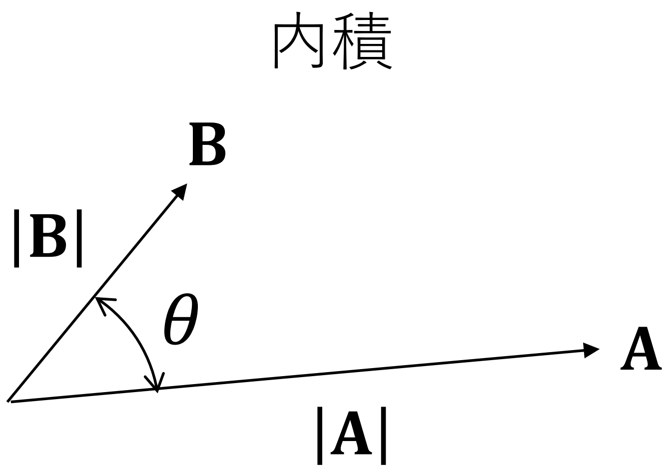
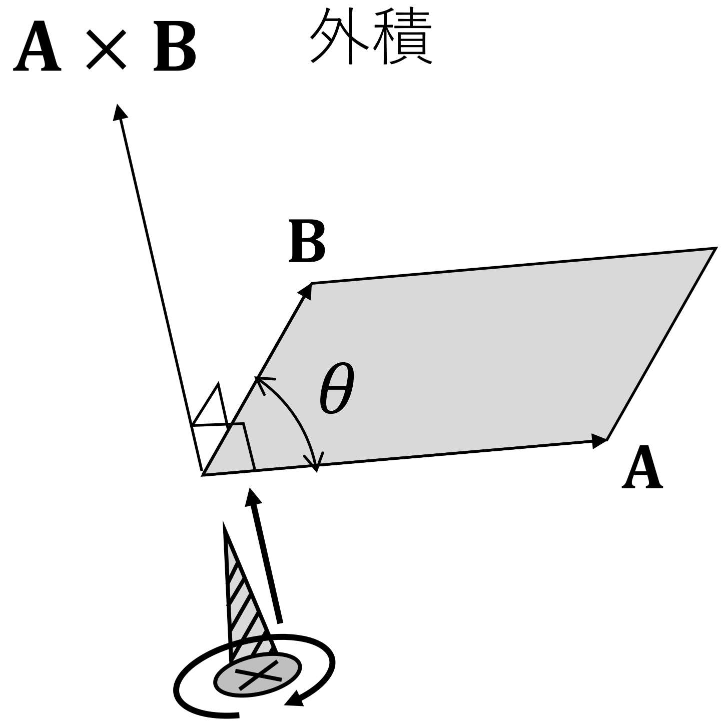
内積と外積



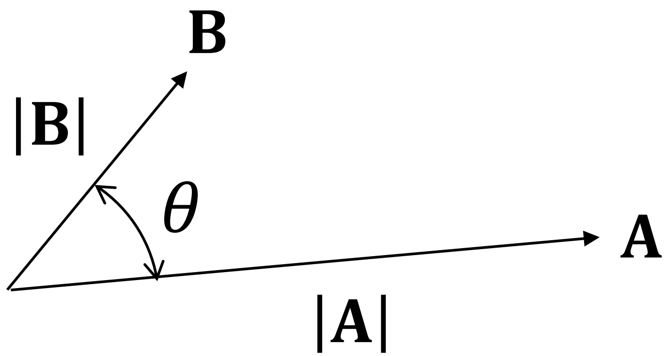


平野拓一

内積

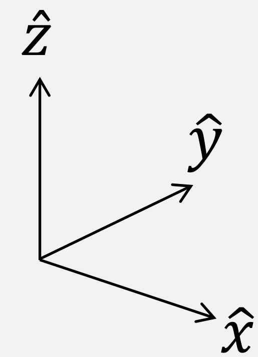
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$

inner product, dot product



$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\\
&= \left(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z\right)\cdot\left(\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z\right)\\
&= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z
\end{aligned}$$

