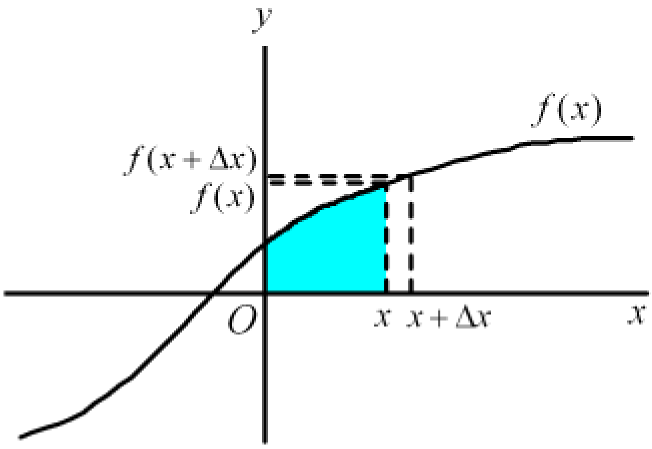
積分は一次の微小変化量のみ考慮すればよい

June 10, 2005

Takuichi Hirano

関数値の面積の微小変化としての解釈



(1) 細い長方形の和として面積を近似する場合

$S(x)$はx軸と曲線$f(x)$で囲まれた部分の 0 からxの範囲の面積を表すとする。

$$S(x+\Delta x)-S(x)=f(x)\Delta x \quad \text{(A)}$$

$$\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x)$$

上の方程式において$\Delta x\to 0$の極限を取る。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)$$

$$\frac{dS}{dx}=S'(x)=f(x)$$

微分の逆演算を次の記法にて積分と定義する。

$$S(x)=\int f(x)dx$$

すなわち、面積の増加率がその場所の関数の値となっている。

(2) (1)の長方形の高さは$f(x)$, $f(x+\Delta x)$の間の値ならどれでもよい

ところで、式(A)の右辺の短冊の高さは$[x,x+\Delta x]$ の区間$\xi=x+\delta$ $(0\le\delta\le\Delta x)$に選べば結果は同じになる。

$$S(x+\Delta x)-S(x)=f(x+\delta)\Delta x$$

$\Delta x \to 0$の極限をとると、必然的に$\delta \to 0$となるからである。

［リーマン積分］$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} f(\xi_i)\Delta x_i$

右辺が一定値に収束するとき、リーマン積分可能であると言う。

(3)

式(A)の右辺を、高さΔxの台形の面積としても結果は同じになる。

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \frac{\Delta x(f(x) + f(x+\Delta x))}{2}$$

(4)

(3)をより一般化して、式(A)の右辺に$O(\Delta x^2)$がある場合((3)の台形よりも精度よく表現した場合に対応)。この場合は、面積Sの変化量をテイラー展開して評価し、正確に$O(\Delta x^2)$ の項を含めると正確に表現できると考えてもよい。

$$S(x+\Delta x) - S(x) = f(x+\delta)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x+\delta) + \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$の極限を取ると$\frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} \to 0$なので結果は(1)と同じ。

以上の議論より、積分するときの微小変化量は積分変数の 1 次の変化量のみを考慮すればよい。