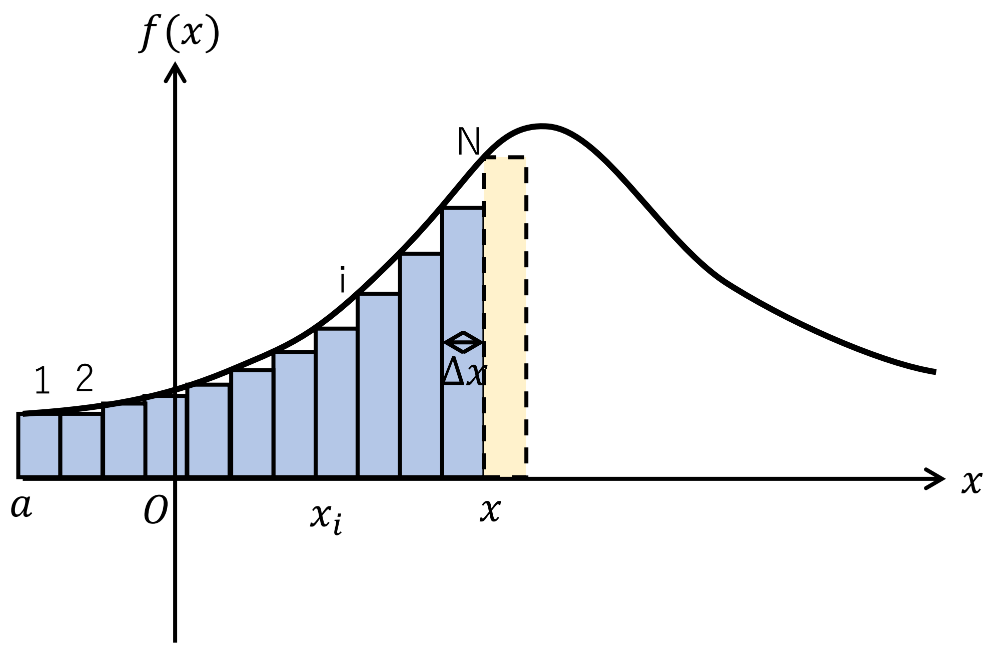