単位ベクトルの内積



$$\begin{cases} \hat{x}\cdot\hat{x} = 1 \\ \hat{y}\cdot\hat{y} = 1 \\ \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{x}\cdot\hat{y} = 0 \\ \hat{y}\cdot\hat{z} = 0 \\ \hat{z}\cdot\hat{x} = 0 \end{cases}$$

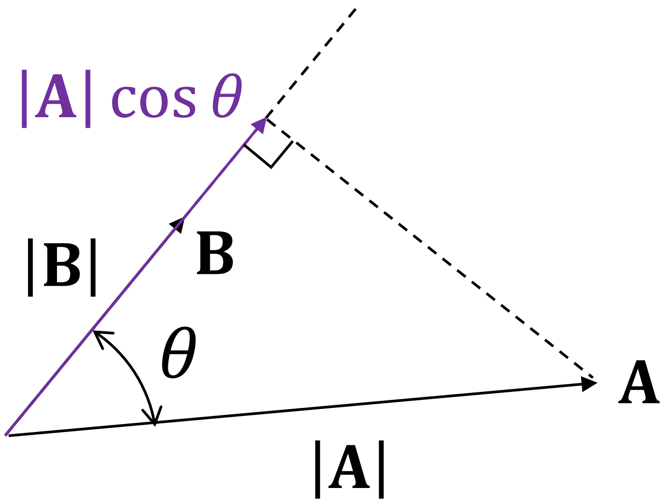
【参考】ベクトルを列ベクトル表現した場合
（行列の積として）

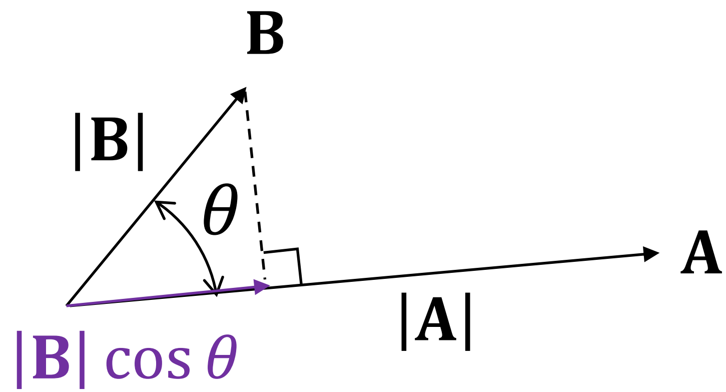
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}^t\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

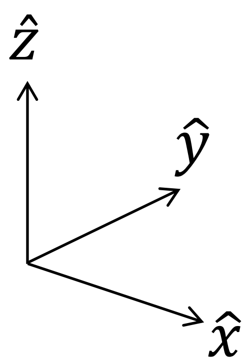
内積の意味（射影）

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$





（例）



$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\cdot\hat{x}\\&= \left(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z\right)\cdot\hat{x}\\&= A_x\end{aligned}$$

内積の計算例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ &= 4 + 10 + 18 = 32 \end{aligned}$$

Mathematica

```
In[1]:= a : {1, 2, 3} ;
        b : {4, 5, 6} ;

In[3]:= a.b

Out[3]= 32

In[4]:= Dot[a, b]

Out[4]= 32
```

MATLAB

```
% ;で行列の行を区切る、カンマ(,)かスペースで行内の要素を区切る。
%つまり、次は列ベクトルを表現している。
a=[1; 2; 3];
b=[4; 5; 6];
% .'は転置、'はエルミート転置、*は行列としての積
a.'*b

Ans =
    32
```

