{aligned}$$



周波数領域で処理するときは各周波数の値の掛け算、それを時間領域で処理するときは畳み込み。

# 高速畳み込み(FFT Convolution)

$$(f * g)(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

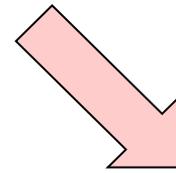


定義どおりに計算



各  $t$  ごとに  $\tau$  で積分する。  
 $O(N^2)$

高速畳み込み



$$\mathcal{F}[(f * g)(t)] = F(\omega)G(\omega)$$

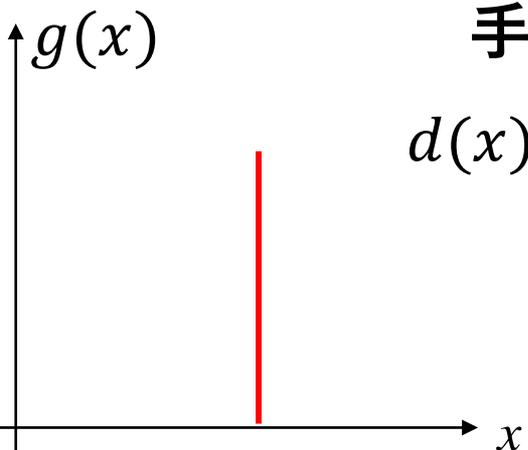
FFTでは全周波数特性が  
 $O(N \log_{10} N)$ の計算時間で求まる

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)] = (f * g)(t)$$

FFTを3回行う。  $O(3N \log_{10} N)$

# ウィーナフィルタ

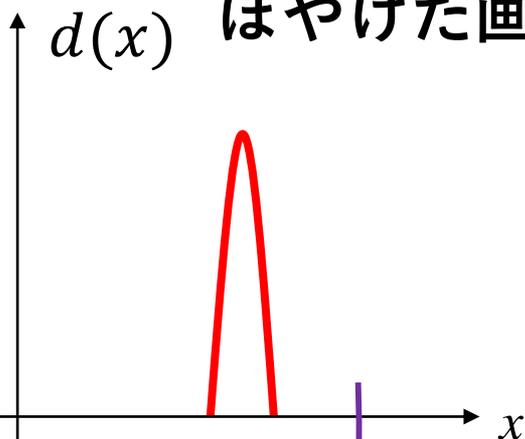
元画像



手ぶれ

$$d(x) = (g * h)(x)$$

ぼやけた画像

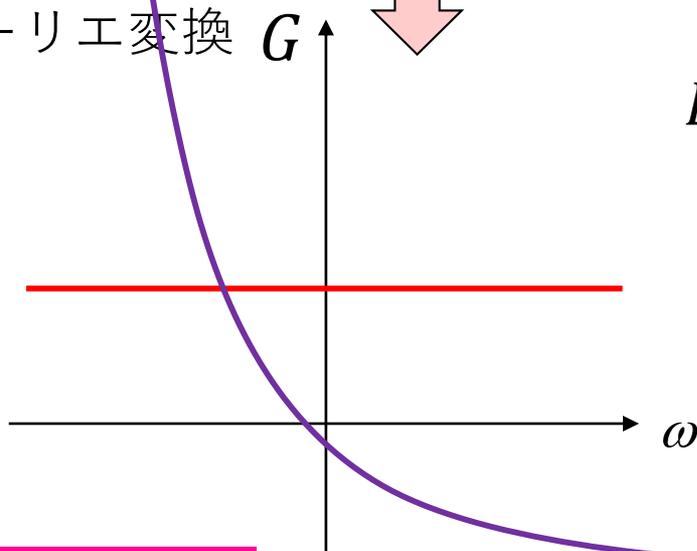


伝達関数

$$H = D/G$$

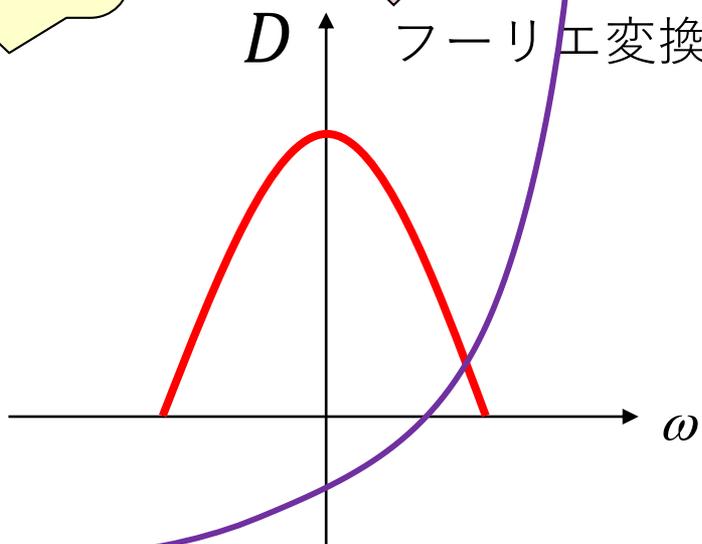
フーリエ変換

$G$



$D$

フーリエ変換



$$D = GH$$

$$G = \frac{D}{H}$$