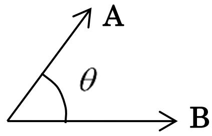
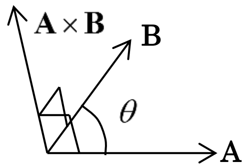
ベクトル解析公式集



1. 公式

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$ (θ: $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の間の角)

(2) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\hat{u}_{AB}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ ($\hat{u}_{AB}$: $\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$の方に回転する右ねじの進む方向の単位ベクトル)



(3) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

(4) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

(5) $\hat{u}_A=\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|$ ($\boldsymbol{A}$方向の単位ベクトル)

(6) $\nabla=\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$

(7) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

(8) $\nabla\times(\nabla V)=0$

(9) $\nabla\cdot(V\boldsymbol{A})=V\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla V$

(10) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$

(11) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$

ここで、 $(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)=\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{A}$

(12) $\nabla\times(V\boldsymbol{A})=\nabla V\times\boldsymbol{A}+V\nabla\times\boldsymbol{A}$

(13) $\nabla(UV)=U\nabla V+V\nabla U$

(14) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

(15) $\nabla\cdot(\nabla V)=\nabla^2 V$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$ (ラプラシアン)

(16) $\nabla^2\boldsymbol{A}=-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ (ベクトル・ラプラシアン)

カルテシアン座標のとき: $\nabla^2\boldsymbol{A}=\hat{x}\nabla^2 A_x+\hat{y}\nabla^2 A_y+\hat{z}\nabla^2 A_z$

(17) $\nabla V=\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial V}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$

$$=\hat{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$$

(18) $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

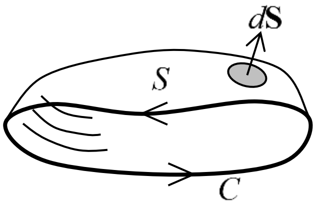
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

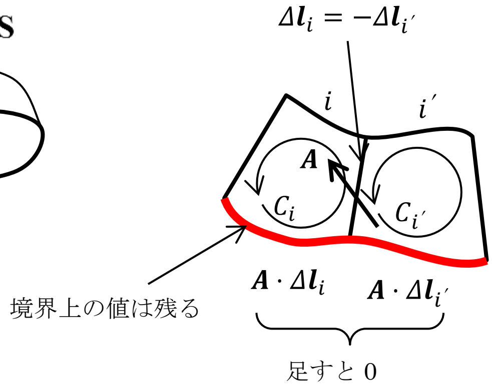
(19) $\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

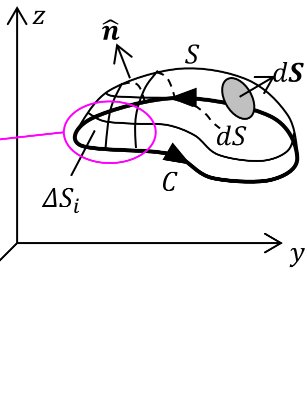
$$= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2 r\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & \rho A_\theta & r\sin\theta\, A_\varphi \end{vmatrix}$$

(20) $\iint_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$ **(ストークスの定理)**

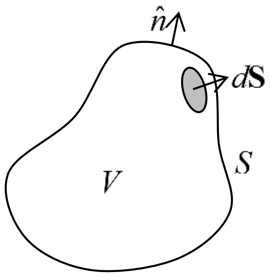


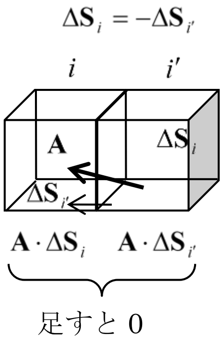


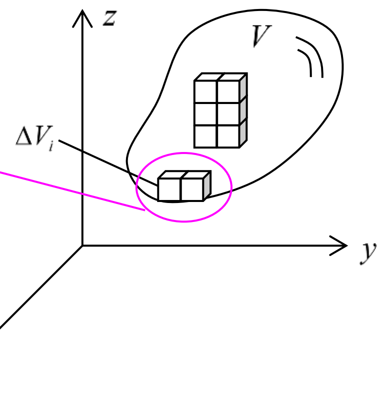


(21) $\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla V\ dS = \oint_C V d\boldsymbol{l}$

(22) $\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \oiint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ **(ガウスの発散定理)**



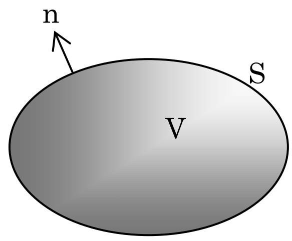




(23)　$\iiint_V \nabla\times\boldsymbol{A}dV = \oiint_S \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{A}dS$　　(3-D Stokes)

(24)　$\iiint_V \nabla V dV = \oiint_S V d\boldsymbol{S}$

(25) Green の定理



Green の第一公式

$$\oiint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS = \iiint_V \{f\nabla^2 g + (\nabla f)\cdot(\nabla g)\}dV$$