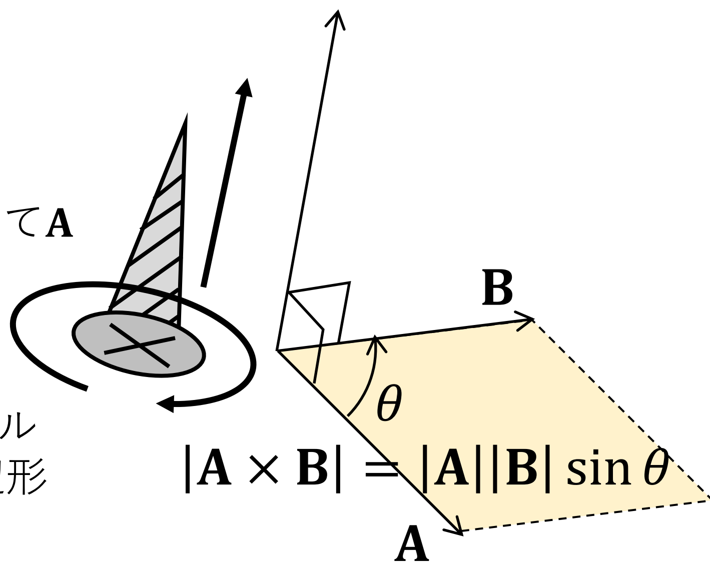
外積($\mathbf{A} \times \mathbf{B}$)

cross product, outer product, vector product

演算結果はベクトル $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

向き：（$\theta < 180°$として$\mathbf{A}$から$\mathbf{B}$に回して）ネジが閉まる方向（右に回すとしまる）

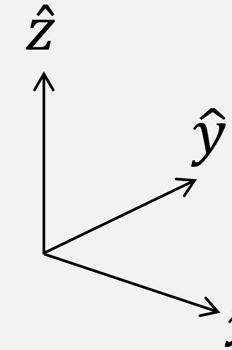
大きさ：$\mathbf{A}, \mathbf{B}$のベクトルで形成される平行四辺形の面積

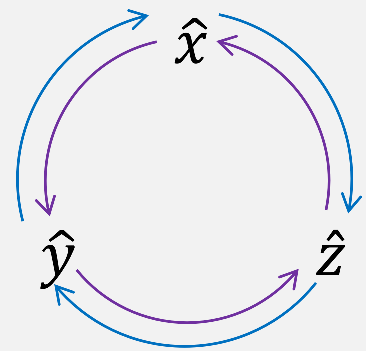


$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$
$$= \left(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z\right) \times \left(\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z\right)$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{x}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) - \hat{y}\left(A_xB_z - A_zB_x\right) + \hat{z}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

単位ベクトルの外積





$$\begin{cases} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \\ \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} \\ \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x} \times \hat{x} = 0 \\ \hat{y} \times \hat{y} = 0 \\ \hat{z} \times \hat{z} = 0 \end{cases}$$

外積の計算例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \hat{y}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \hat{z}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)$$

$$= \hat{x}(-3) - \hat{y}(-6) + \hat{z}(-3) = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Mathematica

```
In[1]:= a : { 1, 2, 3} ;
        b : { 4, 5, 6} ;

In[3]:= Cross[ a, b]

Out[3]= { · 3, 6, · 3}
```

MATLAB

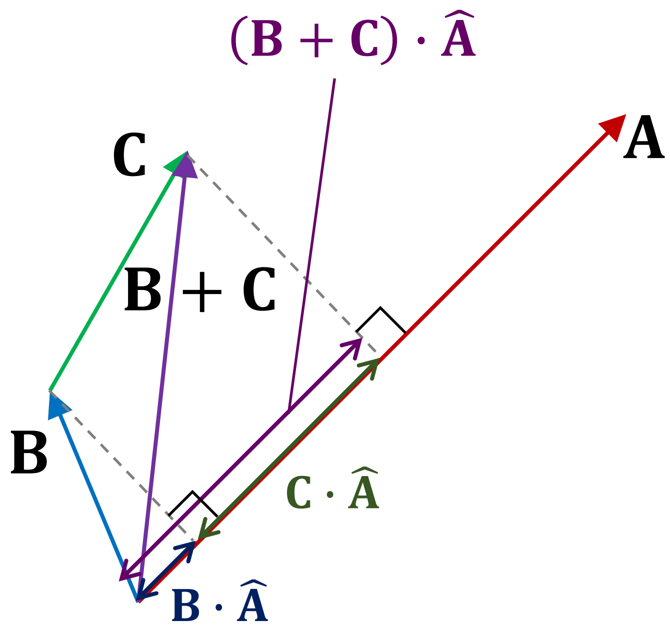
```
a=[1; 2; 3];
b=[4; 5; 6];
cross(a, b)
```

```
ans =

  -3
   6
  -3
```