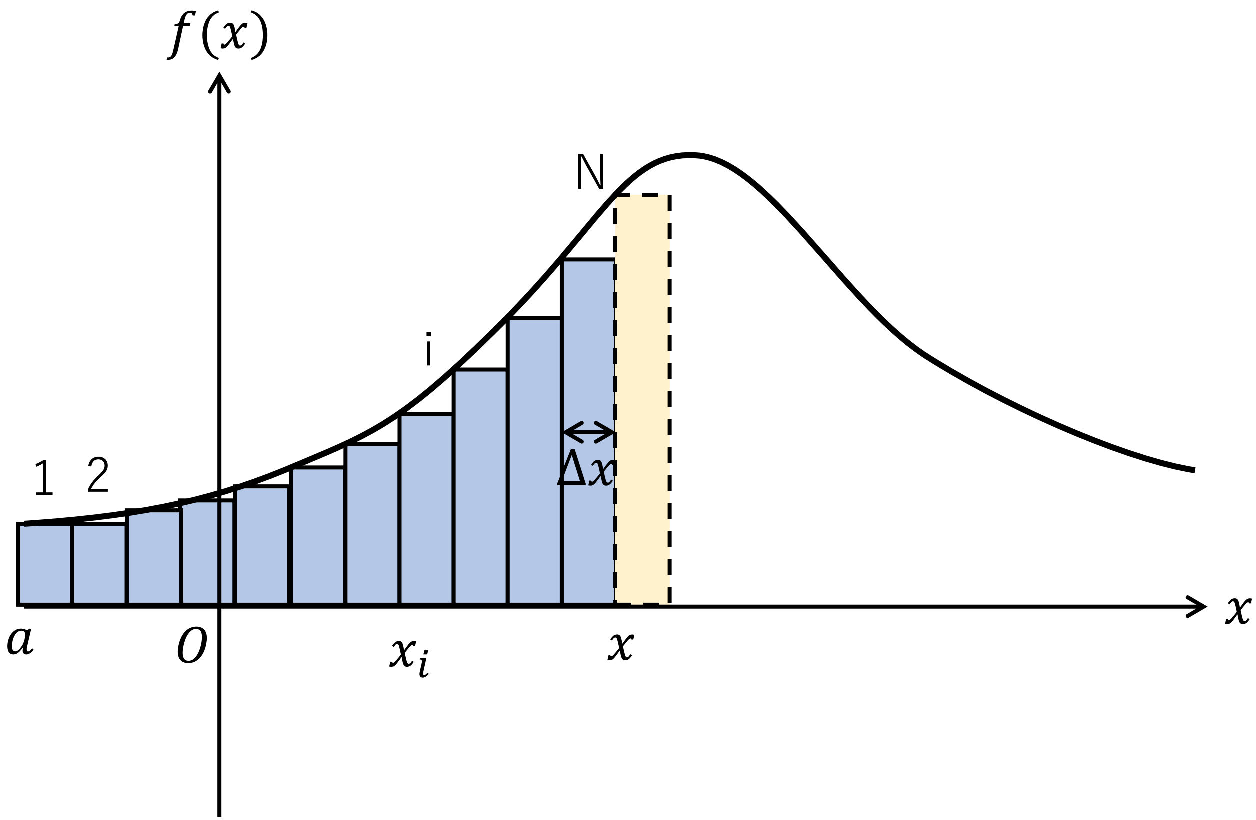
積分と面積の関係