Green の第二公式

$$\oiint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS = \iiint_V \{f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\}dV$$

ここで、n は S の内部から外側に向かう S に垂直方向の座標である。

(26)ヘルムホルツの定理

任意のベクトル関数は 1 つのスカラー関数の勾配と、他の 1 つのベクトル関数の回転の和で表すことができる（直和分解できる）。

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_r + \boldsymbol{F}_p$$

$\boldsymbol{F}_r$と$\boldsymbol{F}_p$はベクトル関数$\boldsymbol{A}$とスカラー関数φを用いて次のように書ける。

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_r = \nabla\times\boldsymbol{A} & (\text{ソレノイダル・ベクトル}) \\ \boldsymbol{F}_p = \nabla\varphi & (\text{ラメラー・ベクトル})\end{cases}$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = 0$であるようなベクトルをソレノイダルベクトルという。ソレノイダルとは無始無終を意味し、定常電流が作る磁界のように力線は閉曲線となる。$\nabla\times\boldsymbol{a} = 0$であるようなベクトルをラメラーベクトルと言う。ラメラーとは層状を意味し、ラメラーベクトルの力線は層状となる。

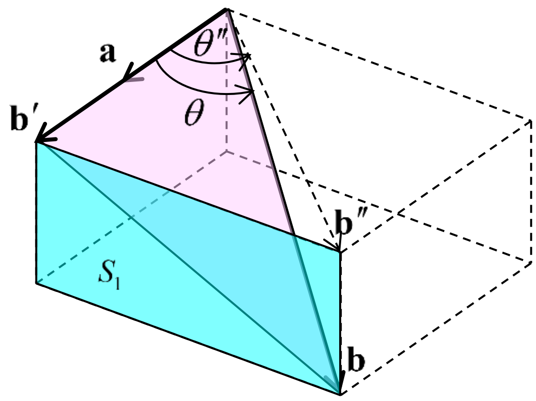
$\boldsymbol{F}_r$と$\boldsymbol{F}_p$は次の性質を持つ。

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{F}_r = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0 \\ \nabla\times\boldsymbol{F}_p = \nabla\times(\nabla\varphi) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F}_p \\ \nabla\times\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F}_r\end{cases}$$

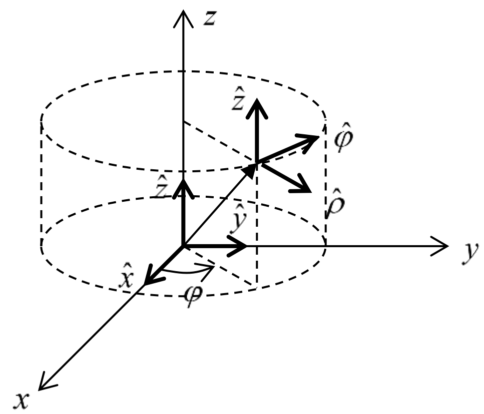
つまり、ベクトル関数$\boldsymbol{F}$を定めるときに、発散だけ、または回転だけを定めたのでは完全に定まらず、発散と回転の両方を定めなければ$\boldsymbol{F}$は一意に定まらない。

2. 座標、ベクトルの座標変換



$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の内積$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$は$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}''$の内積$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'' = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}''|\cos\theta''$に等しい。なぜならば、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$において、$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$は$\boldsymbol{b}$の$\boldsymbol{a}$の方向への射影を表しており、図中に記入されているベクトル$\boldsymbol{b}'$の大きさ$|\boldsymbol{b}'|$に等しい。従って、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}'|$。一方、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{a}$に垂直な面$S_1$内で移動させたベクトル$\boldsymbol{b}''$との内積$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'' = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}''|\cos\theta''$においても$|\boldsymbol{b}''|\cos\theta'' = |\boldsymbol{b}'|$なので、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'' = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}''|\cos\theta'' = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}'|$。よって、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}''$。この定理はA.7.2の内積の計算で用いる。

2.1 直交座標(x, y, z) ⇔ 円筒座標(ρ, ϕ, z)



<u>座標の変換</u>

$(\rho, \phi, z) \to (x, y, z)$:
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$(x, y, z) \to (\rho, \phi, z)$:
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \quad (\textit{場合によって注意が必要}) \\ z = z \end{cases}$$

ベクトルの変換

$$\begin{cases}\hat{x}\cdot\hat{\rho}=\cos\phi\\ \hat{x}\cdot\hat{\phi}=-\sin\phi\\ \hat{x}\cdot\hat{z}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{y}\cdot\hat{\rho}=\sin\phi\\ \hat{y}\cdot\hat{\phi}=\cos\phi\\ \hat{y}\cdot\hat{z}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{z}\cdot\hat{\rho}=0\\ \hat{z}\cdot\hat{\phi}=0\\ \hat{z}\cdot\hat{z}=1\end{cases}$$