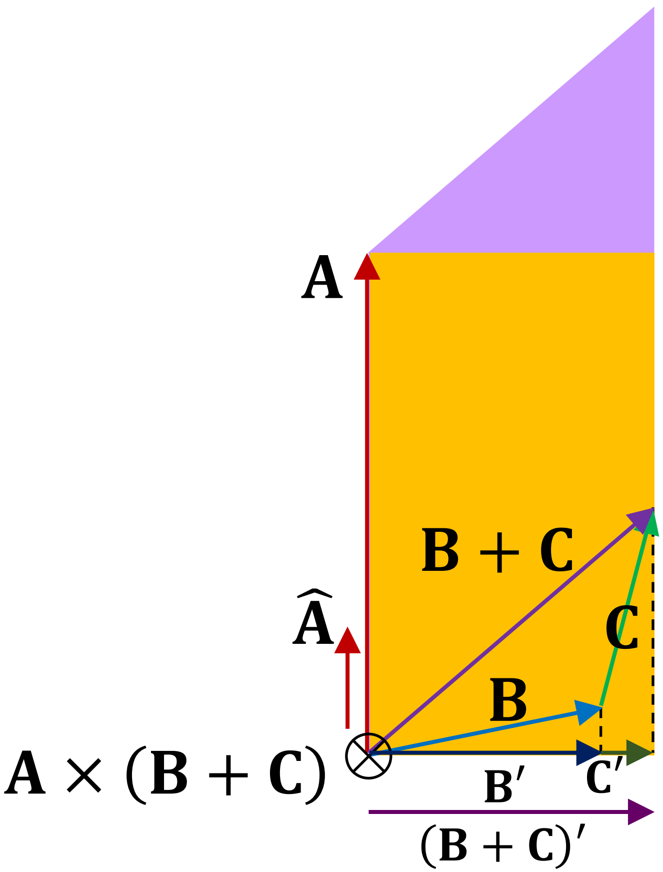
【参考】内積の分配法則

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$



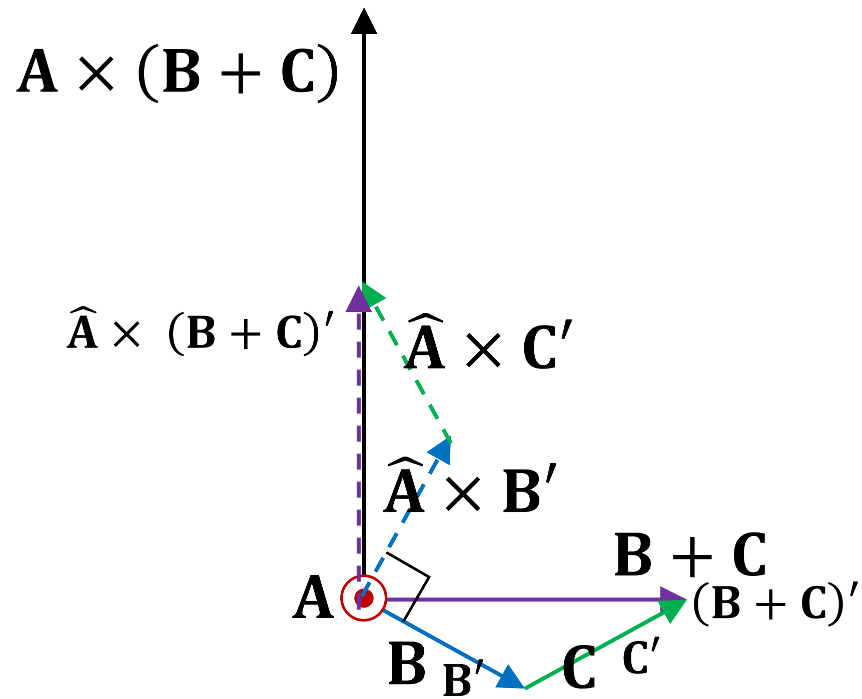
【参考】外積の分配法則

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$$



A, B + Cを含む面内

$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})'$
$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}'$
$\mathbf{A}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}'$



