T. Hiano

ベクトル・ベクトル微分演算子の記法に関する注意

○ ベクトルは太字(bold face)または上に矢印をつけてスカラーとしっかり区別すること($\mathbf{A}, \vec{A}$)。単位ベクトルは座標の文字の上にハットをつけると便利で使いやすい($\hat{x}, \hat{n}$など。$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{n}}$と太字にしても紛らわしくないからかまわない)。

○ 演算子の意味を理解し、はっきり書く。

内積・や外積×をはっきり書く。

ベクトル微分演算子∇(ナブラ)は・や×を併用して３つの意味を持つ。

$\nabla\phi$	Gradient (勾配), スカラー関数→ベクトル関数
$\nabla\cdot\mathbf{A}$	Divergence (発散), ベクトル関数→スカラー関数
$\nabla\times\mathbf{A}$	Curl, Rotation (回転), ベクトル関数→ベクトル関数

ベクトルの悪い記述例と解説

(1)

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \iint_S \left(\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) dS \qquad \boxed{\oint \mathbb{H} d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \left(\hat{\boldsymbol{\ell}} + \frac{d\mathbb{D}}{dt} \right) dS}$$

[解説] まず、左の線積分で経路が∫記号の右下に書かれていない。さらに、ベクトル$\mathbf{H}$とベクトル$d\mathbf{l}$を連ねて書いた$\mathbf{H}d\mathbf{l}$はいったい何なのか？（スカラーでもベクトルでもなく、ベクトル解析の意味が分かっていないと判断できる）右辺は数学（ベクトル解析）的には意味を成すが、アンペアの法則とは違う。とにかく、意味が全く分からない$\mathbf{H}d\mathbf{l}$が書かれていると、ベクトル解析さえ理解していないと大きく減点される。

(2)

$$\oint_C \mathbf{H} d\ell = \oiint_S (i + j\omega D) dS \qquad \boxed{\oint_C \mathbb{H} d\ell = \oiint_S (i + j\omega D) dS}$$

[解説] 左辺は数学（ベクトル解析）的には意味を成し、経路 C に沿った線積分の演算結果はベクトルとなる。右辺も数学（ベクトル解析）的には意味を成し、その演算結果はスカラーとなる。上の式はアンペアの法則を書こうとしたのはわかるが、$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$であるべき左辺が$\oint_C \mathbf{H} d\ell$となり、$\iint_S (\mathbf{i} + j\omega\mathbf{D})\cdot d\mathbf{S}$であるべき右辺が$\oiint_S (i + j\omega D) dS$となっている。スカラーとベクトルの違いは大きく、太字になっていなかったり、内積のドット(・)が無かったりというのは非常に大きな問題である。それだけで非常に大きな問題なのだが、さらに上の記法では左辺のベクトルと右辺のスカラーが等号で結ばれている。これは数学的（ベクトル解析）的にも全く意味を成さず、「ベクトル解析をまったく理解していない！」と判断される。最後に、$\iint_S$ と$\oiint_S$ の違いであるが、前者は開いた曲面を表し、後者は閉じた（境界が無い）曲面を表すことに注意する。また、$\int_C$ と$\oint_C$ も同様に開いた（両端がある）曲線と閉じた曲線（ループ）での積分を表すことに注意する。つまり、経路さえ指定すれば∫に○を付けて$\oint_C$ や$\oiint_S$ とする必要はなく、冗長なのだが、分かりやすいようにしているのである。従って、この間違いは減点対象ではないが、しっかり意味を理解してほしい。

(3)

$$\iint_S \nabla \mathbf{H} d\mathbf{S} = \iint_S i + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot dS$$

$$\boxed{\iint_S \nabla \mathbb{H} dS = \iint_S i + \frac{d\mathbb{D}}{dt} \cdot dS}$$

[解説] さて、まず左辺だが、ベクトル $\mathbf{H}$ に ∇ を付けた $\nabla\mathbf{H}$ は一体何なのだろうか！？∇ は Gradient(grad)の記号だが、grad はスカラー関数に対して定義される演算子(operator)であり、その演算結果はベクトル関数となる。$\nabla\mathbf{H}$ なんていう演算は数学（ベクトル解析）では全く定義されておらず、ベクトル解析が分かっていないと判断される。本当は $\iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ を書きたかったのはわかるが、上のような記法をしている人は意味さえ理解していないことがはっきりとわかる。今度は右辺だが、正しくは $\iint_S \left(\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{S}$ としたかったのだろう。まず、明らかにまず括弧()が必要である。また、ドット(・)は内積を意味しそうに思えるが、スカラーの dS との内積なので、単なる掛算の記号となる。それ以前に被積分関数がいくつかの加減算になっている場合、被積分関数全体を括弧()でくくっておくのがルールである。上の表現はあまりに変でこれ以上議論することができない。上の表記では 0 点になるのは当然だが、さらに採点者はベクトル解析の基本さえわかっていないと（気持ち的には）マイナス点を付けたくなるものである。

(4)

$$\nabla \times \mathbf{i} + j\omega\rho = 0$$

$$\boxed{\mathbb{D} \times i + j\omega\rho = 0}$$

[解説] 本当は電流連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{i} + j\omega\rho = 0$ を書きたかったのだろう。左辺の第１項の $\nabla \times \mathbf{i}$ は数学（ベクトル解析）では意味を成す。そのベクトル関数のローテーション($\nabla\times$)なので演算結果はベクトルとなる。しかし第２項の $j\omega\rho$ はスカラーである。ベクトルとスカラーの和(+)を取るとは一体何事だろうか。

(5)

$$\hat{n}\left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\right) = 0$$

$$\boxed{\hat{n} \left(\mathbb{H}_1 - \mathbb{H}_2\right) = 0}$$

[解説] 磁界の接線成分の境界条件 $\hat{n} \times \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\right) = 0$ を書きたかったのだろう。ベクトル同士を列挙する演算は存在しない（実際には存在し、ベクトルの積は行列になる）。しっかりと演算子を書く必要がある。ところで、$\hat{n} \times \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\right) = 0$ の右辺の 0 はスカラーの 0 と同じだが、これは別に間違いではなく、零元の 0 は何次元のベクトル空間でもその数だけ 0 を並べたベクトルであり、スカラー的に 0 と書いても全く混同することが無いためにスカラー記法と同じ細字の 0 を使っているのであり、これは間違いではない。もちろん太字の $\mathbf{0}$ を使ってもかまわない。

(6)

$$\hat{n}\left(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2\right) = \sigma$$

$$\boxed{\hat{n} \left(\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2\right) = \sigma}$$

[解説] 電束の法線成分の境界条件 $\hat{n} \cdot \left(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2\right) = \sigma$ を書きたかったのだろう。ベクトル同士を列挙する演算は存在しない。しっかりと演算子を書く必要がある。内積のドット(・)は書くと小さいが、非常に大きな意味を持つ。