定積分、リーマン積分と区分求積



平野拓一

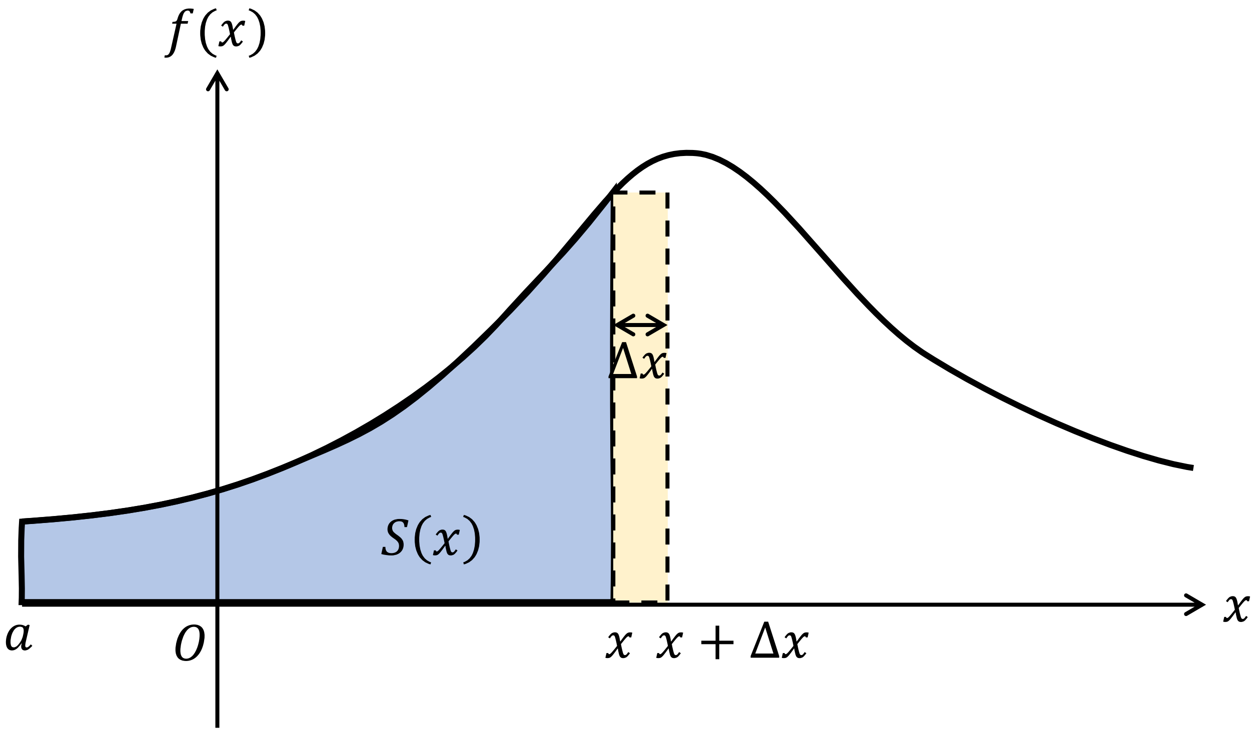
区分求積



細い短冊（長方形）の面積の和

$$S(x) \cong \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{x-a}{N}, x_i = a + \Delta x(i-1)\right)$$

面積の増加率=関数値（関数の積分は面積）



曲線の丸みを考慮するにはΔx
の高次の項を入れればよい。
→結局寄与しない

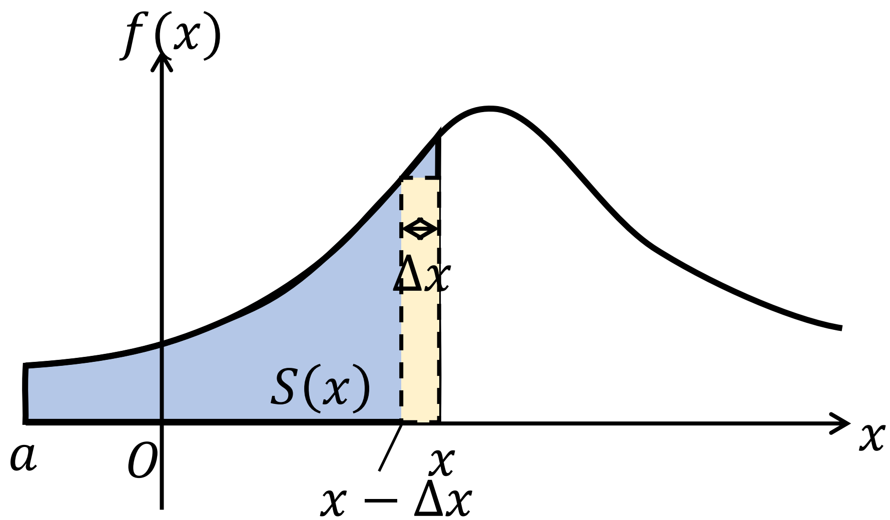
$S(x)$: x軸と$f(x)$で囲まれた部分の$x=(a,x)$の面積。
（始まりはaは積分の下端、開始場所で、任意に定義できる）

$$S(x+\Delta x) \cong S(x) + f(x)\Delta x$$

$$f(x) \cong \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} S'(x) \to S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