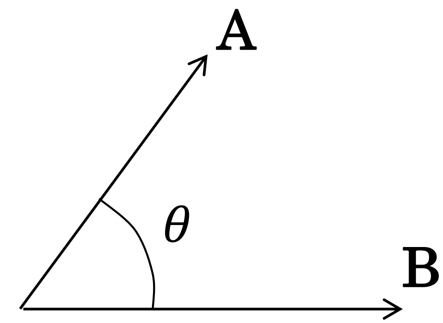
A方向から見下ろした面内

内積・外積の法則・公式

内積

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ （交換法則）

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ （分配法則）



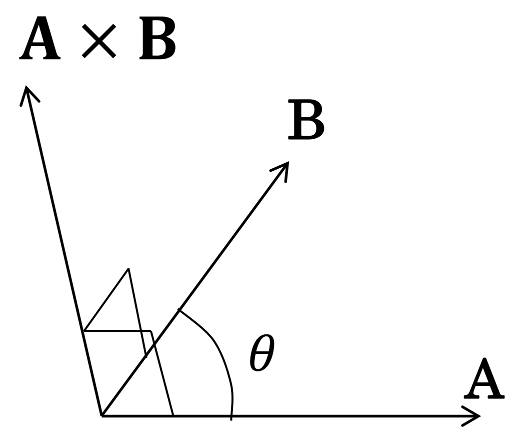
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$

外積

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ ~~（交換法則）~~

$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ （分配法則）

$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\neq(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ ~~（結合法則）~~



$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

内積と外積

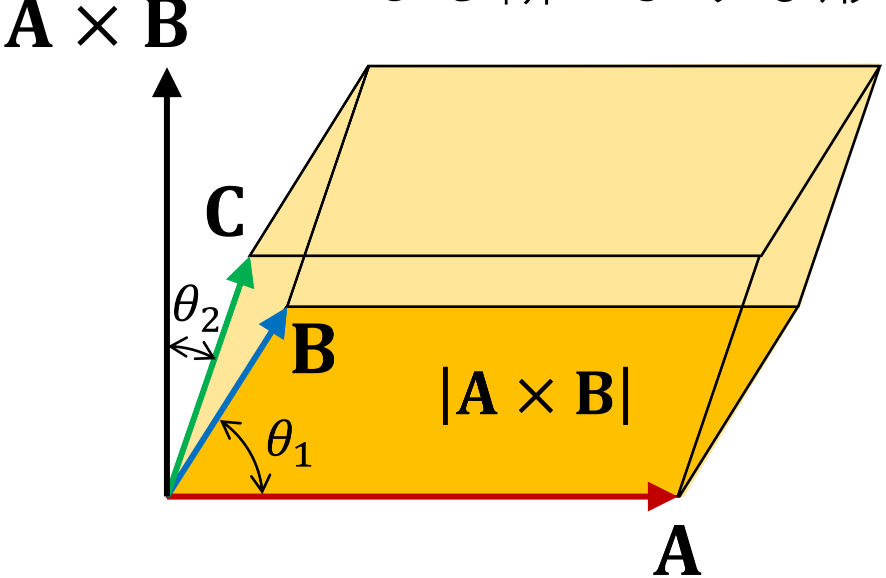
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\left(\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}&=-\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\\&=-(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}+(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}\end{aligned}\right)$$

平行四辺形を斜めに押し出した形状の体積

ひし餅のような形



Volume

$$= \underline{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta_1}\ |\mathbf{C}|\cos\theta_2$$

$$= |\mathbf{A}\times\mathbf{B}||\mathbf{C}|\cos\theta_2$$

$$= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{C} = \hat{x}C_x + \hat{y}C_y + \hat{z}C_z$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{C}$$

$$= \left(\hat{x}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{y}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \right) \cdot \mathbf{C}$$

$$= \left(C_x\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - C_y\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + C_z\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

重積分の変数変換のヤコビアンも、変数変換に伴う面積・体積の変化率と考えることができる。