例えば直角座標で(x,y,z)、円筒座標で(ρ,ϕ,z)の位置に始点があるベクトル$\boldsymbol{A}$が直角座標表示$\boldsymbol{A}=\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z$されているとき、それを円筒座標表示するには

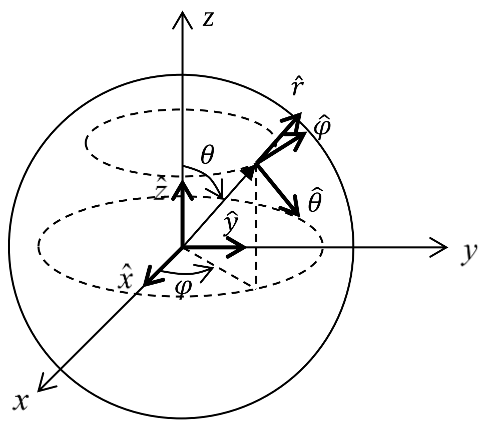
$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\hat{\rho}(\hat{\rho}\cdot\mathbf{A})+\hat{\varphi}(\hat{\varphi}\cdot\mathbf{A})+\hat{z}(\hat{z}\cdot\mathbf{A})\\
&=\hat{\rho}\left\{\hat{\rho}\cdot(\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z)\right\}\\
&\quad+\hat{\varphi}\left\{\hat{\varphi}\cdot(\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z)\right\}\\
&\quad+\hat{z}\left\{\hat{z}\cdot(\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z)\right\}\\
&=\hat{\rho}\left\{(\hat{\rho}\cdot\hat{x})A_x+(\hat{\rho}\cdot\hat{y})A_y+(\hat{\rho}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\
&\quad+\hat{\varphi}\left\{(\hat{\varphi}\cdot\hat{x})A_x+(\hat{\varphi}\cdot\hat{y})A_y+(\hat{\varphi}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\
&\quad+\hat{z}\left\{(\hat{z}\cdot\hat{x})A_x+(\hat{z}\cdot\hat{y})A_y+(\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\end{aligned}$$

ここで、()内の単位ベクトルの内積は上で計算した式を使えばよい。

同様に、円筒座標から直角座標への座標変換もできる。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\hat{x}(\hat{x}\cdot\mathbf{A})+\hat{y}(\hat{y}\cdot\mathbf{A})+\hat{z}(\hat{z}\cdot\mathbf{A})\\
&=\hat{x}\left\{(\hat{x}\cdot\hat{\rho})A_\rho+(\hat{x}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi+(\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\
&\quad+\hat{y}\left\{(\hat{y}\cdot\hat{\rho})A_\rho+(\hat{y}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi+(\hat{y}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\\
&\quad+\hat{z}\left\{(\hat{z}\cdot\hat{\rho})A_\rho+(\hat{z}\cdot\hat{\varphi})A_\varphi+(\hat{z}\cdot\hat{z})A_z)\right\}\end{aligned}$$

2.2 直交座標(x, y, z) ⇔ 極座標(r, θ, ϕ)



座標の変換

$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$:
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$:
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \ (\text{場合によって注意が必要}) \end{cases}$$

ベクトルの変換

$$\begin{cases} \hat{x}\cdot\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{\varphi} = -\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{y}\cdot\hat{r} = \sin\theta\sin\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\sin\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{\varphi} = \cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta \\ \hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\sin\theta \\ \hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0 \end{cases}$$

後は円筒座標と同じように変換する。

2.3 ∇演算子の円筒座標系の表現を導く（例）

for ∇V

$$\nabla V = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

ここで、

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi \\ \hat{y} = \hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

また、**連鎖律(chain rule)**を使って(x, y, z)座標系での微分を(ρ, ϕ, z)座標系での微分で表す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \left(\frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi} + 0\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= \left(\frac{x}{\rho}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \left(\frac{-y}{\rho^2}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ &= \cos\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \\ &= \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \left(\frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{1}{x}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi} + 0\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= \left(\frac{y}{\rho}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \left(\frac{x}{\rho^2}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ &= \sin\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla V = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= (\hat{\rho}\,cos\,\varphi - \hat{\varphi}\,sin\,\varphi)\left(cos\,\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{sin\,\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + (\hat{\rho}\,sin\,\varphi + \hat{\varphi}\,cos\,\varphi)\left(sin\,\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{cos\,\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\hat{\rho}\cos\varphi)\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) + (\hat{\rho}\sin\varphi)\left(\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) \\
&+ (-\hat{\varphi}\sin\varphi)\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) + (\hat{\varphi}\cos\varphi)\left(\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) \\
&+ \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$$
= \hat{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}
$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}, \nabla\times\boldsymbol{A}$についても直交座標の定義に対して同様に地道に座標変換と連鎖律を使って変形すれば求めることができる。