積分表現→区分求積

「面積は関数の積分である」ことの導出で出てきた式



$$S(x) \cong \boxed{S(x-\Delta x)} + f(x-\Delta x)\Delta x$$

$$\boxed{S(x-\Delta x)} = \boxed{S(x-2\Delta x)} + f(x-2\Delta x)\Delta x$$

$$\boxed{S(x-2\Delta x)} = S(x-3\Delta x) + f(x-3\Delta x)\Delta x$$

$$\vdots$$

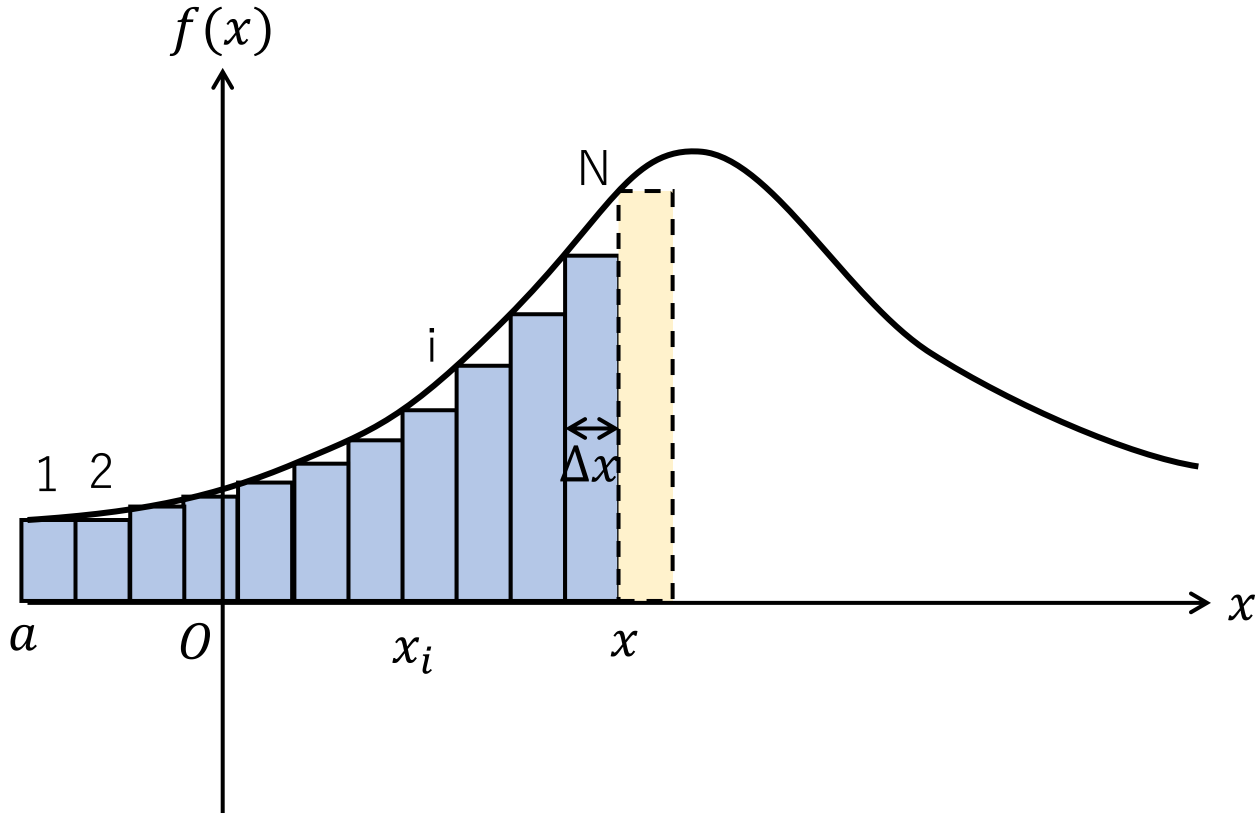
$$S(x-(N-1)\Delta x) = S(\underbrace{x-N\Delta x}_{a}) + f(a)\Delta x$$

$$S(a) = 0$$

$$S(x) \cong \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{x-a}{N}, x_i = a + \Delta x(i-1)\right)$$

区分求積と同じ表現が得られる。

積分を使いこなすためのイメージ



$$S(x) \cong \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x \quad \Rightarrow \quad S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

つまり、区分求積の$\Delta x \to 0$の極限が定積分であり、定積分は被積分関数の微小区間の和であるとイメージするとよい。($\sum \to \int$, $\Delta x \to dx$)

積分の種類

不定積分 $\int$

微分の逆演算

定積分 $\int_a^b$

微小な被積分関数（面積素、体積素など）の和

- リーマン積分
- ルベーグ積分